数理解析研究所講究録
959巻 1996年 59-72

Rational Semigroupにおける,
安定領域での極限関数 と、
Julia 集合の連続性

京都大学大学院　人間・環境学研究科　　　角 大輝 (Hiroki Sumi)

1995年11月

Abstract

End$\overline{\mathbb{C}}$ のsubsemigroupの力学系を考える。Julia 集合, Fatou 集合 等を定義し、その基本的性質を調べる。それらは、[HM1] において考えられており、例えば、Julia 集合がrepelling fixed points の閉包であること等が知られている。ここでは、安定領域における極限関数について考え、また、parameterつきの 有限生成半群において、Julia 集合が自己相似集合になるとき、連続に動くこと等をみる。

1 Introduction

End$\overline{\mathbb{C}}$, End$\mathbb{C}$のsubsemigroupを、それぞれ*rational semigroup, entire semigroup*とよぶ。ただし、定数写像は含まないとする。

Definition 1. 1 Gをrational semigroupとする。

$$F(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid G\text{は}z\text{のある近傍で正規族}\}$$

$$J(G) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathbb{C}} \setminus F(G)$$

それぞれGの*Fatou* 集合, *Julia* 集合という。entire semigroupについても同様。

Definition 1. 2 Gをrational semigroupとする。

$$O^{-}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \overline{\mathbb{C}} \mid \text{ある}g \in G\text{があり } g(w) = z\}$$

$$E(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \sharp O^{-}(z) \leq 2\}$$

Definition 1. 3 Gをrational semigroup, Hをそのsubsemigroupとするとき、

Hが *finite index* とは、 ある$g_1, \ldots, g_n \in G$ があって、$G = \cup_{i=1}^{n} g_i H$ となるときをいう。

Hが *cofinite index* とは、ある$g_1, \ldots, g_n \in G$ があって、任意の$g \in G$ に対し、あるjがあり$g_j g \in H$ となるときをいう。

Lemma 1. 1 Gをrational semigroupとする。

1. 任意の$f \in G$に対し、

$$f(F(G)) \subset F(G),\ f^{-1}(J(G)) \subset J(G)$$

$$F(G) \subset F(\langle f \rangle),\ J(\langle f \rangle) \subset J(G)$$

2. $G = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$が有限生成のとき、

$$F(G) = \cap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(F(G)),\ J(G) = \cup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(J(G))$$

Proof　2をいう。1より、

$$F(G) \subset \cap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(F(G)).$$

$z_0 \in \cap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(F(G))$をとる。$w_j = f_j(z_0) \in F(G)$とおく。
任意の$\epsilon > 0$に対し,あるδがあり、$g \in G, 1 \leq j \leq n, d(w, w_j) < \delta$ならば、

$$d(g(w), g(w_j)) < \epsilon.$$

このδに対し、ある$\eta > 0$があり、$d(z, z_0) < \eta$ならば、

$$d(f_j(z), f_j(z_0)) < \delta, j = 1, \ldots, n$$

となる。ゆえ、$g \in G, 1 \leq j \leq n, d(z, z_0) < \eta$ならば、

$$d(gf_j(z), gf_j(z_0)) < \delta.$$

$G = \cup_{j=1}^{n} G \circ f_j$,ゆえ、z_0でGは同等連続。ゆえ、

$$\cap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(F(G)) \subset F(G). \quad \square$$

Lemma 1. 2　*1.* $H \subset G$がfinite indexまたはcofinite indexならば、

$$J(H) = J(G)$$

とくにGが有限生成のとき、生成系を固定して、H_mをGのm個の生成元の積でかける元で生成された半群、とおくと

$$J(H_m) = J(G)$$

$\overline{H_m}$をGのword length mの元で生成された半群、とおくと

$$J(\overline{H_m}) = J(G).$$

ここで元gのword lengthとは　$g = f_{j_1} \circ \cdots \circ f_{j_l}$, ただし$f_{j_r}$は生成元　とかける$l$の最小をいう。

2. $\sharp J(G) \geq 3$ ならば、$J(G)$ は完全集合。

3. ある$g \in G$ があり、$\deg(g) \geq 2$, または、ある $g \in G$ があり、$\deg(g) = 1$, かつgの位数が∞ ならば、

$$E(G) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \sharp O^-(z) < \infty\}, \sharp E(G) \leq 2$$

