数理解析研究所講究録
953巻 1996年 106-112

零次元ラシネフ空間あれこれ

津田光一 (愛媛大学工学部)

0. はじめに

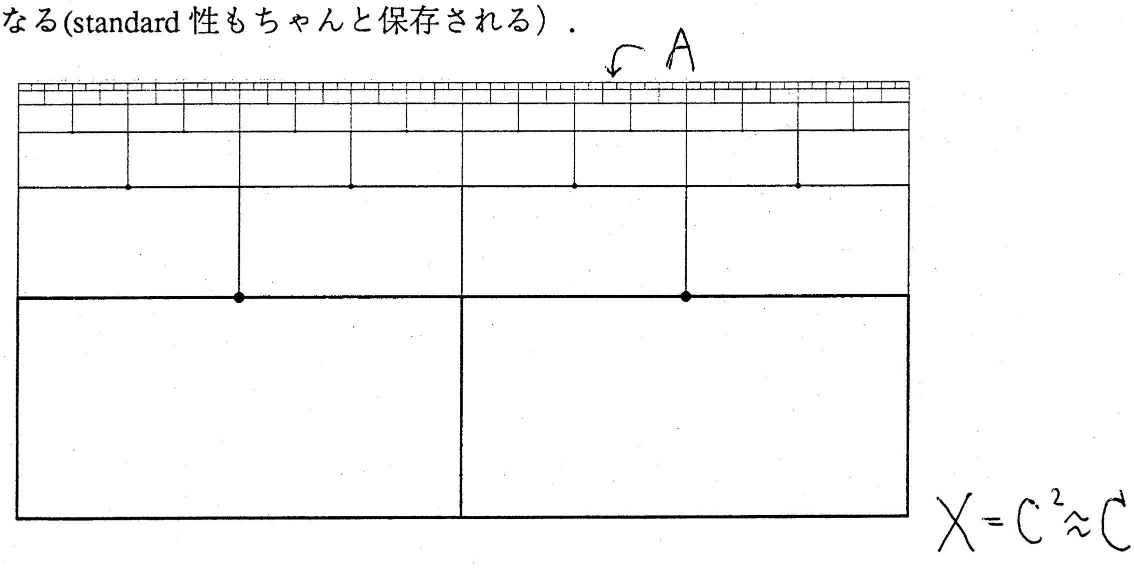
我々は, S. Watson によって発見された方法 (以下ワトソン法と呼ぶ) を使って, ラシネフ空間についての万有空間をいろいろなケースについて構成してきた [K-T], [T0-T1],[T-W].
しかしながら, その基本となる論文 [∞1] は未だに pending になったままであって, このままでは van Douwen の残した Black Box はなくなった[T0] 代わりに, 新たな Black Box を残すことに成りかねない (例えば[T1] の中で必要な同相写像拡張定理の証明など).
そこで, 書き上げたまま推敲せずにほっておいた論文 [∞2] も一緒にして, この機会にもっと読みやすく書き直そうと思い立ったわけである[T].
その過程で, 次のような新しい結果が得られたのでそれを改めて報告しておきたい.
1. Lasnev [L] によって発見された Countable Nowhere First Countable space (以下 L_0 と略記) は homogeneous である.
2. 任意の濃度 α に対して $\beta \geqq \alpha$ が存在して, 次の性質を持つ σ-discrete なラシネフ空間 W_β が存在する: netweight of $W_\beta = \beta$ and W_β is rigid.

定義　位相空間 X が rigid とは, X から自分自身への同相写像が identity だけであるときを言う (i.e. Homeo (X,X) = $\{id_X\}$).

1. semicanonical cover と homogeneity of decomposition spaces

上に述べた1の結果は単独に (つまり homogeneity を直接) 証明することも恐らくできそうである (場合分けが複雑になりそうだが, 本質的には以下の我々の証明と同じ議論になってしまうだろう) が, ここで述べる方法では universal space のある種の特徴付けを使って, [∞2] の中で我々が作ったラシネフ空間 (以下 D_ω と略記する) と L_0 は同相になることを証明する.
このラシネフ空間 D_ω はすでに[∞2] の中で homogeneous であることを証明してあるので求める結果が得られるわけである.
では D_ω の homogeneity はどのようにして示されるかというとワトソン法に使うモデル空間の semicanonical cover を<u>うまく</u>取ってやるのである.

