数理解析研究所講究録
956 巻 1996 年 16-23

Kirchberg の仕事の紹介

伊藤　隆　（群馬大学・教育）

1　はじめに

題名から多くの方が連想する話は、C^*- 環の分類論であるかと思われる。が、数理研で話させていただいたとおり、Kirchberg の preprint「The classification of purely infinite C^*-algebras using Kasparov's theory」[18] の中の 2 つの主定理、Theorem A, Theorem B のうちの A の紹介を行う。

Theorem A の内容を聞いたのは、昨年（1995 年 6 月） Fields Institute であったが、Kirchberg は、その前年 1994 年の暮れの日付のついた preliminary version (手持ちのものは draft 3) の中に証明なしで、述べている。現在、Fields Institute の Lecture note [25] や Bhat, Osaka が証明を補った note [3] があるが、Kirchberg 自身が省略なしに述べたものはないと思われる。

そこで、[3], [25] 及び [23] を参考にしながら、そのアウトラインを追うことにする。[3] のコピーを送ってくれた大坂氏に感謝する。

その Theorem A とは、次の 2 つである。

Theorem A

(i) Separable C^*- 環 A が O_2 の部分 C^*- 環であるための必要かつ十分条件は、A が exact なことである。

(ii) Separable unital C^*- 環 A が、O_2 の部分 C^*- 環であり、O_2 からの条件付き期待値の range であるための必要かつ十分条件は、A が nuclear なことである。

ここで、O_2 は、2 generator の Cuntz 環。(i.e. $s_1s_1^* + s_2s_2^* = 1$ をみたす isometry s_1, s_2 で生成された C^*- 環 [8])

2　Exact C^*- 環

Exact C^*- 環の定義は、Kirchberg cf.[13] によって７０年代後半に与えられた。

Definition 1 C^*- 環 A が exact であるとは、任意の C^*- 環からなる short exact sequence (i.e. 任意の C^*- 環 B と、その閉イデアル J)

$$0 \to J \to B \to B/J \to 0$$

に対し、

$$0 \to A \otimes J \to A \otimes B \to A \otimes B/J \to 0$$

が exact であるときをいう。(i.e. カテゴリーの言葉で、functor $A\otimes$ が exact であるとき A を exact と呼ぶ。)

ここで、$\otimes$ は、minimal C^*-tensor product、$\otimes_{\max}$ を maximal C^*-tensor product とする。

Remark 2 Definition 1 で $\otimes$ を全て $\otimes_{\max}$ に置き換えると任意の C^*- 環 A で常に成立する。(i.e. $A\otimes_{\max}$ は、常に exact な functor)

定義からすぐにわかる事として、
Fact 1 Nuclear C^*- 環は、exact である。

Exact C^*- 環の最も良い性質として、
Fact 2 Exact C^*- 環の C^*- 部分環は、exact である。

Highly nontrivial な事として、
Fact 3 Exact C^*- 環の quotient は、exact である [15]。

inductive limit、直和、minimal tensor について閉じていることは、明らかだが、extension については閉じていない [14]。
定義は [1], [7], [10], [23] 等を見てもらうこととして、以下の事が知られている。

$$Nuclear \overset{(1)}{\Rightarrow} CBAP \overset{(2)}{\Rightarrow} PropertyS \overset{(3)}{\Rightarrow} Exact$$

$$Exact \Leftrightarrow PropertyC \Leftrightarrow PropertyC' \Leftrightarrow Nuclearlyembeddable$$

$$Exact \overset{(4)}{\Rightarrow} Local\ reflexive \Leftrightarrow PropertyC" \overset{(5)}{\Rightarrow} \text{任意}$$

(1) の逆が成立しない例として $C_r^*(F_n), (2 \le n \le \infty)$、(5) の逆が成立しない例として $C^*(F_n), (2 \le n \le \infty)$, $B(H)$, $C^*(SL(n,Z))(n \ge 3)$ がある。 (2), (3), (4) の逆の成立は open である。

3 Busby diagram の構成

Theorem A (i) の埋め込みを構成するために次の事実を必要とする。

Theorem 3cf.[15] A が separable exact C^*- 環ならば、O_2 の C^*- 部分環 E と E の閉イデアル D で次の (i), (ii) を満たすものが存在する。
(i) D は O_2 の essential hereditary 部分環である。
(ii) $E/D \cong A$。