4. $z \notin E(G)$ ならば、任意の$x \in J(G)$ について,$O^-(z)$ はxに集積する。とくに$z \in J(G) \setminus E(G)$ ならば、

$$\overline{O^-(z)} = J(G)$$

5. ある$g \in G$ があり、$\deg(g) \geq 2$, または、

ある $g \in G$ があり、$\deg(g) = 1$, gの位数は∞, かつ$\sharp J(G) \geq 3$ ならば、

$J(G)$ は*3*点を含む ***backward invariant closed set*** のうち最小。ここで、集合A が ***backward invariant*** とは、任意の$g \in G$ に対し, $g^{-1}(A) \subset A$ が成り立つときをいう。

6. $\sharp J(G) \geq 3$ ならば、

$$J(G) = \overline{\{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \text{ある} g \in G \text{があり} z \text{は} g \text{の repelling fixed point}\}}$$

Proof [HM1] による。

1 は、正規性と同等連続性の同値より。

2 については、ある$b \in J(G)$ が孤立点, とすると、bのある近傍Uがあり、$U \setminus \{b\} \subset F(G)$. このとき、$U \setminus \{b\}$ でG は3点をとらない。ゆえ [C] より、UでGは正規族. よって矛盾。

3 は、単元生成のときと同様。

4 について。ある$x \in J(G)$ と、そのある近傍Uがあり、

$$U \setminus \{x\} \cap O^-(z) = \emptyset$$

とする。任意の$g \in G$ に対し、

$$g(U \setminus \{x\}) \cap O^-(z) = \emptyset.$$

$O^-(z)$ は3点以上あり、$U \setminus \{x\}$ でG は正規族となり、矛盾。

5 について。3,4 を使う。Aがbackward invariant closed setで3点を含む、とすると、ある点$z \in A \setminus E(G)$ があり、このzについて、

$$J(G) \subset \overline{O^-(z)} \subset A.$$

6 について。fがentire function,$G = \langle f \rangle$ のときに示した[Ba] の方法と同様。[Sc] 参照。つまり、$J(G)$ が完全集合であることと、Ahlfors の five island theorem を使う。 □

Propotition 1. 1 $\{Q_\lambda\}$ を２次以上の多項式の族とし、それで生成されるGについて $\sigma(z) = \mu z + \tau \in \mathrm{Aut}\mathbb{C}, \mu = \exp(\frac{2\pi i}{k}), k \in \mathbb{N}$ が任意のλ に対し,

$$\sigma(J(\langle Q_\lambda \rangle)) = J(\langle Q_\lambda \rangle)$$

を満たすならば、

$$\sigma(J(G)) = J(G)$$

Proof　２次以上の 多項式Q について、 $J(Q)$が$z \mapsto (\exp(\frac{2\pi i}{k}))(z)$ で完全不変であることは、 $Q = az^d P(z^k), P$ はある多項式、とかけることと同値([Be1])。また、Lemma 1. 2 ,6 を使う。 □

Example 1. 1 正三角形$p_1p_2p_3$ に対し、$g_i = 2(z - p_i) + p_i, i = 1, 2, 3$ とおく。(g_i) によってsemigroupとして生成される G のJulia集合は、*Sierpiński Gasket* である。

2 Limit Functions

Sを双曲型リーマン面、S_∞ をSの一点コンパクト化、$H \subset \mathrm{End}(S)$ をsubsemigroupとするとき、

Definition 2. 1
$\overline{\mathcal{L}}_H(S) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\varphi : S \mapsto S_\infty \mid \varphi$は$H$ の互いに異なる元の列(g_j) のS上の広義一様収束極限$\}$

Remark End(S)の元からなる族A は、End(S)の元か、∞ に広義一様収束する部分列を含む([Mi])。

Lemma 2. 1 Sは双曲型リーマン面、 $H \subset \mathrm{End}(S)$ はsubsemigroupで有限生成、かつ ある$\varphi \in \overline{\mathcal{L}}_H(S)$ が非定数、とすると、このとき、

1. $\mathrm{Id}_S \in \overline{\mathcal{L}}_H(S)$かつある $g_0 \in H$がSで単射
2. Hのある列(g_j) があり、広義一様に∞ に収束、ここで、任意のj に対し, ある$h_j \in H$ があり、$g_{j+1} = h_j g_j$.

