数理解析研究所講究録
952巻 1996年 170-183

Special generic map と L^2-Betti number

阪大理　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)

序

M^nをn次元連結閉C^∞多様体、$f:M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n \geq p)$をC^∞写像とする。fの特異点集合$S(f)=\{x \in M^n \mid \mathrm{rank}(df_x) < p\}$の点xが定値fold型特異点とは、xを中心とする$M^n$の局所座標$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, f(x)を中心とする$\mathbb{R}^p$の局所座標$(y_1, \cdots, y_p)$, 整数λ $(0 \leq \lambda \leq n-p+1)$が存在して、

$$y_i \circ f = x_i \quad (1 \leq i \leq p-1)$$
$$y_p \circ f = x_p^2 + \cdots + x_n^2$$

と書けるときを言う。特異点集合が定値fold型特異点のみからなる写像をspecial generic mapという。special generic map $f: M^n \to \mathbb{R}^p$が存在するとき、特異点集合S(f)は(p-1)次元多様体になり、M^n自身の位相や、M^nとS(f)の位相の関係については様々な結果が知られている。([BdR, Sae1, Sae2, Sak1, Sak2]を参照。) 本稿では、L^2-Betti numberを用いて、special generic mapを許す多様体の位相や、特異点集合との関係を

調べることにする。

§1. L^2-Betti number

Xを有限連結CW複体とし、その基本群をΓで表す。$p:\tilde{X}\to X$をuniversal coveringとし、$\tilde{X}$とそのcelluler chain complexには、左からΓを作用させることにする。ベクトル空間 $\ell^2(\Gamma)=\{\sum_{g\in\Gamma}\lambda_g\cdot g$ (形式的和) $\mid \lambda_g\in\mathbb{C},\ \sum_{g\in\Gamma}|\lambda_g|^2<\infty\}$ に内積を $\langle\sum_{g\in\Gamma}\lambda_g\cdot g,\ \sum_{g\in\Gamma}\mu_g\cdot g\rangle=\sum_{g\in\Gamma}\lambda_g\overline{\mu_g}$ と定めることにより、$\ell^2(\Gamma)$はHilbert空間になる。

$\ell^2(\Gamma)$から$\ell^2(\Gamma)$への有界Γ-同変作用素の全体からなる集合をΓのvon Neumann algebraと呼び、$\mathcal{N}(\Gamma)$で表す。また、Hilbert空間Pが、等長Γ-作用をもち、ある$r\in\mathbb{N}$に対して、$\oplus_{i=1}^r\ell^2(\Gamma)$ の中への等長Γ-同変埋め込みが存在するとき、Pを有限生成Hilbert $\mathcal{N}(\Gamma)$-moduleと呼ぶことにする。次に、有限生成Hilbert $\mathcal{N}(\Gamma)$-module P の von Neumann dimensionを定義しよう。$pr:\oplus_{i=1}^r\ell^2(\Gamma)\to\oplus_{i=1}^r\ell^2(\Gamma)$ を $im(pr)$ がPと等長Γ-同変同型な射影作用素とする。prを$\mathcal{N}(\Gamma)$上の$r\times r$行列(p_{ij})とみなし、Pのvon Neumann dimension $\dim_\Gamma P$ を

$$\dim_\Gamma P=\sum_{i=1}^r\langle p_{ii}(e),e\rangle \qquad (e\text{は}\Gamma\text{の単位元})$$

と定義する。

さて、$\tilde{X}$のcelluler chain complex $C_*(\tilde{X})$にはΓが左から

作用しており、$C_*(\tilde{X})$ を左 $\mathbb{Z}\Gamma$-module の chain complex とみて、$\ell^2(\Gamma)$ とのテンソル積 $\ell^2(\Gamma)\otimes_{\mathbb{Z}\Gamma}C_*(\tilde{X})$ を $C_*^{(2)}(X)$ と書くことにする。$C_*^{(2)}(X)$ は、有限生成 Hilbert $\mathcal{N}(\Gamma)$-module の chain complex で、有界 Γ-同変作用素 $d_p^{(2)}(=\mathrm{id}\otimes d_p)$ を boundary 作用素としてもつ。X の p 次元 L^2-homology を

$$H_p^{(2)}(X)=\ker d_p^{(2)}/\overline{\mathrm{im}\, d_{p+1}^{(2)}}\quad ,(\overline{\mathrm{im}\, d_{p+1}^{(2)}} \text{ は } \mathrm{im}\, d_p^{(2)} \text{ の closure})$$

