数理解析研究所講究録
959 巻 1996 年 127-141

超越有理型函数の値分布と Newton method

— Bergweiler and Terglane の論文から —

金沢大・工　藤解和也　(Kazuya Tohge)

0.　序

ここでは、複素平面 **C** 上の超越有理型函数 u（以下 *mero.* u と記す）に関する次の３つの理論の関係について考察することを目標とする：

$$\boxed{\text{Nevanlinna Theory}} \underset{<2>}{\overset{<1>}{\rightleftharpoons}} \boxed{\text{Iteration Theory}}$$

$$\downarrow <3>$$

$$\boxed{\text{Complex Oscillation Theory}}$$

然し残念ながら、ここで可能となるのはせいぜい既知の事実のまとめ程度の雑駁な考察でしかない。そのために我々は、関係＜３＞の例示として W. Bergweiler and N. Terglane の論文 [BeT-9X]([BeT-9Y]) の概説を試み、目標への足掛かりとする。

1.　関係＜１＞

Nevanlinna Theory は、有理函数 R （以下 *rat.* R と記す）のもつ "万能な指標" $\deg R$ が、*mero.* u に対しては特性関数 $T(r,\ u)$ で実現されることを述べた理論であるといえよう。たとえば「代数学の基本定理」や Riemann-Hurwitz の定理など、$\deg R$ と "R の値分布" との関係を $\mathbf{C}_\infty := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ 内で与えている結果それぞれに、所謂 Nevanlinna の第一・第二主要定理が対応する。参考文献としては [Ha-64], [Lai-93] 等が挙げられるが、ここで簡単に主な記号と基本的な結果を列挙しておく。

定義　(特性関数 T、近接関数 m、個数関数 N、位数、除外値)

$$T(r,\ u) := m(r,\ u) + N(r,\ u) \qquad (0 \le r < \infty),$$

但し

$$m(r,\ u) \ := \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup(\log|u(re^{i\theta})|,\ 0)\,d\theta,$$

$$N(r,\ u) \ := \ \int_0^r \{n(t,\ u) - n(0,\ u)\}\frac{dt}{t} + n(0,\ u)\log r,$$

$$n(r,\ u) \ := \ [\ |z| \le r \text{内の } u \text{ の } \textit{poles} \text{ をその } \textit{multiplicity} \text{ に応じて数えた個数}\ ].$$

また、*mero./rat.* u ($\not\equiv a$) の替わりに $u_a := 1/(u-a)$ ($a \in \mathbf{C}$) を用いて得た $T(r,\ u_a)$ は簡単に $T(r,\ a)$ と書く。　同様に $T(r,\ \infty) := T(r,\ u)$ とも書く。

このとき特性関数 $T(r,\ u)$ は $\log r$ の増加凸関数で、*mero.* u では $\lim_{r\to\infty} T(r,\ u)/\log r = \infty$ で、*rat.* u のときにはこの値が $\deg R$ となる。したがって、次のような比の極限を考えると $T(r,\ u)$ が"指標"としての役割を果たす：

$$\begin{aligned} \rho(u) &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r,\ u)}{\log r} && (\ u\ \text{の}\textbf{位数}\ ), \\ \delta(a,\ u) &= \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r,\ a)}{T(r,\ u)} && (\ u\ \text{の値}\ a\ \text{に関する}\textbf{除外指数}\ ). \end{aligned}$$

定義から直ちに、$0 \le \rho(u) \le \infty$ が従う。

基本的結果 任意に固定された値 $a \in \mathbf{C}$, および値の集合 $\{a_1, \cdots, a_q\} \subset \mathbf{C}_\infty$ $(q \ge 3)$ に対して、

- $T(r,\ a) = T(r,\ \infty) + O(1) \qquad (r \to \infty) \qquad$ (**第一主要定理**) ,
- $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{q} m(r,\ a_\nu) \le 2T(r,\ u) - N_1(r) + S(r,\ u) \qquad$ (**第二主要定理**)

が成り立つ。ここに

$$N_1(r) = N(r,\ 1/u') + 2N(r,\ u) - N(r,\ u')$$

は重複点の個数関数であり、また $S(r,\ u)$ は

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{S(r,\ u)}{T(r,\ u)} = 0$$

を満たす実関数である[1]。特に $\rho(u) < \infty$ なら $\liminf$ を $\lim$ で置き換えてよい。

第一主要定理より $0 \le \delta(a,\ u) \le 1$ が、また第二主要定理からは $\{a \in \mathbf{C}_\infty \mid \delta(a,\ u) > 0\}$ は可算集合 (実際に無限集合となる例も知られている) であること及び

$$\sum_{a \in \mathbf{C}_\infty} \delta(a,\ u) \le 2 \tag{1}$$

なる *sharp* な不等式が得られる。

さて、関係＜１＞，即ち Iteration Theory [2]に向けての Nevanlinna Theory からの寄与を集めてみる。これは明らかに輸入超過であって、残念ながら次の二品目を記すことが出来るのみではなかろうか：

