

## Transcendence measures for almost all numbers

群馬大学工学部 天羽 雅昭 (Masaaki Amou)

本講演のテーマは“2次元ルベグ測度の意味で、ほとんどすべての超越数がある超越測度について”である。

先ず、超越測度の定義を述べておこう。 $\omega$  を超越数とする。 $(d, H) \in \mathbb{N}^2$  に対して、 $\mathcal{P}(d, H)$  で、次数が  $d$  以下、高さが  $H$  以下の整数係数多項式の全体を表わす。但し、多項式の高さとは、係数の絶対値の最大値のことである。このとき、

$$\Phi(\omega; d, H) := \min_{\substack{P \in \mathcal{P}(d, H) \\ P \neq 0}} |P(\omega)|$$

で定義される  $(d, H)$  の関数を、 $\omega$  の超越測度と呼ぶ (一般に、 $\Phi(\omega; d, H) \geq \phi(\omega; d, H)$  をみたす  $\phi$  をすべて、 $\omega$  の超越測度と呼ぶ)。

ディリクレの部屋割り論法によって、任意の超越数  $\omega$  に対して

$$(*) \quad \Phi(\omega; d, H) \leq \begin{cases} \exp(-d \log H + c(\omega)d), & \omega \in \mathbb{R} \\ \exp(-\frac{d-1}{2} \log H + c(\omega)d), & \omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases}$$

が成り立つことがわかる ( $c(\omega)$  は  $\omega$  のみに依る正の定数)。

我々は、次の問題を考える。

問題 2次元ルベグ測度の意味で、ほとんどすべての超越数 $\omega$ に対して、 $\Psi(\omega; d, H)$ のなるべく大きな下界を求めよ。

次数 $d$ を固定して考えた場合には、Sprindžuk [8] による次の結果がある： $\varepsilon > 0$ を任意とする。 $d \in \mathbb{N}$ を任意にとって固定したとき、1次元ルベグ測度の意味で、ほとんどすべての実数 $\omega$ に対して

$$\Psi(\omega; d, H) \geq \exp(-(d+\varepsilon)\log H)$$

が、 $H \geq c(\omega, d, \varepsilon)$ のときに成り立ち、2次元ルベグ測度の意味で、ほとんどすべての複素数 $\omega$ に対して

$$\Psi(\omega; d, H) \geq \exp(-(\frac{d-1}{2} + \varepsilon)\log H)$$

が、 $H \geq c(\omega, d, \varepsilon)$ のときに成り立つ ( $c(\omega, d, \varepsilon)$ は、 $\omega, d, \varepsilon$ のみによる正の定数)。

これは、(\*)の上界と比較して、ほぼ最良の結果である。(これをさらに改良した結果は、[5], Chap. 9 と [6]がある。)

私の得た結果は、次数 $d$ も動かして考えた場合の次のような評価である。

定理  $\varepsilon > 0$ を任意とする。このとき、2次元ルベグ測度の意味で、ほとんどすべての複素数 $\omega$ に対して

$$\Psi(\omega; d, H) \geq \exp(-(5.5 + \varepsilon)d \log((d+1)H) - 3d \log(d+1))$$

が、 $\text{Max}(d, H) \geq c(\omega, \varepsilon)$  のときに成り立つ ( $c(\omega, \varepsilon)$  は、 $\omega$  と  $\varepsilon$  のみによる正の定数)。

定理の証明には、次の2つの補題が使われる。

補題1 ([7], Chap. 2, Lemma 1.12)  $\omega \in \mathbb{C}$ ,  $P(x) \in \mathcal{P}(d, H)$

( $P \neq 0$ ) とし、 $\omega$  に一番近い  $P(x)$  の根の (1つ) を  $\alpha$  とする。

$\alpha$  の  $P(x)$  での重複度を  $s$  とするとき

$$|P(\omega)| \geq |\omega - \alpha|^s (2d^2(d+1)H^2)^{-d+1}$$

が成り立つ。

補題2  $(d, H, s) \in \mathbb{N}^3$  ( $s \leq d$ ) に対して

$\mathcal{O}(d, H, s) := \{ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}} ; \text{ある } P(x) \in \mathcal{P}(d, H) \text{ があって、}$

$P(\alpha) = 0$  かつ  $\alpha$  の  $P(x)$  での重複度は  $s$  }

と定義する。このとき、 $\mathcal{O}(d, H, s)$  の元の個数  $\#\mathcal{O}(d, H, s)$

について

$$\#\mathcal{O}(d, H, s) \leq 100 d^2 ((d+1)H)^{6d/s}$$

が成り立つ。

註1 Chudnovsky は、[7], Chap. 2, Remark 7.5 において、補題1を使えば、上記の定理(とほぼ同じもの)が成り立つことを主張し、その証明のスケッチを数行で述べている。しかし、そこには補題2に相当する結果についての言及がない

ので、証明が完成されるようには思えない。このことが、本研究を行なうきっかけになった。

註2 補題2は、[4], Lemma 2 を使って容易に導くことができる。[4]を執筆中には、そのことに気付かずに、高さ  $H$  を固定した場合の弱い結果を Appendix で証明している。

註3 標数  $p$  ( $p \neq 0$ ) の関数体に対しても、上記と類似の問題が考えられ、それについては、かなりシャープな結果が得られている ([2], [3])。

### 参考文献

- [1] M. Amou, A note on transcendence measures for almost all numbers, preprint.
- [2] ———, 関数体上での超越測度についての注意, 第4回超越数論研究集会報告集, 1-15.
- [3] ———, A metrical result on transcendence measures in certain fields, to appear in J. Number Theory.
- [4] ———, On Sprindžuk's classification of transcendental numbers, to appear in J. reine angew. Math. 470.
- [5] A. Baker, Transcendental Number Theory, Cambridge Univ. Press, 1975.
- [6] V. I. Bernik, A proof of Baker's conjecture in the

theory of transcendental numbers, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 277 (1984), 1036-1039.

[7] G. V. Chudnovsky, Contributions to the theory of transcendental numbers, Amer. Math. Soc., Mathematical surveys and monographs, no. 19, Providence, R. I., 1984.

[8] V. G. Sprindžuk, Mahler's problem in metrical number theory, Amer. Math. Soc., Translations of mathematical monographs, vol. 25, Providence, R. I., 1969.