と定義する。また X の p 次 L^2-Betti number $b_p^{(2)}(X)$ を

$$b_p^{(2)}(X)=\dim_\Gamma(H_p^{(2)}(X))$$

と定義する。L^2-Betti number について、次のことが知られている。([A, (6.4)], [L1, Lemma 1.2], [LL, section 3] を参照)

<u>補題1.1.</u> (i) X の Euler characteristic $\chi(X)$ に対して、

$$\chi(X)=\sum_{p\geq 0}(-1)^p b_p^{(2)}(X).$$

(ii) $p':X'\longrightarrow X$ を n 重 covering とすると、$b_p^{(2)}(X')=n\,b_p^{(2)}(X)$.

(iii) $\Gamma(=\pi_1(X))$ が有限群のとき、$b_0^{(2)}(X)=\dfrac{1}{|\Gamma|}$, Γ が無限群のとき、$b_0^{(2)}(X)=0$. (ここで、$|\Gamma|$ は、Γ の位数を表す。)

(iv) X が n 次元閉多様体のとき、$b_p^{(2)}(X)=b_{n-p}^{(2)}(X)$, $(0\leq p\leq n)$.

<u>例.</u> (1) n 次元実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ について、

補題1.1, (ii) より、$b_p^{(2)}(S^n)=2\,b_p^{(2)}(\mathbb{R}P^n)$.

S^n は単連結であり、定義より、$b_p^{(2)}(S^n)$ は通常の Betti number

$b_p(S^n)$ と等しくなる。よって、

$$b_0^{(2)}(\mathbb{R}P^n) = b_n^{(2)}(\mathbb{R}P^n) = \frac{1}{2}.$$

$p \neq 0, n$ のとき、$b_p^{(2)}(\mathbb{R}P^n) = 0$.

(2) Σ_g を genus g $(g \geq 1)$ の有向閉曲面とする。
補題1.1, (iii) と (iv) より、$b_2^{(2)}(\Sigma_g) = b_0^{(2)}(\Sigma_g) = 0$.
補題1.1, (i) より、$\chi(\Sigma_g) = b_0^{(2)}(\Sigma_g) - b_1^{(2)}(\Sigma_g) + b_2^{(2)}(\Sigma_g)$
したがって、$b_1^{(2)}(\Sigma_g) = -\chi(\Sigma_g) = 2g-2$.

群Γの単位元でない任意の元gに対して、有限群Gと準同型$\phi : \Gamma \longrightarrow G$で、$\phi(g)$が$G$の単位元にならないものが存在するとき、$\Gamma$をresidually finiteという。群$\Gamma$が可算で、residually finite のとき、Γの正規部分群の列$\cdots \subset \Gamma_{m+1} \subset \Gamma_m \subset \cdots \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_0 = \Gamma$で、$\forall m \geq 0$に対して$[\Gamma : \Gamma_m] < \infty$であり、かつ$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Gamma_m = \{e\}$ (eはΓの単位元) を満たすものが存在する。
基本群が有限位数の有限連結CW複体のL^2-Betti number については、例(1)の場合のようにuniversal coveringのBetti numberを用いて計算できる。基本群がresidually finiteのときに、Lückは次のことを示している。

<u>定理1.2.([L2, Theorem 0.1])</u>. Xを有限連結CW複体で、そ

の基本群Γはresidually finiteであるものとする。Γの正規部分群の列$(\Gamma_m)_{m\geq 0}$を上の状況をみたすものとし、X_mによりΓ_mに対応するXのcoveringを表すことにする。このとき、

$$\lim \frac{b_p(X_m)}{[\Gamma : \Gamma_m]} = b_p^{(2)}(X) 。$$

ここで、$b_p(X_m)$はX_mの通常のBetti numberである。

Wをコンパクト連結p次元多様体で、その境界∂Wは空でなく、基本群Γはresidually finiteかつ無限位数をもつものとする。Γの正規部分群の列$(\Gamma_m)_{m\geq 0}$を上と同様の条件を満たし、さらにΓ_1に対応するWのcovering W_1は向きづけ可能であるようにとる。このとき、次のことが成り立つ。

