数理解析研究所講究録
961巻 1996年 81-91

ファレイ分数とリーマン予想

近畿大学九州工
金光 滋 (Shigeru Kanemitsu)
九州大学大学院
吉元 昌己 (Masami Yoshimoto)

§0. Introduction

本論ではファレイ分数を用いたリーマン予想（以下RHと略す）との同値命題を与える。まず記号を定義する。

記号

任意の $x \geq 1$ に対して

$F_x = F_{[x]} := \left\{ \frac{c}{d} \,\middle|\, 0 < c \leq d \leq x,\ (d, c) = 1 \right\}$（$[x]$ は x の整数部分）を order x のファレイ分数の集合と呼ぶ。F_x の定義により、元の個数を $\Phi(x)$ とすると

$$\# F_x = \Phi(x) = \sum_{n \leq x} \varphi(n), \quad \varphi(n) \text{ — オイラー関数}$$

となる。以下 F_x の元を大きさの順に並べたものを ρ_ν, $\nu = 1, \cdots, \Phi(x)$ と書くことにする。

f を $[0,1]$ 上リーマン可積分な関数とする。このとき

$$E_f(x) := \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(\rho_\nu) - \Phi(x) \int_0^1 f(t)\,dt.$$

$s=\sigma+it\in\mathbb{C}$ とする。order s のクーバート空間を次で定義する：

$$\mathcal{K}_s:=\{f:(0,1)\to\mathbb{C}\mid f \text{ は } (*)_s \text{ を満たす}\}$$

$(*)_s$ $\qquad n^{s-1}\sum_{m=0}^{n-1} f\left(\frac{t+m}{n}\right)=f(t) \quad \text{for } {}^{\forall}n\in\mathbb{N},\ 0<{}^{\forall}t<1.$

また $0<\alpha\leq 1$ のとき order α のリプシッツ空間を次で定義する。

$$\Lambda_\alpha=\Lambda_\alpha[0,1]:=\{f\mid {}^{\exists}M>0 \text{ s.t. } |f(x)-f(y)|\leq M|x-y|^\alpha \text{ for } 0\leq{}^{\forall}x,{}^{\forall}y\leq 1\}$$

$M(x)=\sum_{n\leq x}\mu(n)$ ，$\mu(n)$ ─ メビウス関数

$S_s(x):=\sum_{n\leq x}M\left(\frac{x}{n}\right)\frac{1}{n^s}$ とすると、$\sigma\geq\frac{3}{2}$ のとき

(1) $\quad RH \Leftrightarrow S_s(x)=O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ for every $\varepsilon>0$ (Mikolás[6])

特に $S_{-1}(x)=\Phi(x)$ ，$S_0(x)=1$ が成り立つ。

$B_n(t)$ ─ n次のベルヌーイ多項式

$\overline{B_n}(t)=B_n(\{t\})$ $\quad$ ($\{t\}=t$ の小数部分).

我々の目標は関数 f に対して

(E) $\quad RH \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(\rho_\nu)=O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ for every $\varepsilon>0$

が成り立つことを示すことだが、一般の関数に対する議論は非常に難しいので、ここでは特別な場合についてのみ結果を与える。§1ではクーバート空間に属する関数について、また§2ではリプシッツ空間の元について示す。§3では $[0,\frac{1}{2}]$ におけるファレイ分数を使った同値命題を与える。§4はそれまでとは関係なく、フラネルの公式の別証明を示すことにする。

§1. フーバート空間における結果

order s のフーバート空間やそれに属する関数について、以下のことが知られている。

Lemma 1 (Milnor [8]) $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}_s = 2$.

$f \in \mathcal{H}_s$ とする。このとき

$$f(t) = \begin{cases} c_1 \ell_s(t) + c_2 \ell_s(1-t), \ {}^{\exists}c_1, c_2 \in \mathbb{C} & \text{for } s \neq -1, -2, -3, \dots \\ d_1 \zeta_{1-s}(t) + d_2 \zeta_{1-s}(1-t), \ {}^{\exists}d_1, d_2 \in \mathbb{C} & \text{for } s \neq 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

と表わされる。ここで

$$\ell_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n t}}{n^s} \qquad (\sigma > 1)$$

$$\zeta_{1-s}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+t)^{1-s}} \qquad (\sigma < 0).$$

上のことから次のことがわかる：

Lemma 2 (Milnor [8]). $f \in \mathcal{H}_s$, $s \neq 1$ とする。このとき $f(t)$ は $f(0)$ をとることができ、$f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ に拡張することができる。