のいずれかはなりたつ。

Proof Hの生成系を一つ固定する。Hの互いに異なる元の列(f_j) で、$f_j \to \varphi, f_j$ のword lengthは狭義単調増加、なるものがある。各f_j は生成元の最短の積表示をしておく。(f_j)の部分列(f_{1j})を、次の様にとる。 Hのある生成元g_{i_1} があり、任意の jに対し、

$$f_{1j} = \cdots \circ g_{i_1}$$

の形。 以下$(f_{nj})_j$ がとれたら、そこから部分列$(f_{n+1,j})_j$ を、次の様にとる。 Hのある生成元$g_{i_{n+1}}$ があり、任意の jに対し,

$$f_{n+1,j} = \cdots \circ g_{i_{n+1}} \circ \cdots \circ g_{i_1}$$

のかたち。 列 $(f_{nn})_n$ を考えると、

$$f_{nn} = \alpha_n \circ g_n$$

ここで、

$$\alpha_n \in H, g_n = g_{i_n} \circ \cdots \circ g_{i_1}.$$

ある部分列$(\alpha_{n_j}), (g_{n_j})$ があるα, g にS上広義一様収束する。 g_{n_j} は互いに異なるから、

$$g \in \overline{\mathcal{L}}_H(S).$$

g が定数でない とすると、

$$g(S) \subset S$$

g が恒等的に定数ζ_0とすると、φ は非定数より、

$$\zeta_0 = \infty$$

前者のとき、部分列をとって、ある$h_j \in H$ があり、

$$g_{n_{j+1}} = h_j \circ g_{n_j},$$

(h_j) はあるh に広義一様収束するとしてよい。$g = h \circ g$ となり、

$$h \equiv Id_S.$$

(h_j) の部分列をとって、ある$g_0 \in H$ について、

$$h_j = \cdots \circ g_0$$

としてよい。このとき、$z, w \in S$ について、 $g_0(z) = g_0(w)$ ならば、任意のj に対し、

$$h_j(z) = h_j(w)$$

となり、$j \to \infty$ として、

$$z = w.$$

ゆえにg_0 はSで単射。 □

Definition 2. 2 Gをratinal semigroupとする。$F(G)$ の連結成分Uが*stable domain* とは、ある$g \in G \setminus \mathrm{Aut}\overline{\mathbb{C}}$ があり、 $g(U) \subset U$ となるときをいう。このとき、

$$G_U \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{g \in G \mid g(U) \subset U\}.$$

entire semigroupについても同様。

Definition 2. 3 Uを$\overline{\mathbb{C}}$ の領域、$H \subset \mathrm{End}(U)$ をsubsemigroupとするとき、
$\mathcal{L}_H(U) \stackrel{def}{=} \{\varphi : U \mapsto \overline{U} \mid \varphi$ はHの互いに異なる元の列(g_j) のS上の広義一様収束極限$\}$

Remark　$g \in H$が非定数,$\varphi \in \mathcal{L}_H(U)$ のとき、$\varphi \circ g \in \mathcal{L}_H(U)$. さらに$\varphi \in \mathrm{End}(U)$ なら、$g \circ \varphi \in \mathcal{L}_H(U)$.

Propotition 2. 1　Gはrational semigroup, Uは$F(G)$ の領域、

$$H = \{g \in G \mid g(U) \subset U\}$$

は有限生成、

$$1 < \sharp\{\varphi \in \mathcal{L}_H(U) \mid \exists\zeta \in U, \varphi \equiv \zeta\} < \infty$$

とする。このとき、$\varphi \in \mathcal{L}_H(U)$ ならば、ある$\zeta \in U$ があり、

$$\varphi \equiv \zeta,$$

また、$M = H \cap \mathrm{Aut}\overline{\mathbb{C}}$ の元は有限個。

Proof　Hには2次以上の元がある。$\overline{\mathbb{C}} \setminus U$ は3点以上持つ。ある$\varphi_0 \in \mathcal{L}_H(U)$ が、非定数とすると、Lemma 2. 1　より、$Id_U \in \mathcal{L}_H(U)$. そこで、$H$の互いに異なる元の列$(g_j)$ がId_Uに広義一様収束するとしたとき、いまMの元は有限個であることがわかり、それを認めると、十分大なるjについて、$\deg(g_j) \geq 2$, かつg_j は$\mathcal{A}$ の各点を固定する。しかし、$H \setminus \mathrm{Aut}\overline{\mathbb{C}}$の元は不動点を$U$に高々一つしか持たない。故に矛盾となる。