- 任意の $p \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ に対して、*mero.* u が (minimal) period p の periodic points を無限個もつことの証明 (cf. [Be-91], [Be-93(ii)] 他)

  ――実際に用いられるのは Nevanlinna Theory でなく、整函数については Wiman-Valiron method、それ以外の場合には pole(s) についての考察と Picard の「大」定理。

[1] 実際には、１次元 Lebesgue 測度が有限な或る集合を除いて、$\limsup$ でよい。
[2] 用いる記号は、全て諫山氏の part の定義に従う 。

- $J(u) = \overline{\{\text{repelling periodic points of } u\}}$ (closure) についてのSchwickの別証([Sc-9X])。

  —ここでも重要な役割の半分以上はZalcmanの定理が演じている。

いずれも *rat.* Rについてはその存在が自明な或る種の点，または値を、*mero.* uについてもある程度の個数が存在することの証明を与える，という種類の寄与である。

2．関係＜2＞

こちら向きの取り引き表の作成には労力を必要とせず、W. Bergweiler, A.(E.) Eremenko, A. Hinkkanen, J. K. Langley, W. Schwick 等の名を挙げておけばよいであろう。それでも敢えて Newton function

$$f(z) := z - \frac{u(z)}{u'(z)}$$

について述べ、以下の噺の枕とする。

この函数fの iterates から u の零点を見つけ出すというのが Newton method であるから、u の "値分布" を調べる際に (*mero./rat.*) f を考察するのは至極自然である。基本的な対応は次の通り：

Table: Correspondence of value distribution of u and f

	a meromorphic function u	the Newton function $f = z - u/u'$
(I)	a zero of u of multiplicity $m \geq 2$	an attracting fixed point of f of multiplier $1 - 1/m \geq 1/2$
(II)	a simple zero of u	a super-attracting fixed point of f
(III)	a pole of u of multiplicity $m \geq 1$	a repelling fixed point of f of multiplier $1 + 1/m \leq 2$
(IV)	either a simple zero of u or a zero of u'' with $uu' \neq 0$	a critical point of f, i.e. a zero of f'
(V)	a zero of u' of multiplicity $k \geq 1$ with $u \neq 0$	a pole of f of multiplicity $k \geq 1$

ここで、全て有限な点のみ考慮されていることに注意。また翻訳されているのは固定点についてのみであって、周期点に対応する言葉は良く判らない。

Nevanlinna Theory において、*mero.* u の derivatives $u^{(n)}$ の零点分布は重要な研究対象の一つである。ここで Newton function を用いて次の命題を証明しよう。これは Langley [Lan-93] によって証明された Hayman 予想の部分的結果となっている。(cf. [To-9X].)

命題　位数有限な *mero.* u が、その二階導函数 u'' とともに零点を有限個しか持たないならば、それは３つの多項式 p_j $(1 \leq j \leq 3)$ を用いて

$$u(z) = \frac{p_1(z)}{p_2(z)} \exp\{\, p_3(z) \,\} \tag{2}$$

と表現される[3]。

このためには次の二つの重要な結果を利用しなければならない。一つめは有名な Denjoy-Carleman-Ahlfors の定理の拡張である:

補助定理 A (Bergweiler-Eremenko [BeE-95]) 有限な位数 ρ をもつ *mero.* f が、*critical values* を有限個しか持たなければ、f の *asymptotic values* の個数は高々 2ρ 個である。

二つめは "a logarithmic change of variable" (cf. [ELy-92], [Be-93(ii)]) を用いて示された次の結果である：

補助定理 B ([Be-95]) もし *mero.* f が $f(0) \neq \infty$ を満たし、かつ その有限な *critical* 及び *asymptotic values* が有界集合を成していれば、f の極以外の全ての $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$|f'(z)| \geq \frac{|f(z)|}{2\pi|z|} \log \frac{|f(z)|}{R}$$

が成り立つような $R > 0$ が存在する。

(命題の証明) もし Newton function f が *rat.* であれば、u が求める形で表されることは容易に判る。以下、f は *mero.* と仮定する。今 Table–(IV) から、f は高々有限個の critical points, それ故高々有限個の critical values しか持ち得ない。補助定理 A から、このとき f の asymptotic values の個数もまた有限である。さらに、補助定理 B を用いて f の固定点の個数についてもその有限性を導くことが出来る。このとき Table–(I–III) に注意すると、u が有限な位数を持ち、zeors も poles も高々有限個しか持たない有理型函数であることが判る。このとき、f は決して *mero.* となることはないので証明が終わる。□