特に

$$f(0) = \begin{cases} (c_1 + c_2)\,\zeta(s) & \text{if } \sigma > 1 \\ (d_1 + d_2)\,\zeta(1-s) & \text{if } \sigma < 0 \end{cases}$$

（c_1, c_2, d_1, d_2 は上と同じもの）

また一般に関数 f が $[0,1]$ 内の有理数上で定義されている時

Lemma 3 (Mikolás [6])

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(\rho_\nu) = \sum_{n \leq x} M\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{m=1}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right)$$

が成り立つ。これと$(*)_\lambda$より次が得られる。

<u>Theorem 1 (K-Y[2])</u>　$f \in K_\lambda, \lambda \neq 1$ とする。このとき

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} f(\rho_\nu) = f(0)\, S_{\lambda-1}(x).$$

特に $\sigma \geq \frac{3}{2}$, $f(0) \neq 0$; $f(t)+f(1-t) \neq 0$ for $t \in [0,1]$ のとき(1)より(E)が成り立つ。

$\sigma \geq \frac{3}{2}$ のとき K_λ の元となる関数には

$f(t) = B_{2n}(t)$, $\overline{B}_{2n}(t) \in K_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$

$f(t) = \ell_\lambda(t) \in K_\lambda$

等がある。$\sigma < \frac{3}{2}$ のときRHとの同値命題となっているものは現在のところ $\log 2\sin \pi t \in K_1$ しかない。

<u>Theorem 2 (K-Y[2])</u>

$$RH \Longleftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)-1} \log 2\sin \pi \rho_\nu = \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$
$$= x + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

§2. リプシッツ空間における結果

Mikolás は[6], [7], [8] で C^1-級の関数しか扱っていないが、我々は[10]でそれの拡張として order α のリプシッツ空間での結果を得た。

<u>Lemma 4 (Y. [10])</u>　$0 < \alpha \leq 1$, $f \in \Lambda_\alpha$ とする。このとき自明な評価として $E_f(x) = O(x^{2-\alpha})$ となる。更にRHの仮定の下では $E_f(x) = O(x^{2-\frac{3}{2}\alpha+\varepsilon})$ が成り立つ。

Lemma 5 (Y[10]) $f\in\Lambda_1$ とする。また $E_f(x)=O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ を仮定する。更に $F(s)$ を次で定義する：

$$F(s):=s\zeta(s)\int_1^\infty \frac{E_f(x)-\frac{1}{2}(f(1)-f(0))}{x^{s+1}}dx \quad ,(\sigma>1).$$

このとき

(i) $F(s)$ は $\sigma>\frac{1}{2}$, $s\neq 1$ で正則。

(ii) $\frac{1}{2}<\sigma<1$ で $F(s)$ が零点を持たなければ、$\zeta(s)$ もそこに零点を持たない。

上の $F(s)$ は f が微分できるとき更に変形できる：

$$F(s)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}\int_0^1 \overline{B}_1(nt)f'(t)dt.$$

また $f\in C^2[0,1]$ ならば

$$F(s)=\zeta(s+1)\left(\frac{1}{12}(f'(1)-f'(0))-\sum_{n=1}^\infty\frac{l_n}{n^{s+1}}\right)$$

ここで $l_n=\frac{1}{2}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\int_0^1\overline{B}_2(nt)f''(t)dt$

と書くことができる。

Lemma 4, 5 より、$f\in\Lambda_1$ のときリーマン予想との同値命題を得るためには、$F(s)\neq 0$ for $\frac{1}{2}<\sigma<1$ を示せばよいことがわかる。Mikolás は[5]で $f(t)=e^{\lambda t}$, $\cos\lambda t$ ($\lambda\in\mathbb{R}$) に対して上の Lemma を用いて同値命題を与える λ の条件を求めた。我々は[10]でその一般化として $f(t)=e^{\lambda t}$ ($\lambda\in\mathbb{C}$) に対する結果を得た。その際式の評価を Mikolás のものより良いものを使ったので、同時に数値改良もできている。

Theorem 3 (Y[10]) $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq 0$ かつ

$$\begin{cases} \lambda_1^2+\lambda_2^2 \leq \dfrac{20}{C} & \text{if } |\lambda_1|\geq|\lambda_2| \\ (C-\frac{5}{\pi^2})\lambda_1^2+(C+\frac{5}{\pi^2})\lambda_2^2 \leq 20 & \text{if } |\lambda_1|\leq|\lambda_2| \end{cases}$$