図１にある pair (X,A) の s. c. cover を例に取って事情を説明しよう．ここではＸは，カントール集合Ｃをイメージしている (その実現はユークリッド平面の中の直積集合 C^2 を考えているから，この場合 $X=C^2$ となる).
更にＡは，上部の boundary 部分であって，Ｘの中では nowhere dense となっているが，位相的にはＣとAは同相である．
各四角領域が (X,A) の s.c. cover の元であって，それぞれもＣと同相で互いに disjoint な集合となるように取ってあると思って見ていただきたい．
つまり全体として集合 X\A の clopen cover を形成するように取ってあるつもりの絵である．
s. c. cover の定義はあちこちに書いたので，ここでは繰り返さないが，形式的には，Ａの位相的な性質（つまりＣと同相であるかどうかといったこと）には無関係に，言わばＡとの距離だけに注意すれば，各四角は作ることができ，立派に s. c. cover としての役割を果たすものが作れる（この図にあるようにAに近づくにつれて各四角領域の直径が小さくなって行きさえすればよい）．
しかし，この図にあるように，Ａの binary な <u>open base</u> (あるいは，covering の列で，１つ前の covering を細分して行く，集合Aの refining sequence と言ってもよい)を使って，自然に作ると，いろいろ好都合なことが分かっている（例えば，そういう２つの s.c. cover の間には，それらを保存するようなX上の同相写像が存在し，これは [∞1] の中で証明した同相写像拡張定理に本質的に利用される）．
従って，そのような s.c. cover を以下 <u>standard</u> s. c. cover と呼ぶことにする．
s. c. cover の良い性質の１つに部分集合への制限が作れるという事柄がある．つまり，この図で言えばXの部分集合Zをとって各四角領域Dとの制限集合 $Z\cap D$ を考えると，これは無条件で pair $(Z, Z\cap A)$ に対する s. c. cover となる(standard 性もちゃんと保存される）．



D_ωを作る上で使用する standard s. c. cover は pair としては，有理数空間Qと無理数空間Pの直積空間Q×Pのそれを用いる．つまり図で言えば，Xの中の稠密部分集合Yで Y≈Q×P であって，かつB=Y∩A がまたQ×P と同相となるような pair (Y,B) の s. s. c. cover を用いるわけである．
このYの s. c. cover としてC上のbinary な base をそのまま利用して，その制限からできる s. s. c. cover を使って構成した物が L_0 であると言ってよい（厳密には (Y,B) をそのまま使うわけではないのだが，基本的な構成は同じである）．
それに対して，D_ωではY⊂Z⊂Xである集合Zで無理数空間と同相なものを考えて，Z上の standard s. c. cover からスタートして構成する．
この間の事情は，普通，無理数空間の open base としては，C の (binary) base を制限した集合を考えないで，完備な物を考える (cf. [E, Example 4.1.23])ことに対応している．もちろん，我々の求めているラシネフ空間は最終的には Q×P から作られるのだから，Q×P の上の s. s. c. cover から直接に構成することも考えられるわけであるが，それはうまく行かない．ある意味の完備性が必要なわけである（それは同相写像拡張定理ひいては homogeneity に関係してくる）．

2．高濃度で rigid な空間

homogeneous な空間については，どんな（位相濃度）についても homogeneous な物が作れる(例えば，位相濃度 α のベールの零次元空間)．我々の方法では，どんなネットワーク濃度についてもhomogeneousなラシネフ空間が作れる（勿論それらは適当な族についての万有空間になっている）．一方 rigid な空間については，コンパクト距離空間でそのような物が作れることが知られている[C]．そこで次のような問題が出てくる．

問題０　どんな無限濃度 α に対しても rigid なラシネフ空間でそのネットワーク濃度が α なものが存在するか？

２の結果は，これについての部分解を与えるものであって，その構成には次の集合論の補題が必要となる．

補題　任意の非可算濃度 α に対して，次の性質を持つ $\beta \geqq \alpha$ が存在する．

$$\beta = |\{\gamma : \gamma < \beta \text{ でかつ cardinal number}\}|.$$

例えば，$\alpha = \omega_1$ に対してこの補題を適用すれば $\beta = \omega_{\omega_{\omega_{\omega_{\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}}}$ となる．

この補題によって，ワトソン法に使う各 pair $(X\gamma,A\gamma)$ に出てくる閉集合 $A\gamma$ として，各 γ についてすべて異なる位相濃度の σ–discrete 距離空間を取って来ることが出来るので，それらをそれぞれつぶして出来るラシネフ空間は濃度が γ の rigid なものとなるのである（rigid であることの証明には [T2]で開発した判定法のちょっとした改良定理を使う）．

3．残された問題

問題 0 に関連して次のことが（少なくとも当方には）分からない．

問題 1．どんな非可算濃度 α に対しても，rigid な距離空間でその位相濃度が α なものが存在するか？

当方は工学部へ移ったばかりで忙しくて，当分この方面の勉強は開店休業状態であるが，まだまだ面白い結果が出てきそうな分野だから，興味を持たれる方がたくさん出てくることを期待している．