これを導くために Glimm による nontype I C^*- 環の特徴付け cf.[19] —Nontype I C^*-環は、CAR- 環 M_{2^∞} を subquotient としてもつ — を O_2 に適応する。即ち

$$O_2 \supset \exists L \ \ closed\ left\ ideal;$$

$$O_2 = N(L) + L + L^*, N(L)/L \cap L^* \cong M_{2^\infty}, \text{ここで、} N(L) = \{x \in O_2 | Lx + Lx^* \subset L\}$$

さらに、Kirchberg による exact C^*- 環の特徴付け [15] — Exact C^*- 環は、M_{2^∞} の subquotient —– 即ち

$$M_{2^\infty} \supset \exists C \ \triangleright \exists J;\ C/J \cong A$$

をあわせて

$$O_2 \supset N(L) \xrightarrow{\pi} N(L)/L \cap L^* \cong M_{2^\infty} \supset C \ \triangleright J$$

を得る。そこで、

$$E = \{x \in N(L) | \pi(x) \in C\}, D = \{x \in N(L) | \pi(x) \in J\}$$

とおけばよい。

さて、このとき Brown の定理 [5] —- separable C^*- 環 A の full hereditary 部分環は、A と stable 同型 —- より $O_2 \otimes \mathbf{K} \cong D \otimes \mathbf{K}$

さらに、Zhang の定理 [20]—-Simple purely infinite C^*- 環は、unital か stable —– より $D \cong D \otimes \mathbf{K}$

よって、$D \cong O_2 \otimes \mathbf{K}$ であるから、次の Busby diagram [6], cf.[24] を得る。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & D & \overset{\alpha}{\rightarrow} & E & \overset{\beta}{\rightarrow} & A & \rightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow \sigma & & \downarrow \tau_E & & \\ 0 & \rightarrow & O_2 \otimes \mathbf{K} & \rightarrow & M(O_2 \otimes \mathbf{K}) & \overset{\pi}{\rightarrow} & M(O_2 \otimes \mathbf{K})/O_2 \otimes \mathbf{K} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Effros-Haagerup の Lifting Theorem [10] —– E が exact で D が nuclear ならば、$\beta\theta = id_A$ となる completely positive map θ が存在する —– より、この $\theta : A \longrightarrow E \subset O_2$ を $*$-homomorophism に取り替えられればよい。

さらに、short exact sequence

$$0 \ \rightarrow \ D \ \overset{\alpha}{\rightarrow} \ E \ \overset{\beta}{\rightarrow} \ A \ \rightarrow \ 0$$

が、split (i.e $\beta\gamma = id_A$ となる $*$-homomorophism γ が存在する。) することと Busby invariant τ_E が liftable (i.e. $\eta\pi = \tau_E$ となる $\eta : A \longrightarrow M(O_2 \otimes \mathbf{K})$ が存在することが同値なので、τ_E が liftable であれば、Theorem A (i) の証明は終わる。

4 Ext(D, A)

D を stable (i.e. $D \cong D \otimes K$) とする。2つの extension

$$0 \longrightarrow D \longrightarrow B_i \longrightarrow A \longrightarrow 0, \quad i = 1,2$$

に対し、Busby invariant

$$\tau_i : A \longrightarrow M(D)/D \quad i = 1,2$$

が strongly equivalent (i.e. $\tau_1 \approx \tau_2$) であるとは、$M(D) \ni u$ unitary が存在して、

$$\tau_1(x) = \pi(u)\tau_2(x)\pi(u)^*$$

であるときをいう。

$Hom(A, M(D)/D) \ni \phi, \psi$ が equivalent (i.e. $\phi \sim \psi$) であるとは、liftable な $\tau_1, \tau_2 \in Hom(A, M(D)/D)$ が存在して、

$$\phi \oplus \tau_1 \approx \psi \oplus \tau_2$$

であるときをいう。ここで、$\oplus$ は、$M(D) \ni s_1, s_2 \quad (s_1 s_1^* + s_2 s_2^* = 1)$ を用いて、

$$\tau_1 \oplus \tau_2(x) = \pi(s_1)\tau_1(x)\pi(s_1)^* + \pi(s_2)\tau_2(x)\pi(s_2)^*$$