<u>補題1.3.</u> 上の状況の下で、

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|\pi_0(\partial W_m)|}{[\Gamma : \Gamma_m]} \leqq b_{p-1}^{(2)}(W) ,$$

ここで、$|\pi_0(\partial W_m)|$は$\pi_0(\partial W_m)$の元の個数である。

証明) $m \geq 1$ではW_mは向きづけ可能であり、空間対$(W_m, \partial W_m)$に対するhomology完全系列を考えると、$b_{p-1}(\partial W_m) \leqq 1 + b_{p-1}(W_m)$がわかる。$b_{p-1}(\partial W_m) = b_0(W_m) = |\pi_0(\partial W_m)|$だから、$|\pi_0(\partial W_m)| \leqq 1 + b_{p-1}(W_m)$ したがって、

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|\pi_0(\partial W_m)|}{[\Gamma : \Gamma_m]} \leqq \lim_{m\to\infty} \frac{1 + b_{p-1}(W_m)}{[\Gamma : \Gamma_m]} .$$

$|\Gamma|=\infty$ であることと、定理1.2より $\lim_{m\to\infty}\frac{|\pi_0(\partial W_m)|}{[\Gamma:\Gamma_m]}\leq b_{p-1}^{(2)}(W)$ が示される。 □

命題1.4. Wを空でない境界をもつコンパクト連結p次元多様体で、その基本群はresidually finiteで無限位数をもつものとし、$b_{p-1}^{(2)}(W)=0$を満たすものとする。このとき、∂Wの各連結成分の基本群は無限位数をもつ。

証明) ∂Wのある連結成分Cの基本群の位数が有限とすると、補題1.3の中のような$\Gamma(=\pi_1(W))$の正規部分群の列$(\Gamma_m)_{m\geq 0}$とそれに対応するcovering $p_m: W_m \to W$に対して、

$$|\pi_0(\partial W_m)| \geqq |\pi_0(p_m^{-1}(C))| \geqq [\Gamma;\Gamma_m]/|\pi_1(C)|$$

が成り立ち、したがって、$|\pi_0(\partial W_m)|/[\Gamma;\Gamma_m] \geqq \frac{1}{|\pi_1(C)|} > 0$。
補題1.3より、$b_{p-1}^{(2)}(W) \geqq \lim_{m\to\infty}\frac{|\pi_0(\partial W_m)|}{[\Gamma;\Gamma_m]} \geqq \frac{1}{\pi_1(C)} > 0$。
よって、$b_{p-1}^{(2)}(W)=0$のとき、∂Wの各連結成分の基本群の位数は無限になる。 □

命題1.5. Wを空でない境界をもつコンパクト連結有向3次元多様体で、その基本群はresidually finiteで無限位数をもち、$b_1^{(2)}(W)=0$となるものとする。このとき、∂Wの各連結成分は球面またはトーラスに同相で、球面に同相な連結成分の個

数は$b_2^{(2)}(W)$と等しい。

証明) $X = W \cup_{\partial W} W$ とおく。

また、∂Wの連結成分への分解を $\partial W = C_1 \cup \cdots \cup C_k \cup C_{k+1} \cup \cdots \cup C_l$,
$C_i \underset{\text{homeo.}}{\approx} S^2 (1 \leqq i \leqq k)$, $C_i \not\approx S^2 (k+1 \leqq i \leqq l)$ とする。

Xは3次元有向閉多様体だからEuler characteristic $\chi(X)$は0になる。したがって、$2\chi(W) - \chi(\partial W) = 0$ が成り立つ。

補題1.1,(i)より、$\chi(W) = b_0^{(2)}(W) - b_1^{(2)}(W) + b_2^{(2)}(W)$.