3. 関係＜3＞

前節の命題は、Langley [Lan-93] によって位数の制限無しで示されている。この証明には、微分方程式論からの結果が中心的な役割を演じている。Nevanlinna 理論における極値問題はしばしば

$$w'' + A(z)\, w = 0, \qquad A\ mero./rat$$

という形の微分方程式の解についての問題に帰着される。[Lan-93] の場合もそうであるし、また不等式 (1) の極値問題もまた同様である。実際、後者の場合には関数 $N_1(r)$ の増大度は $T(r,\ u)$ のそれに比べて極めて小さい[4]。即ち、u' の零点及び u の二重以上の極が "殆ど" 存在しない。このことは、u の Schwarzian derivative $\{u,\ z\} = \left(\frac{u''(z)}{u'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{u''(z)}{u'(z)}\right)^2$ の

[3] ここで注目すべきは、極については何ら仮定されていないにも拘らず、結果的に u は極を有限個しか持ち得ないという事実である。

[4] 不等式 (1) の等号成立と $N_1(r)$ の増大度との関係については [E-94] を参照のこと。

singularities が "殆ど" 存在しないことを示している。上記の微分方程式と $\{u,\ z\}$ の関係は良く知られている[5]。

係数 $A(z)$ が *rat.* あるいは超越整函数であるとき、この微分方程式の解 w についてはかなりのことが知られている。特に後者の場合にその零点の frequency に関する研究, Complex Oscillation Theory が盛んである（例えば [Lai-93] を参照)。ここでは $A=R$, *rat.* の場合について基本となる結果のいくつかを挙げておく。

以下 R は *rat.* で $R\not\equiv 0$、また微分方程式

$$w''+R(z)\,w=0, \tag{3}$$

は *mero.* u を解に持つときのみ考える (が、より一般の場合にも成立する性質も含まれている)。この仮定の下

$$R(z)\neq O\left(\frac{1}{z^2}\right),\qquad z\to\infty$$

であり、ここでは

$$R(z)\sim a_m z^m,\qquad a_m\neq 0,\quad m\geq -1 \tag{4}$$

と書いておく。またこのとき直ちに

- $\rho(u):=\rho=\frac{m+2}{2}$
- $\sharp\{\text{poles of } u\}<\infty$

が従う (cf. [Lai-93])。特に $c^{m+2}=-\rho^2/a_m$ とおき $u(z)$ の替わりに $u(cz)$ を考えることで

$$R(z)\ \sim\ -\rho^2 z^m,\qquad z\to\infty,\quad m\geq -1 \tag{5}$$

とできる。このとき u の挙動は Hille [Hi-27, Hi-76] によって調べられている：

任意に固定された $\varepsilon\in(0,\ \pi/(m+2))$ に対して、sectors

$$S_j=\left\{z\ :\ \left|\arg z-\frac{2\pi j}{m+2}\right|<\frac{\pi}{m+2}-\varepsilon\right\}\qquad (j=0,\,1,\,\cdots,m+1)$$

を考える。このとき或る $\varepsilon_j\in\{-1,\,1\}$ について、各 S_j $(j=0,\cdots,m+1)$ 内で一様に

$$\log u(z)\ \sim\ \varepsilon_j\, z^{(m+2)/2}\ =\ \varepsilon_j\, z^{\rho},\qquad z\to\infty$$

となる。特に

$$u(z)\to\begin{cases}0, & z\to\infty \text{ in } S_j\quad (\text{以下 type } 0 \text{ という})\\ \infty, & z\to\infty \text{ in } S_j\quad (\text{以下 type } \infty \text{ という})\end{cases}$$

[5] R. L. Devaney and L. Keen [DKe-89] は $\{F,\ z\}$ が 多項式であるような *mero.* F の dynamics を詳細に調べている。その第1節に、この関係についての簡単な記述が見られる。

であり、もし S_j が type 0 ならば隣り合う二つの sectors S_{j-1}, S_{j+1} ($S_{-1} = S_{m+1}$, $S_{m+2} = S_0$) は必ず type ∞ である。いま

$$p := \sharp\{ j \, : \, S_j \text{ は type } 0, \quad 0 \leq j \leq m+1 \},$$

$$q := \sharp\{ j \, : \, S_j \text{ は type } \infty, \quad 0 \leq j \leq m+1 \}$$

とおくと

$$p + q = m + 2, \qquad p \leq q$$

である。

以上を Nevanlinna Theory の用語で表現すると

- $T(r, u) \sim m(r, \infty) \sim \dfrac{q}{\pi\rho} r^{\rho}, \quad r \to \infty,$