で定義されている。

Definition 4

$$Ext(D, A) = Hom(A, M(D)/D)/\sim$$

$$Ext(D, A)^{-1} = \{Ext(D, A)\text{の}invertible\ element\text{全体}\}$$

5 KK-群, Wyle von-Neumann Th

Kasparov の Stinespring type Theorem [11] より、

$$Ext(D, A)^{-1} = \{cp - liftable\text{な}class\text{全体}\}$$

と言い換えることが出来るので、前出の Effros-Haagerup Lifting Theorem より、 $[\tau_E] \in Ext(D, A)^{-1}$ である。

さらに、

Theorem 5[12]

$$Ext(D, A)^{-1} = KK^1(D, A)$$

であり、$KK^1(D, A)$ は homotopy invariant である。

今、$D = O_2 \otimes \mathbf{K}$ であり、$O_2 \otimes \mathbf{K}$ 上 id と $id \oplus id$ は homotopic [9] (i.e. $x \sim_h s_1 x s_1^* + s_2 x s_2^* \quad \forall x \in O_2 \otimes \mathbf{K}$) なので、

$$Ext(O_2 \otimes \mathbf{K}, A)^{-1} \ni [\tau_E]$$

に対し、$[\tau_E] = [\tau_E \oplus \tau_E] = 2[\tau_E]$。よって、

$$[\tau_E] = 0$$

Remark 6 $O_n, (n \geq 3)$ のときも、$(n-1)[\tau_E] = 0$ は、全く同じ議論で得られるが、$[\tau_E] = 0$ はいえない。ここで、$n = 2$ が本質的にきいてくる。

したがって、liftable な $\tau_1, \tau_2 \in Hom(A, M(O_2 \otimes \mathbf{K})/O_2 \otimes \mathbf{K})$ が存在して、$\tau_E \oplus \tau_1 \approx \tau_2$。

τ_1 の lifting を $\hat{\tau}_1$ とし σ による E の像を C とすると $\varphi = \hat{\tau}_1 \tau_E^{-1} \pi$ は、次の Generalized Weyl-von Neumann Theorem [18] の仮定をみたす。

Theorem 7 A を separable simple purely infinite C^*- 環とし、C を separable unital な $M(A \otimes \mathbf{K})$ の C^*- 部分環であるとする。このとき、$\varphi : C \longrightarrow M(A \otimes \mathbf{K})$ が unital completely positive で $\varphi(C \cap (A \otimes \mathbf{K})) = \{0\}$ ならば、次を満たす unitary の列 $\{u_n\} \in M(A \otimes \mathbf{K})$ が存在する。

i) 任意の $c \in C$ に対し、$c \oplus \varphi(c) - u_n^* c u_n \in A \otimes \mathbf{K}$

ii) 任意の $c \in C$ に対し、$\|c \oplus \varphi(c) - u_n^* c u_n\| \to 0$

よって、unitary $u \in M(O_2 \otimes K)$ で

$$\pi(c) \oplus \pi(\varphi(c)) = \pi(u)^* \pi(c) \pi(u), \quad c \in C$$

となるものが、存在する。　このとき、

$$\pi(u)^* \tau_E(a) \pi(u) = \tau_E(a) \oplus \tau_1(a), \quad a \in A$$

となるので、

$$\tau_E \approx \tau_E \oplus \tau_1 \approx \tau_2$$

より　τ_E は liftable となり Theorem A (i) が証明された。

6　Nuclear C^*- 環

Theorem A (ii) における条件付き期待値を構成するために次の事実を必要とする。

Theorem 8cf.[15]　A が unital separable nuclear C^*- 環ならば、O_2 の左閉イデアル L で次の (i), (ii) を満たすものが存在する。

(i) $L \cap L^*$ は O_2 の essential hereditary 部分環である。

(ii) $N(L)/L \cap L^* \cong A$。

これを導くために、前出の Glimm による nontype I C^*- 環の特徴付け、即ち

$$O_2 \supset \exists L_1 \; closed\, left\, ideal;$$

$$O_2 = N(L_1) + L_1 + L_1^*, N(L_1)/L_1 \cap L_1^* \cong M_{2^\infty}, N(L_1) = \{x \in O_2 | L_1 x + L_1 x^* \subset L_1\}$$

さらに、Kirchberg による nuclear C^*- 環の特徴付け [15] 即ち

$$M_{2^\infty} \supset \exists L_2 \; left\, closed\, ideal; \; M_{2^\infty} = N(L_2) + L_2 + L_2^*, \quad N(L_2)/L_2 \cap L_2^* \cong A$$