を満たすものとする。ここで $C=\zeta(3)-\frac{5}{8}+\frac{3}{16}\pi$。また $f(t)=e^{\lambda t}$ とする。このとき(E)が成り立つ。

Cor. 以下の f に対し(E)が成立する; $\lambda\in\mathbb{R}$ のとき

$$f(t)=e^{\lambda t},\quad 0<|\lambda|\leq 2\sqrt{\frac{5}{C}}=4.141389\ldots$$

$$f(t)=\cos\lambda t,\quad |\lambda|\leq 2\sqrt{\frac{5}{C+5/\pi^2}}=3.457836\ldots,\ \lambda\neq 0,\pm\pi$$

$$f(t)=\sin\lambda t,\quad 0<|\lambda|\leq 2\sqrt{\frac{5}{C+5/\pi^2}}$$

ここで $C=\zeta(3)-\frac{5}{8}+\frac{3}{16}\pi$.

またMikolásは[6]で2次式と3次式に対する結果を与えているが、4次式以降は同値命題が存在することしか述べていない。我々は[10]で具体的に4次式、5次式に対する結果を得た.

Theorem 4 (Y[10]) (i) $f(t)=\sum_{n=0}^{4}a_nB_{4-n}(t)\in\mathbb{C}[t]$, $a_0\neq 0$,

$$a_2=0 \quad \text{または} \quad \left|\frac{a_2}{a_0}\right|\geq\frac{3}{5}\left(\zeta(3)-\frac{5}{8}+\frac{3}{16}\pi\right)=0.69966\ldots$$

とする。このとき(E)が成り立つ。

(ii) $f(t)=\sum_{n=0}^{5}a_nB_{5-n}(t)\in\mathbb{C}[t]$, $a_0\neq 0$,

$$\begin{cases} a_1=0 \\ a_3\neq 0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} a_1\neq 0 \\ a_3=0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} a_1\neq 0 \\ \left|\frac{a_3}{a_1}\right|\geq\frac{3}{5}\left(\zeta(3)-\frac{5}{8}+\frac{3}{16}\pi\right) \end{cases}$$

とする。このとき(E)が成立する。

Cor.

$$RH \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \left(\rho_\nu^4 - \frac{1}{5}\right) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \\ \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} \left(\rho_\nu^5 - \frac{1}{6}\right) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \end{cases}$$

今までに挙げた関数以外には以下の定理を適用する;

Theorem 5 (Y [10]) $f \in C^3[0,1]$, $f^{(3)}(t) \neq 0$ for $0 \leq t \leq 1$ かつ

$$\frac{|f'(1) - f'(0)|}{\int_0^1 |f^{(3)}(t)|\,dt} \geq \frac{\sqrt{3}}{36}(\pi^2 + 4\log 2 - 4) = 0.41579\ldots$$

を満たすものとする。このとき(E)が成り立つ。

Cor. 以下の関数fに対して(E)が成立する:

$f(t) = \log(t+\lambda)$, $\lambda \geq 0.56609\ldots$

$f(t) = \log\Gamma(t+\lambda)$, $\lambda \geq 0.41579\ldots$

$f(t) = t^\lambda$, $2 \leq \lambda \leq 3.4050\ldots$

§3. Short intervalにおける結果

§1,2では[0,1]上での結果だったが、ここでは$0<\xi\leq 1$のときξ以下のファレイ分数を使った結果について述べる。

Kopřiva は[4]で $RH \Leftrightarrow \sum_{\rho_\nu \leq \frac{1}{2}} \left(\rho_\nu - \frac{1}{4}\right) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ が成り立つことを示している。我々は[2]で$\frac{1}{2}$より小さいξに対する結果を得た。

Theorem 6 (K-Y [2]) $\xi = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ のとき

$$RH \Longleftrightarrow \sum_{\rho_\nu \leq \xi} \left(\rho_\nu - \frac{R(\xi)}{2\Phi(x)}\right) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

が成り立つ。ここで

(2) $\quad h(\xi)=\sum_{\rho_\nu\le\xi}1=\sum_{n\le x}M\left(\frac{x}{n}\right)[n\xi]$

上の結果は $\xi=\frac{1}{2}$ とすると $h(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\Phi(x)$ より Kopřiva の結果と同じものになっている。

§4. フラネルの公式の別証

最後に一般のデデキント和を使って昔から知られているフラネルの公式の別証を与える。

Def $\quad a, b, c\in\mathbb{N}$ とする。このとき

$$S\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ & c\end{smallmatrix}\right):=\sum_{k=1}^{c}\overline{B}_1\left(\frac{ak}{c}\right)\overline{B}_1\left(\frac{bk}{c}\right)$$