  — もちろんこれより $\rho(u) = \rho = (m+2)/2$ が従う。

- $m(r, 0) \sim \dfrac{p}{\pi\rho} r^{\rho}, \quad r \to \infty,$

このことより

$$\delta(0, u) = \frac{p}{q} = \frac{p}{m+2-p} = \frac{p}{2\rho - p}. \tag{6}$$

が得られる。

「$\delta(0, u) < 1$」は u の零点の frequency が大きいことを示している。一般に "p" についての情報を得るのは困難であり、寧ろ p は上記の等式 (6) により整数 m と $\delta(0, u)$ を用いて得られると考えるほうがよい。したがって、p から零点の frequency を知る試みは断念せざるを得ない。

そこで我々は、この目的のために Newton method の適用を考えることにする。今の場合、状況は極めて有望である。

注意 1 　点 $z_0 \in \mathbf{C}$ が 3) の解 u の零点であるとき、その点の近傍において $f^n(z) \to z_0$ $(n \to \infty)$ である。更に $R(z_0) \neq \infty$ ならば、それは u の一位の零点である。よって z_0 は

$$f' = \frac{u''u}{(u')^2} = -R\left(\frac{u}{u'}\right)^2$$

の二位以上の零点である。従って

$$f(z) = z_0 + O\left((z - z_0)^3\right), \qquad z \to z_0.$$

通常は Newton method の一位の零点 z_0 への収束は、少なくとも 2 次の order ということしか分からない。また u の二位以上の零点は、f の (not super) attracting fixed point であった (cf. Table–(I)) から、1 次の収束となりこれは上手くない。しかしながら今の場合、このような点は R の極として高々有限個存在するのみである。この意味で一般の *mero.* u に対するより、微分方程式 (3) の解 *mero.* u の local behavior は好ましい状況にあるということが出来るのである。

実は、R の全ての有限な零点（つまりは f の super-attracting fixed points ではない critical points ）の orbits が極めて都合のよいものとなっているときには、global aspects についてもその状況は極めて好もしい。

定理 1 ([BeT-9X]) R は (5) を満たす *rat.* で、その有限な零点は

$$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_N$$

であるとする。u は (3) の *mero.* な解、f は u の Newton function である。もし、$u(z) \neq e^{az+b}$ ($a,\ b \in \mathbf{C}$) でかつ

$$\exists \lim_{n\to\infty} f^n(z_j) \in \mathbf{C} \qquad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$$

であれば、或る *open dense subset of* $\mathbf{C}$ 上で

$$\exists \lim_{n\to\infty} f^n(z) \in \{\, \mathit{zeros\ of}\ u \}$$

となる。

この定理に "p" の情報を含む次の結果を合わせると、$\delta(0,\ u)$ を上から評価することが可能になる。

定理 2 $R,\ u,\ f$ は定理 1 で述べられたもの、p は (6) によって定義される整数とせよ。もし $u(z) \neq e^{az+b}$ ($a,\ b \in \mathbf{C}$) であれば、$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ N,\ \ \rho = (m+2)/2$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f^n(z_k)|^\rho}{n} = 1$$

を満たすような R の p 個の有限な零点 $z_1,\ \cdots,\ z_p$ ($z_j \neq z_j,\ i \neq j$) が存在する。特に

$$\lim_{n\to\infty} |f^n(z_k)| = \infty$$

である。

この結果もまた [BeT-9X] で与えられたものであり、定理 1 の証明に類似したアイデアを用いて示されている。ここではその証明を与えることはしない ([BeT-9X, § 7])。この節のまとめとして、二つの系をのべておく (cf. [BeT-9X])。証明は不要である。

系 1 定理 1 の仮定のもとに、$\delta(0,\ u) = 0$ が従う。

系 2　$R \not\equiv 0$ は (4) を満たし、u は (3) の *mero.* なる解とする。もし R が 相異なる有限な零点を k 個しか持たず、かつ k は

$$k < \frac{m+2}{2}$$

を満たすとき

$$\delta(0,\ u) \leq \frac{k}{m+2-k} < 1$$

となる。

例　$R(z) = -z^m$ $(m \geq 1)$ のとき $\delta(0,\ u) \leq \frac{1}{m+1}$ である。（このように簡単な係数を持つ微分方程式 (3) であっても、その解の零点分布を調べることは容易ではない。）

4．　定理１の証明 —— 基本的な性質のまとめ

まず準備として、u と f との対応関係をそれぞれが満たす微分方程式でみると、

a meromorphic function u	the Newton function $f = z - u/u'$
$u'' + R(z)\,u = 0$	$f' + R(z)\,(f-z)^2 = 0 \ \cdots$ (RE)

となる。上記の Riccati equation (RE) の一般（ Newton functions に制限しない）解 f についての Iteration は [BeT-9Y] で詳しく調べられている。ここで簡単にその f が持っている性質をまとめておく：

- 性質１：　高々有限個の点を除くと

  a critical point of f = a super-attracting fixed point of f.