Mが有限個であることをいう。

$$\mathcal{A} = \{\zeta \in U \mid \exists\varphi \in \mathcal{L}_H(U), \varphi \equiv \zeta\}$$

とおく。$g \in H$ ならば、$g(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ である。$\sharp\mathcal{A} \geq 3$ のときには、$\mathrm{Aut}\overline{\mathbb{C}}$ の元は3点で決まるから、M　は有限個である。$\sharp\mathcal{A} = 2$ のときを考える。

$\mathcal{A} = \{0, \infty\}$ としてよい。このとき、$g \in M$ について、

$$g(z) = e^{i\theta}z, \frac{\theta}{2\pi} \in \mathbf{R} \setminus \mathbb{Q}$$

の形のものはない。なぜなら、$w \in J(G)$ について、

$$C = \overline{\cup_n g^{-n}\{w\}} \subset J(G)$$

が$0, \infty$ を分離するからである。次に、

$$g_1(z) = r_1 e^{i\theta_1}\frac{1}{z}, \frac{\theta_1}{2\pi} \in \mathbf{R} \setminus \mathbb{Q}$$

の形のものが M にあれば、$g_2(z) = e^{i\theta_2}z$ の形の元に対して、

$$g_1 g_2 = g_2^{-1} g_1 \tag{1}$$

$g_3(z) = r_3 e^{i\theta_3}\frac{1}{z}$ の形の M の元に対して、

$$g_1 g_3 = \frac{r_1}{r_3} e^{i(\theta_1-\theta_3)} z \tag{2}$$

ゆえに、

$$\frac{\theta_1-\theta_3}{2\pi} \in \mathbb{Q}, \frac{r_1}{r_3} = 1 \tag{3}$$

ここで、Hの生成系をfixし、生成元で M に入るものを

$$g_1, \cdots, g_m, h_1, \cdots, h_n,$$

$$g_j = e^{i\theta_j} z, \frac{\theta_j}{2\pi} \in \mathbb{Q},$$

$$h_l = r_l e^{i\tau_l}\frac{1}{z},$$

とかくと、Mの元は (1) より、

$$g_{j_1} \circ \cdots \circ \cdots g_{j_s} \circ h_{l_1} \circ \cdots \circ h_{l_t}$$

の形でかけ、(g_j) で生成されるものは有限個で、かつ (2),(3) と合わせて、結局、M の元は有限個しかない。 □

Remark Proposition 2. 1 はentire semigroupでも同様のことが成り立つ。また、

$$G = \langle z^2, e^{i\theta} z\rangle, \frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}, U = \{|\, z \,| < 1\}$$

のとき,

$$\sharp\{\varphi \in \mathcal{L}_H(U) \mid \exists\zeta \in U, \varphi \equiv \zeta\} = 1, Id_U \in \mathcal{L}_H(U).$$

Lemma 2. 2 Gはrational(entire) semigroup,Uは$F(G)$ のstable domain,$H = G_U$, とする。

$$\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \in U \mid \exists\varphi \in \mathcal{L}_H(U), \varphi \equiv \zeta\}$$

がUに集積点をもつとする。このとき、

$$\mathcal{B} \overset{\text{def}}{=} \{\zeta \in \overline{U} \mid \exists\varphi \in \mathcal{L}_H(U), \varphi \equiv \zeta\}$$

は完全 集合, とくに非可算。

Proof あるζ $\in \mathcal{A}$ が孤立したとすると、ある$g \in H \setminus \mathrm{Aut}\overline{\mathbb{C}}$ があり、$g(\zeta) = \zeta$. このとき、$\mathcal{A} \subset \cup_n g^{-n}\{\zeta\}$. $\mathcal{A}$ の点がすべて孤立する。 □

Conjecture 2. 1 $\mathcal{A}$ は無限個あれば、Uに集積点をもつ。

以下、例として、[HM1] による nearly abelian semigroup をあげる。G を rational semigroup, 2次以上の元を含むとする。

Definition 2. 4 G が *nearly abelian* とは、以下のときをいう。
一次分数変換のあるコンパクトな族Φ があって、
任意の$\phi \in \Phi$ に対し、$\phi(F(G)) = F(G)$
任意の $f, g \in G$ に対し、ある$\phi \in \Phi$ があって $f \circ g = \phi \circ g \circ f$