をあわせて

$$O_2 \supset N(L_1) \xrightarrow{\rho} N(L_1)/L_1 \cap L_1^* \cong M_{2^\infty} \supset N(L_2) \longrightarrow N(L_2)/L_2 \cap L_2^* \cong A$$

を得る。

$$D = \rho^{-1}(L_2), \quad L = \overline{O_2 D}$$

とおくと、求める short exact sequence

$$0 \;\to\; L \cap L^* \;\to\; N(L) \;\xrightarrow{\beta}\; A \;\to\; 0$$

を得る。

左閉イデアル L に対応する closed projection を $q \in O_2^{**}$ とすると (i.e. $L = O_2^{**}(1 - q) \cap O_2$)、

$$N(L)/L \cap L^* \cong q O_2^{**} q \cap O_2$$

より、

$$\phi : O_2 \longrightarrow A \qquad x \longmapsto qxq$$

が定義でき、Theorem A (i) と同様にして得られる β の right inverse を θ とすると (i.e. $\beta\theta = id_A$)、求める条件付き期待値 $E(x) = \theta\phi(x)$ が得られる。

参考文献

[1] R.J Archbold and C.J.K. Batty, *C^*-tensor norms and slice maps*, J. London Math. Soc. **22** (1980), 127–138.

[2] W. Arveson, *Notes on extensions of C^*-algebras*, Duke Math. J. **44** (1977), 329–355.

[3] R. Bhat and H. Osaka, *Introduction to the classification of purely infinite simple C^*-algebras*, preprint.

[4] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Springer-Verlag, 1986.

[5] L.G. Brown, *Stable isomorphism of hereditary subalgebras of C^*-algebras*, Pacific J. Math. **71** (1977), 335–348.

[6] R.C. Busby, *Double centralizers and extensions of C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 79–99.

[7] J.D. Canniere and U. Haagerup, *Multipliears of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups*, Amer. J. Math. **107** (1985), 455–500.

[8] J. Cuntz, *Simple C^*-algebras generated by isometries*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), 173- 185.

[9] J. Cuntz, *K-theory for certain C^*-algebras*, Ann. of Math. **113** (1981), 181–197.

[10] E.G. Effros and U. Haagerup, *Lifting problems and local reflexivity for C^*-algebras*, Duke Math. J. bf 52 (1985), 103–128.

[11] G.G. Kasparov, *Hilbert C^*-module: theorems for Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Theory **4** (1980), 133–150.

[12] G.G. Kasparov, *The operator K-functor and extensions of C^*-algebras*, Math. USSR Izvestija **16** (1981), 513–572.

[13] E. Kirchberg, *The Fubini theorem for exact C^*-algebras*, J. Operator Theory **10** (1983), 3–8.

[14] E. Kirchberg, *On restricted perturbations in inverse images and a description of normalizer algebras in C^*-algebras*, J. Funct. Anal. **129** (1995), 1–34.

[15] E. Kirchberg, *On subalgebras of CAR-algebras*, J. Funct. Anal. **129** (1995), 35–63.

[16] E. Kirchberg, *On non-semisplit extensions, tensor products and exactness of group C^*-algebras*, Invent. Math. **112** (1993), 449–489.

[17] E. Kirchberg, *Commutants of unitaries in UHF algebras and functorial properties of exactness* J. reine angew. Math. **452** (1994), 39–77.

[18] E. Kirchberg, *The classification of purely infinite C^*-algebras using Kasparov's theory*, preprint.

[19] G.K. Pedersen, *C^*-algebras and their automorphism groups*, Academic Press, London, 1979.

[20] S. Zhang, *A property of purely infinite simple C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **109** (1990), 717–720.

[21] D. Voiculescu, *A non-commutative Weyl-von Neumann theorem*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **21** (1976), 97–113.

[22] S. Wassermann, *Subquotients of UHF C^*-algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **115** (1994), 489–500.

[23] S. Wassermann, *Exact C^*-algebras and related topics*, Lecture notes series **19** Global Analysis Reseach Center, Seoul Univ. 1994.

[24] N.E. Wegge-Olsen, K-theory and C^*-algebras, Oxford Univ. Press 1993.

[25] *Lectures on the classification of simple purely infinite C^*-algebras*, Fields Institute 1995.