  故に、$F(f)$ の periodic components 内にない critical points は高々有限個で、それらはすべて R の有限な零点である。

- 性質２：　$\rho(f) \leq \dfrac{m+2}{2}$　$(m \geq -1)$

  [今の場合 $\rho(f) \leq \rho(u)$ なのでこれは明らか。]

- 性質３：　f は *rat.* でなければ、fixed points を無限個もつ。

  [Newton function f に限って示す。Table–(I–III) と位数有限性により、もし f が fixed points を高々有限個しかもたなければ u は命題の (2) のような形となり、それ故 f は *rat.* である。]

- 性質4： <u>f は有限な asymptotic value をもたない。</u>

  (証明 [BeT-9Y]**)** $f(z) \to \alpha \in \mathbf{C}$ （$z \to \infty$ on some curve γ）とする。$R(z) \sim a_m z^m$, $z \to \infty$ より

  $$f'(z) \sim a_m z^{\rho+2} \qquad (z \to \infty \text{ on } \gamma.)$$

  ここで $\rho(f) < \infty$ なる *mero.* f に対する Gundersen [Gu-88] の評価式より

  $$|f'(z)/f(z)| \le {r_n}^{\rho(f)-1+\varepsilon}, \qquad |z| = r_n \nearrow +\infty \quad (\varepsilon > 0)$$

  となるので、不合理である。□

- 性質5： <u>f は wandering domains をもたない。</u>

  [性質5の証明もやはり Sullivan [Su-85] に倣って議論されている (cf. [Ba-84, BaKoLu-92, Be-93(i), ELy-92, Goke-86, St-91] ほか)。上記のように $sing(f^{-1})$ で periodic components 内に無いものは高々有限個であるから、例えば Baker による別証に於いて変更すべきは、Lipschitz continuity を用い「或る wandering domain V に対して $f^n(V)$ はすべて単連結であると仮定してよい」と主張する辺りであろう。Bergweiler-Terglane は Shishikura [Sh-90] の方法を転用して、多重連結な wandering domains と weakly repelling fixed points との関係を導きこれに代えている (cf. [BeT-9Y])。]

更に Sullivan の方法を、[BeT-9X] では Baker domains の cycles と $sing(f^{-1})$ との関係（勿論 (RE) の *mero.* な解 f に限る）を導くためにも利用した。

注意 2　*Period l の periodic component U* (i.e., $f^l(U) \subset U$) が <u>*Baker domain*</u>(, essentially parabolic domain at z_0 [BaKoLu-91, Theorems 2.2, 2.3]) であるとは、

$$\exists\, z_0 \in \partial U \textit{ s.t. } f^{nl}(z) \to z_0 \textit{ for } z \in U \textit{ as } n \to \infty \textit{ but } f^l(z_0) \textit{ is not defined}$$

が満たされるときをいう。従って $\exists j \in \{0, \cdots, l-1\}$ *s.t.* $f^j(z_0) = \infty$。

定理 3 ([BeT-9X])　(RE) の *mero.* な解 f について、U が *period l* の *Baker domain* であるとき、その *cycle* $\{U, U_1, \cdots, U_{l-1}\}$ についての和集合

$$\bigcup_{j=0}^{l-1} U_j \qquad (U_0 = U)$$

には f の *critical* 或は *asymptotic value* が含まれている。

Sullivan [Su-85] の論法を考慮して、

定理 4 ([BeT-9X])　f は *mero.* で、その *K-q.c. deformations* の成す族が高々有限個の *parameters* にのみ依るのであれば、定理 3 の結論が成り立つ。

が証明されればよい。但し、[Su-85] で wandering annuli は別扱いしたように、ここでも勿論 二重連結な Baker domains は分けて考えなければならない。

Lemma 1 ([BeT-9X]) *Period l の二重連結な Baker domain U をもつ mero. f に対し、定理 3 の結論が成り立つ。*

注意 3 $l = 1$, 即ち *invariant Baker domain* は、*critical* または *asymptotic values* を含む含まざるにかかわらず、その *connectivity* は 1 または ∞ である (cf. [BaKoLu-91, Theorem 3.1])。しかしながら *mero.* f に対して、$l \geq 2$ のときにはこれは必ずしも成り立たない (cf. [Be-93(ii), § 4])。理由は *asymptotic values* の存在にあった。