[HM1] により、このとき、$g \in G$ が2次以上ならば、$J(G) = J(g)$ となり、stable domain U において 2次以上の$g \in G_U$ の型(U を含む $F(g)$ の連結成分の型)が一致すること等が知られている。

Xが$\mathbb{C}$ のコンパクト集合で、円でないとすると、
$G= \{g \mid g$は多項式、$J(g) = X\}$ が2次以上の元を含むとき、Gはnearly abelian で、Definition 2. 4 のΦ は有限個のものがとれる。

Lemma 2. 3 Gはnearly abelian rational semigroup, Φ はG に付属のDefinition 2. 4 の族で、$\sharp\Phi < \infty$, Uはstable domain,$H = G_U$ とする。このとき、
$\{\zeta \in \overline{U} \mid \exists\varphi \in \mathcal{L}_H(U), \varphi \equiv \zeta\}$ は有限個。
もしあれば、すべてU に属すか、すべて ∂U に属す。

Proof $\alpha \in \mathcal{L}_H(U)$ をとる。Hの互いに異なる元の列(g_j) があり、α に広義一様収束する。$g \in H$ をとる。任意のjに対し、ある$\phi_j \in \Phi$ があり、

$$gg_j = \phi_j g_j g.$$

ϕ_j はΦ のある元ϕ に一様収束するとしてよい。すると、

$$g\alpha = g \lim_{j\to\infty} g_j = \lim_{j\to\infty} \phi_j g_j g = \phi\alpha g.$$

$\alpha \equiv \zeta$ のとき、

$$g(\zeta) = \phi(\zeta).$$

ある$n, m \leq \sharp\Phi$ があり、$g^m(\zeta)$ はg^n の不動点。 □

Example 2. 1 $n \geq 2, f(z) = z^n + c, \sigma(z) = \exp(\frac{2\pi i}{n})z$, $G = \langle f, \sigma f, \cdots, \sigma^{n-1} f\rangle$ とする。$|c|$ が十分小、のとき、0 は$F(G)$ に属し、0 を含む$F(G)$ の連結成分U において$\mathcal{L}_H(U)$ は全て定数でUに属し、

$$\sharp\mathcal{L}_H(U) = n.$$

c を適当にとると、全て∂U に属す。

Example 2. 2 $f(z) = z^m(z-c), g(z) = z^n(z-c)^l + c, m, n, l > 1, G = \langle f, g\rangle$ のとき、
$|c|$:十分小、ならば、$0, c$ は$F(G)$ の同じstable domain U にあり、

$$\mathcal{L}_G(U) = \{\varphi_0, \varphi_c\},$$

ここで、 $\varphi_0 \equiv 0, \varphi_c \equiv c.$

3 Julia Sets as Self Similar Sets,Continuity

$G = \langle f_1, \cdots, f_n \rangle$ はfinitely generated rational semigroup, あるjがあり、$\deg(f_j) > 1$ とするとき、

Definition 3.1 Gが *typeA* とは、$F(G)$ のある連結成分U があって、以下の全てが成り立つときをいう。

1. $G_U = G$,
2. 任意のrに対し、f_r の全てのcritical pointはUに属す、
3. Uのあるコンパクト集合Kがあり、$\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ は連結、かつ任意の$z \in U$ に対し、有限個の$g \in G$を除いて$g(z) \in K^i$. ここで K^i はKの内部をさす。

Example 3.1 $G = \langle z^m + c, z^n + d \rangle, m, n \geq 2, |\, c\,|, |\, d\,|$ は十分大、のとき、GはtypeA.

Theorem 3.1 Mは複素多様体、$\dim M = r < \infty$, $f_{j,a} \in \mathrm{End}\overline{\mathbb{C}}, a \in M, \deg(f_{j,a}) = d_j$ は２以上の定数、

$$(z, a) \in \overline{\mathbb{C}} \times M \mapsto f_{j,a}(z) \in \overline{\mathbb{C}}, 1 \leq j \leq n$$