Lemma 6 (K-Y[2]) $\quad a, b, c\in\mathbb{N}$ とする。このとき

$$S\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ & c\end{smallmatrix}\right)+S\left(\begin{smallmatrix}b & c\\ & a\end{smallmatrix}\right)+S\left(\begin{smallmatrix}c & a\\ & b\end{smallmatrix}\right)$$
$$=\frac{1}{12}\left(\frac{(a,b)^2}{ab}c+\frac{(b,c)^2}{bc}a+\frac{(c,a)^2}{ca}b\right)+\frac{(a,b,c)}{2}$$

が成り立つ。

Theorem 7 (Franel's formula) $\quad \delta_\nu=\rho_\nu-\frac{\nu}{\Phi(x)}, \ \nu=1,\cdots,\Phi(x)$

とする。このとき

$$\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\delta_\nu^{\,2}=\frac{1}{12\Phi(x)}\left(\sum_{m,n\le x}M\left(\frac{x}{m}\right)M\left(\frac{x}{n}\right)\frac{(m,n)^2}{mn}-1\right)。$$

証明)

(2)より $\quad \delta_\nu=\rho_\nu-\frac{\nu}{\Phi(x)}=\rho_\nu-\frac{h(\rho_\nu)}{\Phi(x)}$

$$=\frac{1}{\Phi(x)}\left(\Phi(x)\rho_\nu-\sum_{n\le x}M\left(\frac{x}{n}\right)[n\rho_\nu]\right)$$

$$=\frac{1}{\Phi(x)}\left(\sum_{n\le x}M\left(\frac{x}{n}\right)\overline{B}_1(n\rho_\nu)+\frac{1}{2}\right)$$

これより

$$(3)\qquad \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\delta_\nu^2=\frac{1}{\Phi(x)^2}\sum_{a,b\le x}M\left(\frac{x}{a}\right)M\left(\frac{x}{b}\right)\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\bar{B}_1(a\rho_\nu)\bar{B}_1(b\rho_\nu)$$
$$+\frac{1}{\Phi(x)^2}\sum_{n\le x}M\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\bar{B}_1(n\rho_\nu)+\frac{1}{4\Phi(x)}.$$

右辺の第2項はLemma3を使って求めると

$$-\frac{1}{2\Phi(x)^2}\sum_{m,n\le x}M\left(\frac{x}{m}\right)M\left(\frac{x}{n}\right)(m,n)$$

となる。第1項をLemma3を使って変形する。

$$\sum_{a,b\le x}M\left(\frac{x}{a}\right)M\left(\frac{x}{b}\right)\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\bar{B}_1(a\rho_\nu)\bar{B}_1(b\rho_\nu)$$
$$=\sum_{a,b\le x}M\left(\frac{x}{a}\right)M\left(\frac{x}{b}\right)\sum_{c\le x}M\left(\frac{x}{c}\right)\sum_{k=1}^{c}\bar{B}_1\left(\frac{ak}{c}\right)\bar{B}_1\left(\frac{bk}{c}\right)$$
$$=\sum_{a,b,c\le x}M\left(\frac{x}{a}\right)M\left(\frac{x}{b}\right)M\left(\frac{x}{c}\right)S\left({a\;\;b \atop c}\right)=S(x)$$

$S(x)$ は a,b,c の和のとり方に依らないので

$$S(x)=\sum_{a,b,c\le x}M\left(\frac{x}{a}\right)M\left(\frac{x}{b}\right)M\left(\frac{x}{c}\right)S\left({b\;\;c \atop a}\right)$$
$$=\sum_{a,b,c\le x}M\left(\frac{x}{a}\right)M\left(\frac{x}{b}\right)M\left(\frac{x}{c}\right)S\left({c\;\;a \atop b}\right).$$

が成り立つ。よって

$$3S(x)=\sum_{a,b,c\le x}M\left(\frac{x}{a}\right)M\left(\frac{x}{b}\right)M\left(\frac{x}{c}\right)\left(S\left({a\;\;b \atop c}\right)+S\left({b\;\;c \atop a}\right)+S\left({c\;\;a \atop b}\right)\right).$$