Wの基本群の位数が無限だから、補題1.1,(iii)より $b_0^{(2)}(W) = 0$

また、仮定より $b_1^{(2)}(W) = 0$ だから、$\chi(W) = b_2^{(2)}(W)$ となる。

一方、∂Wについて、$\chi(S^2) = 2$ であり、$k+1 \leqq i \leqq l$ に対してC_iは向きづけ可能であることから、例(2)の中で見たように$\chi(C_i) = -b_1^{(2)}(C_i)$ となる。よって、$\chi(\partial W) = 2k - \sum_{i=k+1}^{l} b_1^{(2)}(C_i)$。

以上から、$2b_2^{(2)}(W) = 2k - \sum_{i=k+1}^{l} b_1^{(2)}(C_i)$

よって、$b_2^{(2)}(W) \leqq k$ 。

また、$\pi_1(W)$の正規部分群の列$(\Gamma_m)_{m\geq 0}$を定理1.2の中のものと同様のものとし、W_mによりΓ_mに対応するWのcoveringを表すことにすると、$|\pi_0(\partial W_m)| \geqq k \times [\pi_1(W) : \Gamma_m]$ であり、

補題1.3より。$b_2^{(2)}(W) \geqq \lim_{m \to \infty} \frac{|\pi_0(\partial W_m)|}{[\pi_1(W) : \Gamma_m]} \geqq k$.

したがって、$b_2^{(2)}(W) = k$ であり、$\sum_{i=k+1}^{l} b_1^{(2)}(C_i) = 0$ がわかる。

例(2)から、$k+1 \leqq i \leqq l$に対して、$C_i \approx T^2$ である。 □

§2. Special generic map と Stein factorization

以下では、多様体と写像は C^∞ とする。

M^n を n 次元連結閉多様体とし、$f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p\ (n>p)$ を special generic map とする。$x, x' \in M^n$ に対して、$f(x)=f(x')$ で、x と x' が $f^{-1}(f(x))$ の同じ連結成分に属するとき $x \sim x'$ と定義する。この同値関係による M^n の商空間を W_f と書くことにし、$q_f: M \longrightarrow W_f$ を商写像とする。また、写像 $f': W_f \longrightarrow \mathbb{R}^p$ で $f' \circ q_f = f$ を満たすものが存在する。W_f または、次の可換図式

$$\begin{tikzcd} M^n \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q_f"'] & & \mathbb{R}^p \\ & W_f \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

を f の Stein factorization という。W_f には、境界をもつ p 次元多様体の構造で、f' が immersion、q_f が C^∞ 写像となるようなものがあり、$S(f) \underset{\text{diffeo.}}{\cong} \partial W_f$ となることが知られている。

$D^m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \leq 1\}$ とし、$S^{m-1} = \partial D^m$ とおく。D^m-bundle E が linear とは、E の構造群が直交群 $O(m)$ に簡約できることである。

<u>命題 2.1 ([Sae 1, Proposition 2.1]).</u> M^n を n 次元閉多様体とする。special generic map $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p\ (n>p)$ が存在するためには、次のことが必要十分条件である。

(1) 境界をもち平行性をもつ p 次元コンパクト多様体 W と、

W 上の smooth S^{n-p}-bundle E と ∂W 上の linear D^{n-p+1}-bundle B で、E の ∂W 上への制限 ∂E と B に同伴する S^{n-p}-bundle ∂B は同型となるものが存在する。さらに、

(2) ∂W 上の恒等写像上の bundle map となる微分同相写像 $h : \partial B \to \partial E$ で、$M \cong E \cup_h B$ を満たすものが存在する。

注意: special generic map $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n>p)$ が存在するとき、上の命題の W は f の Stein factorization W_f と微分同相なものがとれる。

Special generic map の例. (1) $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $pr : R^{n+1} \to \mathbb{R}^p$ $(n>p)$ を標準的な射影とする。$f = pr|_{S^n} : S^n \to \mathbb{R}^p$ は special generic map となり、その Stein factorization W_f は、$W_f \cong D^p$ となる。

(2) $f : S^n \to \mathbb{R}^p$ $(n>p)$ を上の special generic map とする。
$\eta : \mathbb{R}^p \times S^\ell \to \mathbb{R}^{p+\ell}$ を埋め込みとし、次の合成を考える

$$g : S^n \times S^\ell \xrightarrow{f \times id} \mathbb{R}^p \times S^\ell \xrightarrow{\eta} \mathbb{R}^{p+\ell}$$