は正則、$G_a = \langle f_{1,a}, \ldots, f_{n,a} \rangle$ はfinitely generated rational semigroupで、$a = b \in M$ のとき、G_b はtypeA とする。このとき、

bのある近傍Bと、$\overline{\mathbb{C}}$ のある単連結領域Vと、V上の Poincaré metric contraction の$h_{1,a}, \ldots, h_{k,a}$で、

$$(z, a) \in V \times B \mapsto h_{j,a}(z) \in \overline{\mathbb{C}}$$

が正則なるものがあり、以下を満たす。

任意の$a \in B$ について、G_a はtypeA, $J(G_a)$ は$(h_{j,a})_{j=1,\ldots,k}$ による$(V$,Poincaré metric$)$での自己相似集合。

とくに、$\overline{\mathbb{C}}$ でのHausdorff metricに関し、B上$a \mapsto J(G_a)$ は連続。

Proof $P(G_a) = \{f_{j,a}, j = 1, \ldots, n,$ のcritical points$\} \cup \{$その$G_a$orbits$\}$ とおく。G_b についてのDefinition 3.1 のUをとる。$P(G_b)$ とJ_b をUのJordan curve Γ で分離する。$\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ の連結成分で、$P(G_b)$ を含む方をW,他方をVとかく。また、G_a の生成系を $(f_{j,a})$ として固定する。

ある$m \in \mathbb{N}$, と、bのある近傍Bがあり、任意のt,$m \leq t \leq 2m$, 任意の$a \in B$ に対し、t個の生成元の積$g \in G_a$ は

$$g(\Gamma \cup W) \subset K^i$$

を満たす。ゆえ、任意の$t \geq m, a \in B$ に対し、t個の生成元の積 $g \in G_a$ は上式を満たす。
また、Bを、$a \in B$ ならば

$$\cup_{1 \leq s \leq m} \cup_g g(\cup_{j=1}^{j=n} \{f_{j,a} \text{の critical points}\}) \subset W$$

となるようとれる。ここで、$\cup_g$ は、s 個の生成元の積 $g \in G_a$ についてとる。　このとき、$a \in B$ において、Γ は $P(G_a)$ と $J(G_a)$ を分離する。ここで、

$$H_a = \{g_{1,a}, \ldots, g_{r,a} \in G_a \mid m \text{ 個の生成元の積}\} \subset G_a,$$

それで生成されたものを

$$\langle H_a \rangle \subset G_a$$

とかくと、$a \in B$ のとき、

$$g_{j,a}^{-1}(\Gamma \cup V) \subset V,$$

かつ V 上 $g_{j,a}^{-1}$ の一価正則な枝がとれる。V 上の $(g_{j,a}^{-1})_j$ の枝を集めて $h_{1,a}, \ldots, h_{k,a}$ とかく。

$$(z, a) \mapsto h_{i,a}(z)$$

は正則。Section 1 ,Lemma 1. 1 2,Lemma 1. 2 1 より、

$$J(G_a) = J(\langle H_a \rangle) = \cup_{g \in H_a} g^{-1}(J(\langle H_a \rangle)) = \cup_{i=1}^k h_{i,a}(J(G_a)).$$

よって、$J(G_a)$ は $(h_{i,a})$ による V の自己相似集合。

次に V 上の Poincaré metic を d_H ,V のコンパクト集合 S ,T に対し、

$$\partial_H(S, T) = \sup\{d_H(x, T) \mid x \in S\}$$

とおく。　任意の $a_0 \in B$ に対し、a_0 のある近傍 $B_0 \subset B$ と、あるコンパクト集合 $L \subset V$, ある $c, 0 < c < 1$ があって、$a \in B_0$ ならば $i = 1, \ldots, k$ に対し $h_{i,a}$ の縮小率は c 以下、かつ

$$J(G_a) \subset L \subset V.$$

任意の $\epsilon > 0$ に対し、B_0 を小さくとれば、 $a, a' \in B_0$ のとき任意の $z \in L$ に対し、

$$d_H(h_{i,a}(z), h_{i,a'}(z)) < (1 - c)\epsilon, i = 1, \ldots, k.$$

ゆえ、$z, z' \in L, d_H(z, z') < \epsilon$ のとき、$a, a' \in B_0$ に対し、

$$\begin{aligned} &d_H(h_{i,a}(z), h_{i,a'}(z')) \\ &\leq d_H(h_{i,a}(z), h_{i,a'}(z)) + d_H(h_{i,a'}(z), h_{i,a'}(z')) \\ &< (1 - c)\epsilon + c\epsilon < \epsilon \quad i = 1, \ldots, k. \end{aligned}$$