先日，研究室の掃除をしていたら，S. Eilenberg から十年以上も前にもらった手紙が出てきた．そのうち散逸してしまいそうだから，直接関係はないが，（ここで述べたことに限らず）いろいろな問題についての興味を喚起する意味で付録として掲げさせていただきたい（手書きの読めない部分は，当時 Rochester に居た Prof. A.H. Stone に読んでもらったことを付記しておく[S]）．
とにかく大切なことは好奇心と情熱だという自戒の意味も込めて．

S. Eilenberg
65 ROEBUCK HOUSE
STAG PLACE
LONDON SW1E 5AA
01-828 0683

Aug 11, 1985

Dear Professor Tanaka,

Your letter of May 2 reached me with considerable delay because of my travels.

I agree with you that "good problems" in general topology are in very short supply. Most questions have negative answers and sometimes lead to interesting counter-examples. However an active field cannot live on counter-examples only!

Perhaps the cause is that general topologists have isolated themselves from nearby fields which often provide good sources of inspiration.

I was interested about finding out as much as I could about full subcategories of the category of topological spaces which are cartesian closed. The question whealther every compact space is the quotient of a compact Hausdorff space cropped up in this connection. Since the answer is negative, the matter is no longer of interest.

P.T.O.

I shall return to New York in early September and will remain there until the middle of November. Afterwards you can reach me in London.

My best greeting to you and your "general topolo-gical" collegues.

Sincerely

S. Eilenberg
Aug. 11, 1985

Dear Professor Tsuda,

Your letter of May 2 reached me with considerable delay because of my travels.

I agree with you that "good problems" in general topology are in very short supply. Most questions have negative answers and sometimes leads to interesting counter-examples. However an active field cannot live on counter-examples only!

Perhaps the cause is that general topologists have isolated themselves from nearby fields which often provide good sources of inspiration.

I was interested about finding out as much as I could about full subcategories of the category of topological spaces which are cartesian closed. The question whether every compact space is the quotient of a compact Hausdorff space cropped up in this connection. Since the answer is negative, the matter is no large of interest.

P. T. O.

I shall return to New York in early September, and will remain there until the middle of November. Afterwards you can reach me in London.

My best greeting to you and your "general topological" colleagues.

Sincerely

REFERENCES

[C] H. Cook, *Continua which admit only the identity mapping onto non-degenerate subcontinua,* Fund. Math. 60(1967), 241-249.

[E] R. Engelking, Theory of Dimensions, Finite and Infinite, Heldermann Verlag, 1995.

[L] N. Lasnev, *Continuous decompositions and closed mappings of metric spaces,* Soviet Math. Dokl. 6(1965), 1504--1506.

[K-T] K. Kawamura & K. Tsuda, U*niversal spaces for finite dimensional closed images of locally compact metric spaces*, preprint.

[S] A.H. Stone, A letter of Oct. 15, 1985, from Univ. of Rochester, U.S. A.

[T & W] K. Tsuda & S. Watson, *A universal space for closed images of rationals,* Topology & Applications 54 (1993), 65-76.

[T0] K. Tsuda, *A Black Box Left by van Douwen Inside Out,* Q & A in Gen.Top. 11(1993), 15-18.

[T1]________, *Universal spaces for closed images of σ-discrete metric spaces,* Can. Math. Bull. 37 (1994), 419-427.

[T2]________, *Completeness of metrizable pre-images of van Douwen-complete spaces,* Proc. Amer. Math. Soc., 123 (1995), 2601-2606.

[∞1] ________, *Universal spaces for 0-dimensional van Douwen-complete spaces*, preprint, 1993.

[∞2]________, *Universal spaces for closed images of σ-discrete metric spaces II, Preliminary version for circulation among friends and colleagues, 1994, July.*

[T]________ , *Universal spaces for zero-dimensional closed images of metric spaces, in preparation.*

[1] 津田光一，完備距離空間の零次元閉連続像全体に対する万有空間の存在について，ジェネラル・トポロジー　シンポジウム（愛媛大学）講演集, (1992), 1-4.

[2] ________, Lasnev 空間と完備性，ジェネラル・トポロジー　シンポジウム（埼玉大学）講演集, (1993), 1-4.

[3] ________, *Universal spaces for finite dimensional closed imgaes of locally compact metric spaces,* ジェネラル・トポロジー　シンポジウム（大分大学）講演集, (1995), 1- 5 .

（１９９６．５．３１．記）