この g は special generic map となり、$W_g \cong D^p \times S^\ell$。

(3) $M = \partial((S^1 \times S^2 - \mathrm{int}\, D^3) \times D^2)$ とおく。
M は $\mathbb{R}^3$ への special generic map f で、$W_f \cong S^1 \times S^2 - \mathrm{int}\, D^3$,

$S(f) \cong S^2$ となるものが存在する。

一方、$M \cong S^1 \times S^3 \# S^2 \times S^2$ であり、M から $\mathbb{R}^3$ への special generic map g で、$W_g \cong S^1 \times D^2 \natural S^2 \times I$（$\natural$ は境界連結和），$S(g) \cong T^2 \cup S^2$ となるものが存在する。

この例から、1つの多様体から特異点集合の異なる2つの special generic map が存在する場合があることがわかる。

Special generic map とその Stein factorization, 特異点集合について、以下のようなことが知られている。

__命題 2.2（[Sae1, Sak2]）.__ $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \ (n > p)$ を special generic map とする。n が偶数で p が奇数のとき、$\chi(M^n) = \chi(S(f))$。

__命題 2.3（[Sae1]）.__ $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \ (n > p)$ を special generic map とし、$q_f : M^n \longrightarrow W_f$ を f の Stein factorization の商写像とする。このとき、$(q_f)_* : \pi_1(M^n) \longrightarrow \pi_1(W_f)$ は同型。

__命題 2.4（[Sae1]）.__ M^n は有向閉多様体とし、$f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p (n>p)$ を special generic map とする。$q_f : M^n \longrightarrow W_f$ を f の Stein factorization の商写像とすると、$q \leqq n-p$ に対して、$(q_f)_* : H_q(M ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_q(W_f ; \mathbb{Z})$ は同型である。

命題 2.5 ([Sae1]). $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n>p)$ を special generic map で、M^n は向きづけ可能とする。$\#S(f)$ により $S(f)$ の連結成分の個数を表すことにすると、$\#S(f) \leqq b_{p-1}(M^n)+1$。
さらに、$n=2(p-1)$ のとき、$\#S(f) \leqq \frac{1}{2} b_{p-1}(M^n)+1$.

§3. L^2-Betti number の special generic map への応用

M^n を n 次元連結閉多様体で、その基本群 Γ が residually finite であるものとする。Γ の正規部分群の列 $(\Gamma_m)_{m\geq 0}$ を、定理1.2 の中の状況をみたし、Γ_i に対応する covering は向きづけ可能であるものとする。special generic map $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ が存在するとき、$p_m: M_m \to M$ を Γ_m に対応する M の covering とし、$f_m = f \circ p_m$ とおくと、$f_m: M_m \to \mathbb{R}^p$ もまた special generic map になる。次のことは容易にわかる。

補題 3.1. $f_m: M_m \to \mathbb{R}^p$ の Stein factorization W_{f_m} は、$(g_f)_*(\Gamma_m)$ $(\cong \Gamma_m)$ に対応する W_f の covering space である。

この補題と命題2.3, 2.4, 定理1.2 より、次のことが示される。

命題 3.2. $f: M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n>p)$ は special generic map で、$\pi_1(M)$ は residually finite とする。このとき、$g \leqq n-p$ に対して、

$b_q^{(2)}(M) = b_q^{(2)}(W_f)$。

証明) $(\Gamma_m)_{m\geq 0}$, M_m, f_mを補題3.1の中のものとする。
命題2.4より、$m \geq 1$, $q \leq n-p$に対して$b_q(M_m) = b_q(W_{f_m})$。
命題2.3より、$[\Gamma : \Gamma_m] = [(q_f)_*(\Gamma) : (q_f)_*(\Gamma_m)]$であり、定理1.2を用いると、$b_q^{(2)}(M) = \lim_{m\to\infty} \frac{b_q(M_m)}{[\Gamma : \Gamma_m]} = \lim_{m\to\infty} \frac{b_q(W_{f_m})}{[(q_f)_*(\Gamma) : (q_f)_*(\Gamma_m)]} = b_q^{(2)}(W_f)$ □