$z_0 \in L$ を一つとる。$a \in B$ で $J(G_a)$ の点は、

$$\lim_{l \to \infty} h_{i_1,a} \circ \cdots \circ h_{i_l,a}(z_0)$$

の形で、$h_{i_l,a}(z_0) \in L$ としてよく、$a, a' \in B_0$ ならば

$$\partial_H(J(G_a), J(G_{a'})), \partial_H(J(G_{a'}), J(G_a)) < \epsilon$$

となり、(V,d_H) のHausdorff metricに関し、B で$a \mapsto G_a$ が連続、ゆえ、$\overline{\mathbb{C}}$ のHausdorff metric に関してもいえる。

$a \in B$ のときG_a がtypeA であることをいう。Kを含む$F(G_a)$ の連結成分をU_a とかく。任意の$z \in W$に対し、有限個の$g \in G_a$ を除いて$g(z) \in K$, より、

$$Id_{U_a} \notin \mathcal{L}_{G_a}(U_a).$$

Section 2,Lemma 2. 1 より、$\mathcal{L}_{G_a}(U_a)$ の元は、全て定数で、K に属す。□

Remark Gがfinitely generated rational semigroup,typeA の条件だけでも、J(G) が自己相似集合であることは、word length を使って同様にいえる。

Definition 3. 2 Λ が位相空間、E が距離空間のとき、

Comp$^*(E)$ を、E の空でないコンパクト部分集合全体とする。$A,B \in \mathrm{Comp}^*(E)$ に対し、

$$\partial(A,B) = \sup\{d(x,B) \mid x \in A\}$$

とおく。また、$\phi : \Lambda \mapsto \mathrm{Comp}^*(E)$ が *upper semi continuous* とは

$$\partial(\phi(\lambda),\phi(\lambda_0)) \to 0, (\lambda \to \lambda_0),$$

lower semi continuous , とは

$$\partial(\phi(\lambda_0),\phi(\lambda)) \to 0, (\lambda \to \lambda_0)$$

のときをいう。

Lemma 3. 1 Λ は局所コンパクト位相空間、E は距離空間、$(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ はEの部分集合のある族、

$$A = \{(\lambda, x) \in \Lambda \times E \mid x \in X_\lambda\}$$

とするとき、次は同値。

1. $\lambda \mapsto X_\lambda$ が $\Lambda \mapsto \mathrm{Comp}^*(E)$ のupper semi continuous function
2. Aは$\Lambda \times E$ の閉集合、任意の$\lambda \in \Lambda$ に対し、$X_\lambda \neq \emptyset$,
   任意の $\lambda_0 \in \Lambda$ に対し、λ_0 のある近傍VとEのあるコンパクト集合Kがあって、
   任意の$\lambda \in V$ に対し、$X_\lambda \subset V$

Proof [D] . □

Lemma 3. 2 Λ は位相空間、Eは距離空間、

$\lambda \mapsto X_\lambda, \lambda \mapsto Y_\lambda,$ は$\Lambda \mapsto \mathrm{Comp}^*(E)$ なる写像で、

それぞれ Λ でlower semi continuous,upper semi continuous ,

$\lambda \in \Lambda$ のとき $X_\lambda \subset Y_\lambda, X_{\lambda_0} = Y_{\lambda_0}$ とする。このとき、

$\lambda \mapsto X_\lambda, \lambda \mapsto Y_\lambda$ は一点 λ_0 で連続。

Proof [D]. □

Theorem 3. 2 Mは複素多様体、$\dim M < \infty$,$f_{j,a}$ はEnd$\overline{\mathbb{C}}$ の元で２次以上、$a \in M, j = 1, \ldots, n,$

$$(z, a) \in \overline{\mathbb{C}} \times M \mapsto f_{j,a}(z) \in \overline{\mathbb{C}}$$