さて、Sullivan [Su-85] の Propositions 3 and 4 を次のように読み替える (敢えて [BeT-9X] の英文のまま)：

Proposition A (=Proposition 3) *If S is a hyperbolic Riemann surface of infinite topological type, then there are arbitrarily large dimensional families of hyperbolic structures so that each pair of structures in the family is quasi-conformally (even quai-isometrically) isomorphic.*

Proposition B *Let f be a transcendental meromorphic function and let U be a component of $F(f)$. Suppose that the U_i are not doubly-connected and do not contain critical or asymptotic values of f, for all $i \geq 0$. Then either*
1) from some n on, U_{n+i} has finite topological type and for each $i \geq 0$ the mapping $f : U_{n+i} \to U_{n+i+1}$ is a conformal bijection
or
2) the direct limit U_∞ of $f : U_i \to U_{i+1}$, $i \geq 0$, exists and has infinite topological type.

(定理 4 の証明) $\{U_0, \cdots, U_{l-1}\}$ は period l の Baker domains が成す cycle で、$\bigcup_{j=0}^{l-1} U_j$ には f の critical values も asymptotic values も含まれないと仮定する。Lemma 1 により U_j はいずれも doubly-connected ではないと仮定できる。

まず Proposition B の 1) が成り立つとせよ。或る U_i ($0 \leq i \leq l-1$) が、それ故全ての U_j が multiply connected であるとき、次の結果 (例えば、[HuC-64, p. 583] を参照)：

- Domain U の connectivity が有限かつ 3 以上であれば、U の conformal automorphisms の個数は有限。

を用いて、iterates ($f^{nl}|_U$) は eventually periodic, 即ち

$$\exists m, \exists n \ (m > n) \quad \text{s.t.} \quad f^{ml}|_U = f^{nl}|_U$$

が得られる。このとき $f^{(m-n)l}|_U = \mathrm{id}|_U$ であるが、*mero.* f はこれを満たさない。一方、全ての $U_0, \cdots, U_{l-1}$ が simply-connected であれば、 [Su-85] から決して定理 4 の仮定は満たされないことが示される。

次に、Proposition B の 2) が成り立つ場合を考えるが、これは Proposition A を $S = U_\infty$ に適用することで再び仮定が否定される。□

(定理 3 の証明) このためには次の事実が示されればよい：

- 定理 1 の仮定を満たす $R(z)$ に対し、(RE) の解 *mero.* f の K-q.c. deformations が成す族は、高々有限個の parameters にしか依らない。

実際、Φ が $0, 1, \infty$ を fix する $\mathbf{C}_\infty$ の K-q.c. self-mapping で、$f_\Phi = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ が *mero.* である, 即ち f の K-q.c. deformation であるとすれば、

- *mero./rat.*
$$F_\Phi\,(z) := \frac{(f_\Phi)'(z)}{\{\,f_\Phi\,(z) - z\,\}^2} \tag{7}$$
は、$R(z)$ と重複度を込めて同数個の零点と極をもち；
- $$\frac{1}{K}\rho(f) \leq \rho\,(f_\Phi) \leq K\,\rho(f)$$
を満たす。

前者は明らかなので、後者の結果を簡単に示しておく。二番目の不等式だけ示せば十分である。

いま $a = 0, 1, \infty$ に対して $\Phi\,(f^{-1}(a)) = {f_\Phi}^{-1}(a)$ で、Φ は ∞ に於いて $1/K$-Hölder continious であるので

$$\begin{aligned} |\Phi\,(z)| &= O(|z|^K), \\ |\Phi^{-1}(z)| &= O(|z|^K), \qquad z \to \infty. \end{aligned}$$

従って $n(r,\ 1/(f_\Phi - a)) \leq n\Big(O(r^K),\ 1/(f-a)\Big)$ $(r \to \infty)$ より[6]

$$N\left(r,\ \frac{1}{f_\Phi - a}\right) \leq \frac{1}{K} N\left(O(r^K),\ \frac{1}{f-a}\right) + O(\log r), \quad r \to \infty$$

となる。それ故、第二, 続いて第一主要定理を適用することで

$$\begin{aligned} \{\,1 - o(1)\,\}\,T\,(r,\ f_\Phi) &\leq N\left(r,\ \frac{1}{f_\Phi}\right) + N\left(r,\ \frac{1}{f_\Phi - 1}\right) + N\,(r,\ f_\Phi) \\ &\leq \frac{3}{K} T(O(r^K),\ f) + O(\log r), \qquad r \to \infty^7 \end{aligned}$$