上で求めたことを(3)に代入するとLemma 6より

$$3\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\delta_\nu^2=\frac{1}{12\Phi(x)^2}\sum_{a,b,c\le x}M\left(\frac{x}{a}\right)M\left(\frac{x}{b}\right)M\left(\frac{x}{c}\right)\left(\frac{(a,b)^2}{ab}c+\frac{(b,c)^2}{bc}a+\frac{(c,a)^2}{ca}b\right)$$
$$+\frac{1}{2\Phi(x)^2}\sum_{a,b,c\le x}M\left(\frac{x}{a}\right)M\left(\frac{x}{b}\right)M\left(\frac{x}{c}\right)(a,b,c)$$
$$-\frac{3}{2\Phi(x)^2}\sum_{m,n\le x}M\left(\frac{x}{m}\right)M\left(\frac{x}{n}\right)(m,n)+\frac{3}{4\Phi(x)}.$$

右辺の第1項は $\displaystyle\frac{1}{4\Phi(x)}\sum_{m,n\le x}M\left(\frac{x}{m}\right)M\left(\frac{x}{n}\right)\frac{(m,n)^2}{mn}$ になる。第2項は最大公約数に注目して式を変形する。

$$\sum_{a,b,c\le x} M\left(\frac{x}{a}\right)M\left(\frac{x}{b}\right)M\left(\frac{x}{c}\right)(a,b,c)$$
$$=\sum_{d\le x}\sum_{\substack{a,b,c\le x/d\\(a,b,c)=1}} M\left(\frac{x}{ad}\right)M\left(\frac{x}{bd}\right)M\left(\frac{x}{cd}\right)d$$
$$=\sum_{d\le x} d\sum_{a,b\le x/d} M\left(\frac{x}{ad}\right)M\left(\frac{x}{bd}\right)\sum_{\delta|(a,b)}\mu(\delta)\sum_{c'\le x/d\delta}M\left(\frac{x}{d\delta c'}\right)$$
$$=\sum_{d\le x} d\sum_{a\le x/d} M\left(\frac{x}{ad}\right)\sum_{\delta|a}\mu(\delta)\sum_{b'\le x/d\delta}M\left(\frac{x}{d\delta b'}\right)$$
$$=\sum_{d\le x} d\,M\left(\frac{x}{d}\right)=\Phi(x).$$

第3項にも同様の操作をして

$$\sum_{m,n\le x} M\left(\frac{x}{m}\right)M\left(\frac{x}{n}\right)(m,n)=\Phi(x)。$$

故に

$$3\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\delta_\nu^2=\frac{1}{4\Phi(x)}\sum_{m,n\le x}M\left(\frac{x}{m}\right)M\left(\frac{x}{n}\right)\frac{(m,n)^2}{mn}+\frac{1}{2\Phi(x)}-\frac{3}{2\Phi(x)}+\frac{3}{4\Phi(x)}$$
$$=\frac{1}{4\Phi(x)}\left(\sum_{m,n\le x}M\left(\frac{x}{m}\right)M\left(\frac{x}{n}\right)\frac{(m,n)^2}{mn}-1\right)$$
$$\therefore\sum_{\nu=1}^{\Phi(x)}\delta_\nu^2=\frac{1}{12\Phi(x)}\left(\sum_{m,n\le x}M\left(\frac{x}{m}\right)M\left(\frac{x}{n}\right)\frac{(m,n)^2}{mn}-1\right)\quad //$$

References

[1] J. Franel, Les suites de Farey et les problème des nombres premiers, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. (1924), 198-201

[2] S. Kanemitsu and M. Yoshimoto, Farey series and the Riemann hypothesis, to appear in Acta Arith.

[3] 鹿野 健(編著), リーマン予想, 日本評論社, 1990

[4] J. Kopřiva, On a relation of Farey series to the Riemann hypothesis on the zeros of ζ function (Czech), Ĉasopis

Pest. Mat. 78 (1953), 49–55

[5] M. Mikolás, Sur l'hypothèse de Riemann, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 633–636

[6] M. Mikolás, Farey series and their connection with the prime number probrem I, Acta Sci. Math. (Szeged) 13 (1949), 93–117

[7] M. Mikolás, Farey seriess and their connection with the prime number probrem II, Acta Sci. Math. (Szeged) 14 (1951), 5–21

[8] J. Milnor, On polylogarithms, Hurwitz zeta functions, and the Kubert identities, Enseign. Math. 29 (1983), 281–322

[9] R. Sczech, Dedekindsummen mit elliptischen Functionen, Invent. Math. 76 (1984), 523–551

[10] M. Yoshimoto, Farey series and the Riemann hypothesis II (未発表)

[11] A. Zygmund, Trigonometric series, 2nd ed., Cambridge UP, 1959