は正則、$a \in M$ につき $G_a = \langle f_{1,a}, \cdots, f_{n,a} \rangle$ をfinitely generated rational semigroupとする。いま $a = b$ で $F(G_b)$ のあるコンパクト集合Kがあって、 任意の$z \in F(G_b)$ に対し、$g \in G_b$ について有限個を除いて $g(z) \in K^i$. とすると、このとき、

$$a \mapsto J(G_b) \in \mathrm{Comp}^*(\overline{\mathbb{C}})$$

は、Hausdorff metricに関し、$a = b$ で連続。

Proof Section 1,Lemma 1. 2 6より、任意の$c \in M, \epsilon > 0$に対し、G_c のいくつかのrepelling fixed pointsよりなる集合

$$X_c = \{x_{1,c}, \cdots, x_{l,c}\} \subset J(G_c)$$

があって、

$$\partial(J(G_c), X_c)) \leq \epsilon/2.$$

陰函数定理より、 cのある近傍Wがあり,そこで、$x_{j,a}$ なるG_a のrepelling fixed points があり、$a \in W$ ならば

$$d(x_{j,c}, x_{j,a}) \leq \epsilon/2, j = 1, \ldots, l.$$

このとき、任意の$a \in W$ につき、

$$X_a = \{x_{1,a}, \cdots, x_{l,a}\}$$

とおいて、

$$\partial(X_c, J(G_a)) \leq \partial(X_c, X_a) \leq \epsilon/2.$$

ゆえ、

$$\partial(J(G_c), J(G_a)) \leq \partial(J(G_c), X_c) + \partial(X_c, J(G_a)) \leq \epsilon.$$

ゆえ、$a \mapsto J(G_a)$ は、Definition 3. 2 での、M上のlower semi continuous function.
次に、いま、$g \in G_b$ のとき、有限個のg を除いて

$$g(K) \subset K^i$$

である。 なぜなら、ある列$(g_m), g_m \in G_b, g_m(K) \not\subset K^i$ があるとすると、ある部分列(g_{m_j}) があるg_0 にK上一様収束する。 このとき、

$$g_0(K) \subset K^i,$$

ゆえ十分大なる j にて
$$g_{m_j}(K) \subset K^i$$
で矛盾。

ゆえ、b のある近傍 W と、ある $m \in \mathbf{N}$ があって、任意の $t,m \le t \le 2m$ に対し、G_a の生成元の t 個の積 $g \in G_a$ は、
$$g(K) \subset K^i$$
をみたす。ゆえ、任意の $t \ge m$ につき、G_a の生成元の t 個の積 $g \in G_a$ は、上式をみたす。$a \in W$ のとき、

$$S_a = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid g \in G_a\text{にたいし有限個の}g\text{を除いて}g(z) \in K^i\},$$

$$T_a = \overline{\mathbb{C}} \setminus S_a,$$
$$R = \{(a,z) \in W \times \overline{\mathbb{C}} \mid z \in T_a\},$$

とおくと、$(W \times \overline{\mathbb{C}}) \setminus R$ は $W \times \overline{\mathbb{C}}$ の開集合ゆえ、R は $W \times \overline{\mathbb{C}}$ の開集合。また、

$$\emptyset \neq J(G_a) \subset T_a, J(G_b) = T_b.$$

Lemma 3. 1 ,3. 2 より、$a \mapsto T_a$ は W でupper semi continuous,
$a \mapsto J(G_a)$, $a \mapsto T_a$ は b でcontinuous. □

参考文献

[HM1] A.Hinkkanen,G.J.Martin, *The Dynamics of Semigroups of Rational Functions I*, preprint,AMS(1991) Clasification. Primary 30D05,58F23.

[HM2] A.Hinkkanen,G.J.Martin, *Julia sets of Rational Semigroups,* preprint,AMS(1991)Clasification.Primary 30C62,58F23.

[Ba] I.N.Baker, *Repulsive Fixed Points of Entire Functions,* Math.Z.**104**(1968),252-256.

[Be1] A.F.Beardon, *Symmetries of Julia sets*,Bull.London.Math.Soc.**22**(1990),576-582.

[Be2] A.F.Beardon, *Iteration of Rational Functions,* Springer-Verlag GTM132.

[C] C.Caratheodory,*Theory of functions of a Complex Variable, Vol.2,*Birkhäuser, Basel,(1950),reprinted by Chelsea,New York,(1981).

[D] A.Douady, *Does a Julia set depend continuously on the Polynomial?*,Complex Dynamical System,The Mathematics behind the Mandelbrot and Julia Sets (editor R.Devaney),p91-p138,Proceedings of Symposia in Applied Mathematics,vol.49,AMS.

[Mi] J.Milnor, *Dynamics in One Complex Variable : Introductory Lectures*,preprint,SUNY StonyBrook Institute for Mathematical Sciences,(1990).

[Sc] J.L.Schiff, *Normal Families*,Springer,New York,(1993).