[6] また $n\,(0,\ 1/(f_\Phi - a)) = n\,(0,\ 1/(f-a))$ である。

を得る。よって
$$\rho(f_\Phi) \leq \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\log T(O(r^K),\ f)}{\frac{1}{K}\log O(r^K)} = K\,\rho(f).$$
$\rho(f_\Phi) < \infty$ さえ分かれば、一番目の不等式も同様に得られる。□

以上により $F_\Phi(z)$ は

- $\deg R_\Phi = \deg R$
- $\deg P_\Phi \leq \left[\frac{K}{2}(m+2)\right]$　　(Gauss 記号)

を満たすような *rat.* R_Φ と多項式 P_Φ を用いて、
$$F_\Phi(z) = R_\Phi(z)\exp\{\,P_\Phi(z)\,\}$$
と表される。このとき (7) を満たす *mero.* f_Φ の全体が成す族は、有限個の parameters にしか依存しない。□□

5. 定理1の証明 —— 本論

まず、$f\in$ Möb. $\cup\,\mathbf{C}$ (即ち高々一次分数式) となる場合について調べる。このとき容易に $R\equiv 0$ ($f\in\mathbf{C}$ のとき)、または *rat.* u 或は $u(z)=e^{az+b}$ (対応して $f=(\alpha z+\beta)/(\gamma z+\delta)$ のとき $\gamma=0$ 或は $\gamma\neq 0$) が導かれる。

以下 f は *rat.* かつ $\deg(f)\geq 2$, または *mero.* としてよい。既に性質3で見た通り、このときには f は wandering domains を持たないので、考察の対象を periodic components of $F(f)$ にしぼって構わない。そこで、任意に period l をもつ $F(f)$ の periodic cycle of components $C=\{\,U_0,\cdots,U_{l-1}\,\}$ を一つ選んで固定する。

f^{-1} の singularity について考える。まず、性質4からそれは必ず f の critical value である。もし ∞ が f の critical point であったとすれば、f は *rat.* で
$$R(z) = \frac{-f'(z)}{(\,f(z)-z\,)^2} = o\left(\frac{1}{z^2}\right) \not\sim a_m\,z^m, \qquad m\geq -1$$
となり矛盾。よって Table–(IV), (II) から、f の critical points のうちで u の零点に attract されない可能性を残すのは、R の有限な零点 $z_1, z_2, \cdots, z_N$ に限ることが判る。これらの点の orbits については
$$\exists \lim_{n\to\infty} f^n(z_j) =: \zeta_j \in \mathbf{C} \qquad (\,j=1,2,\cdots,N\,) \tag{8}$$
を仮定していた。そこで f^{-1} の singularities と periodic components との関係 (cf. [Be-93(ii), Theorem 7]):

- C が Siegel discs または Herman rings の cycle ならば
$$\partial U_i \subset \overline{O^+(\,sing(f^{-1})\,)} \qquad (i=0,\cdots,l-1)$$

と合わせて、C は Baker domains のなす cycle, (super-)attracting cycle, parabolic cycle の何れかであることが従う。定理 3 及び良く知られた結果 ([Be-93(ii), Theorm 7]) から、f の critical value それ故 critical point が $\cup_{j=0}^{l-1} U_j$ のなかに含まれていることがわかる。それが f の super-attracting fixed point である場合には、勿論定理 1 の結論が成立する。今これが R の有限な零点、即ち

$$\exists k\ (1 \leq k \leq N) \quad \text{s.t.} \quad z_k \in \bigcup_{j=0}^{l-1} U_j$$

である場合について考える。また ζ_k は (8) で定義された点とする。

[1] C が attracting cycle であるとき：

このとき U_j $(j \in \{0, \cdots, l-1\})$ に含まれる periodic point p_j に対して

$$f^{nl}|_{U_j} \to p_j \quad \text{as } n \to \infty \tag{9}$$

であるから、直ちに $l = 1$ かつ $p_j = \zeta_k$ は f の super-attracting fixed point が従い証明が終わる。

[2] C が parabolic cycle であるとき：

このとき ∂U_j $(j \in \{0, \cdots, l-1\})$ 上の periodic points p_j, $(f^l)'(p_j) = 1$, に対し (9) となり、再び $p_j = \zeta_k$ が従う。即ち

$$f^{nl}|_{U_j} \to \zeta_k \quad \text{as } n \to \infty \quad (j \in \{0, \cdots, l-1\}).$$

点ζ_kは f の定義域内にあるから、f の fixed point となりかつ $f'(\zeta_k) = 1$ $(l = 1)$ でなければならない。しかしながら Table–(I–III) よりこれは不合理であることがわかる。

[3] C が cycle of Baker domains であるとき：

この場合には或る $j \in \{0, \cdots, l-1\}$ に対して

$$f^{nl}|_{U_j} \to \infty \quad \text{as } n \to \infty$$

でなければならず、$\zeta_k \in \mathbf{C}$ からこれは起こり得ない。

以上で $f^n(z)$ が全ての $z \in F(f)$ について u の零点に収束することが示された。

最後に $F(f) \neq \emptyset$ を示せばそれが求める an open dense subset of $\mathbf{C}$ となる。u は零点を持つ場合を考えているのでこれは明らかである。 □

参考文献

[Ba-84] I. N. Baker, Wandering domains in the iteration of entire functions, *Proc. London Math. Soc.* (3) **49** (1984), 563–576.