系3.3. M^nをn次元連結閉多様体で$\pi_1(M)$がresidually finiteなものとする。ある$q \leq \frac{n}{2}$に対して$b_q^{(2)}(M) \neq 0$であるとき、$p \leq q$をみたすpについて、M^nは$\mathbb{R}^p$へのspecial generic mapをもたない。

命題3.4. M^nをn次元連結閉多様体で$\pi_1(M)$はresidually finiteかつ無限位数をもつものとする。special generic map $f : M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n > p)$が存在するとき、$(\Gamma_m)_{m\geq 0}$を補題3.1と同じ状況を満たす正規部分群の列とし、M_m, f_mを補題3.1と同様のものとする。
このとき、$\lim_{m\to\infty} \frac{\# S(f_m)}{[\pi_1(M) : \Gamma_m]} \leq b_{p-1}^{(2)}(M)$.
さらに、$n = 2(p-1)$のとき、$\lim_{m\to\infty} \frac{\# S(f_m)}{[\pi_1(M) : \Gamma_m]} \leq \frac{1}{2} b_{p-1}^{(2)}(M)$。

この命題の証明は、命題2.5と定理1.2を用いて、補題1.3の証明と同様のことをする。補題1.3から命題1.4を導いたの

と同様にして、命題3.4から次のことが導かれる。

<u>定理3.5.</u> M^n を n 次元連結閉多様体で、$\pi_1(M)$ は residually finite かつ位数が無限のものとする。ある p $(p<n)$ に対して $b_{p-1}^{(2)}(M^n)=0$ で、special generic map $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ が存在するとき、f の特異点集合 $S(f)$ の各連結成分の基本群の位数は無限である。

$\mathbb{R}^3$ への special generic map については、次のことがわかる。

<u>定理3.6.</u> M^n $(n \geq 3)$ を n 次元連結閉多様体で、$\pi_1(M)$ は位数が無限な residually finite 群となり、$b_1^{(2)}(M)=0$ をみたすものとする。special generic map $f: M^n \longrightarrow \mathbb{R}^3$ が存在するとき、特異点集合 $S(f)$ の各連結成分は球面かトーラスに同相で、さらに、球面に同相な連結成分の個数は、$n \geq 5$ のときは $b_2^{(2)}(M)$ と等しく、$n=4$ のときは $\frac{1}{2}b_2^{(2)}(M)$ と等しい。

証明の概略）命題3.2より、$b_1^{(2)}(W_f)=b_1^{(2)}(M)=0$ であり、$\partial W_f \cong S(f)$ だから、命題1.5より、$S(f)$ の各連結成分は球面またはトーラスに同相で、球面と同相な連結成分の個数は $b_2^{(2)}(W_f)$ と等しい。$n \geq 5$ のとき、命題3.2より $b_2^{(2)}(M)=b_2^{(2)}(W_f)$、$n=4$ のとき、命題2.2より $\chi(M)=\chi(S(f))$ で、$b_0^{(2)}(M)=b_1^{(2)}(M)=0$ とあわせて証明できる。□

参考文献

[A] M. Atiyah, Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras, Soc. Math. France, Astérisque 32-33(1976), 43-72.

[BdR] O. Burlet and G. de Rham, Sur certaines applications génériques d'une variété close à 3-dimensions dans le plane, L'Enseign. Math. 20(1974), 275-292.

[LL] J. Lott and W. Lück, *L^2-topological invariants of 3-manifolds*, Invent. Math. 120(1995), 15-60.

[L1] W. Lück, L^2-Betti numbers of mapping tori and groups, Topology 33(1994), 203-214.

[L2] W. Lück, Approximating L^2-invariants by their finite-dimensional analogous, Geom. Funct. Anal. 4(1994), 455-481.

[Sae1] O. Saeki, Topology of special generic maps from a closed manifold into the plane, Topology Appl. 49(1993), 265-293.

[Sae2] O. Saeki, Topology of special generic maps into $\mathbb{R}^3$, Matematica Contemporânea 5(1993), 161-186.

[Sak1] K. Sakuma, On special generic maps of simply connected 2n-manifolds into $\mathbb{R}^3$, Topology Appl. 50(1993), 249-261.

[Sak2] K. Sakuma, On the topology of simple fold maps, Tokyo J. Math. 17(1994), 21-31.