[BaKoLu-91] I. N. Baker, J. Kotus, and Y. Lü, Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* **11** (1991), 603–618.

[BaKoLu-92] I. N. Baker, J. Kotus, and Y. Lü, Iterates of meromorphic functions IV: Critically finite functions, Results Math. **22** (1992), 651–656.

[Be-91] W. Bergweiler, Periodic points of entire functions: Proof of a conjecture of Baker, *Complex Variables Theory Appl.* **18** (1991), 57–72.

[Be-93(i)] W. Bergweiler, Newton's method and a class of meromorphic functions without wandering domains, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.* **13** (1993), 231–247.

[Be-93(ii)] W. Bergweiler, Iteration of meromorphic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **29** (1993), 151–188.

[Be-95] W. Bergweiler, On the zeros of certain homogeneous differential polynomials, *Arch. Math.* **64** (1995), 199–202.

[BeE-95] W. Bergweiler and A. Eremenko, On the singularities of the inverse of a meromorphic function of finite order, *Rev. Mat. Iberoamericana* **11** (1995), 355–373.

[BeT-9X] W. Bergweiler and N. Terglane, On the zeros of linear differential equations of the second order, *Preprint.*

[BeT-9Y] W. Bergweiler and N. Terglane, Weakly repelling fixpoints and the connectivity of wandering domains, *to appaer in Trans. Amer. Math. Soc.*.

[DKe-89] R. L. Devaney and L. Keen, Dynamics of meromorphic maps: maps with polynomial Schwarzian derivative, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* (4) **22** (1989), 55–79.

[E-94] A. Eremenko, Meromorphic function with small ramification, *Indiana Univ. Math. J.* **42** (1994), 1193–1218.

[ELy-92] A. E. Eremenko and M. Yu. Lyubich, Dynamical properties of some classes of entire functions, Grenoble **42**, *Ann. Inst. Fourier* 4 (1992), 989–1020.

[F-20] P. Fatou, Sur les équations fonctionelles, *Bull. Soc. Math. France* **47** (1919), 161–271. [**48** (1920), 33–94, 208–314.]

[F-26] P. Fatou, Sur l'itération des fonctions transcendantes entières, *Acta Math.* **47** (1926), 337–370.

[Goke-86] L. R. Goldberg and L. Keen, A finiteness theorem for a dynamical class of entire functions, *Ergd. Th. and Dynam. Sys.* **6** (1986), 183–192.

[Gu-88] G.G. Gundersen, Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates, *J. London Mat. Soc.* (2) **37** (1988), 88–104.

[Ha-64] W. K. Hayman, *Meromorphic functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[Hi-27] E. Hille, Zero point problems for linear diferential equations of the second order, *Mat. Tidsskrift B* no. **2** (1927), 25–44.

[Hi-76] E. Hille, *Ordinary differential eauations in the complex domain*, Wiley and Sons, New York, London, Sydney, Toronto 1976.

[HuC-64] A. Hurwitz and R. Courant, *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen,* 4th ed., Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York 1964.

[Lai-93] I. Laine, *Nevanlinna theory and complex differential equations*, de Gruyter, Berlin, New York 1993.

[Lan-93] J. K. Langley, Proof of a conjecture of Hayman concerning f and f'', *J. London Math. Soc.* (2) **48** (1993) 500–514.

[Mu-71] E. Mues, Über eine Vermutung von Hayman, *Math. Z.* **119** (1971), 11–20.

[Sc-9X] W. Schwick, Repelling periodic points in the Julia set, *to appear in Bull. London Math. Soc.*.

[Sh-90] M. Shishikura, The connectivity of the Julia set and fixed point, *preprint IHES/M/90/37, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1990.*

[St-91] G.M. Stallard, A class of meromorphic functions with no wandering domains, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **16** (1991), 401–418.

[Su-85] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I: Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, *Ann. Math.* **122** (1985), 401–418.

[To-9X] K. Tohge, Meromorphic functions which share the value zero with their first two derivatives, I and II, *to appear in Complex Variables* and *preprint*.