数理解析研究所講究録
963巻 1996年 142-151

Univalent Mappings of Several Complex Variables

東京電機大学工学部　鶴見 和之
(Kazuyuki Tsurumi)

本講では，$\mathbb{C}^n$ の単位球 $\mathbb{B}$ 上の単葉写像族の中で重要な役割を演ずる starlike, convex 及び Φ−like である写像の定義及びそれらに関連する定理を与える。

これらの写像は1変数の単葉函数の拡張として得られたものであるが，1変数の諸定理の多変数（Hilbert空間，Banach空間も含めて）への拡張もあまり進んでおらず，また，多変数の写像として，1変数とは異る性質もあまり得られていない様に思います。

記号：

$\mathbb{C}^n$ の要素を列ベクトル $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ で表し，次の記号を用いる：

$z' := (z_1, \cdots, z_n)$ （転置），$z^* := (\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_n)$（転置共役）

$\|z\| := \sqrt{z^* z} := \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$

$\mathbb{B} := \{ z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1 \}$

$\mathbb{C}^n$ の領域から $\mathbb{C}^n$ への写像 $f(z) := \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{pmatrix}$（列ベクトルで表す）に対して

$$Df(z) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix} \quad \text{(Jacobian行列)}$$

$J_f(z) := \det(Df(z))$ （f の Jacobian）

$J_f(z) \neq 0 \rightleftarrows f(z)$ は局所単葉である。

$\mathcal{H}(\mathcal{D})$：領域 $\mathcal{D}$ から $\mathbb{C}^n$ への正則写像の全体

$\mathcal{S}(\mathcal{D})$：原点 0 を含む領域 $\mathcal{D}$ から $\mathbb{C}^n$ への正規化された（$f(0)=0$, $Df(0)=I$（単位行列））単葉写像 $f(z)$ の全体。

§1. Starlike mappings

1.1. 定義. [1] $f(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{B})$ が starlike であるとは，$\forall t\ (0 \leqq t \leqq 1)$ に対して，$t f(\mathbb{B}) \subset f(\mathbb{B})$（$tf$ は f に subordinate である；これを $tf \prec f$ と表す）となるとき.

$S^*(\mathbb{B})$：$\mathcal{S}(\mathbb{B})$ の starlike mappings の全体.

このとき，次の定理が成り立つ：

1.2. 定理（[7], [11], [12]）　$f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$ を正規化された写像で，$J_f(z) \neq 0$ in $\mathbb{B}$ とする。　このとき，

$$f(z) \in S^*(\mathbb{B}) \rightleftarrows \mathrm{Re}\, z^*(Df(z))^{-1}f(z) > 0 \ (\forall z \in \mathbb{B}, \neq 0) \ \lrcorner$$

この定理は最初，松野[7]によって与えられ，後に，菊地[6]，Suffridge[11], [12]によって再考察され，Hilbert空間に拡張された（[12]）。（また，polydiskに対しても同様の定理が成り立つ[11]。）　この定理は1変数の場合の直接の拡張である，表現法も簡単でstarlikeの判定法としては使い易いものである。

この定理により，starlikeな写像に対する次の増大定理が成り立つ：

1.3. 定理（[1], p.16）．$f(z) \in S^*(\mathbb{B})$ とする。このとき，次の式が成り立つ：

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leqq \|f(z)\| \leqq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2}$$

$\lrcorner$

1.4. 系．$S^*(\mathbb{B})$は（$\mathcal{H}(\mathbb{B})$内の部分集合として）compact uniform topologyでcompactである。　$\lrcorner$

また，次のradial growthに関する定理が成り立つ：

1.5. 系（[13]） $f(z)\in S^*(\mathbb{B})$ は Hayman index $\alpha>0$ を持つとする。 この時次の様な方向 $a\in\mathbb{C}^n$ $(\|a\|=1)$ が存在する：

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^2\|f(ra)\|=\alpha$$

（この方向 a はただ1つとはかぎらない）。 ┘

1.6. 例.

(1) $\mathbb{C}^2$ において

$$f(z)=\begin{pmatrix}\dfrac{z_1}{(1-z_1)}\\[2ex]\dfrac{z_2}{(1-z_1)}\end{pmatrix}$$

(2)

$$f(z)=\begin{pmatrix}\dfrac{z_1}{(1-z_1)^2}\\[2ex]\dfrac{z_2}{(1-z_2)^2}\end{pmatrix}$$

(3) $$f(z)=\frac{1}{(1-\zeta^*z)}z$$

$(\zeta\in\mathbb{C}^n,\ \|\zeta\|=1)$

(4) $$f(z)=\frac{1}{(1-\zeta^*z)^2}z$$

(5) $$f(z)=\frac{1}{1-z'z}z$$

(6) $$f(z)=\frac{4}{\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z'z)^n}{2n+1}\right\}z$$ ┘

本節の諸定理は一般の Hilbert 空間，Banach 空間に拡張できる。

§2. Convex mappings

写像 $f(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{B})$ に対して，$f(\mathbb{B})$ が $\mathbb{C}^n$ の凸領域となるとき，$f(z)$ は convex in $\mathbb{B}$ であるという。1変数の場合には，単位円上の正規化された正則函数 $f(z)$ が convex であるための必要十分条件は，$\mathcal{Re}(1+zf''/f')>0$ となることである。この定理の $\mathbb{C}^n$ への拡張は最初，松野[7]によって与えられ，後，菊地[6]，Suffridge[11]，[12]によって再構成された。これは次の様に与えられる：

2.1. 定理([7],[6]). $f(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{B})$ が convex である

$$\Longleftrightarrow \mathcal{Re}\left\{1 - z^*(Df(z))^{-1}D^2f(z)\alpha^2\right\} > 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C}^n,$$

$$\|\alpha\| = 1 \text{ s.t. } \mathcal{Re}\, z^*\alpha = 0).$$

ここで，$\alpha^2 := (\alpha_1^2, \alpha_1\alpha_2, \cdots, \alpha_1\alpha_n, \alpha_2\alpha_1, \cdots, \alpha_n^2)'$

$$D^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}, \cdots \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_k}, \cdots, \frac{\partial^2}{\partial z_n^2}\right)$$

$\lrcorner$

この定理を用いて，R.W. Barnard, C.H. Fitzgerald and S. Gong [2] は $\mathbb{C}^2$ における歪曲定理を与えている。

2.2. 定理([2]. p.921) $f(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{B})$ が convex in $\mathbb{B}$ ならば，次の式が成り立つ：

$$\frac{(1-\|z\|)^{0.261}}{(1+\|z\|)^{3.261}} < |J_f(z)| < \frac{(1+\|z\|)^{0.261}}{(1-\|z\|)^{3.261}},$$

$$|\arg J_f(z)| < 1.761 \log\left(\frac{1+\|z\|}{1-\|z\|}\right)$$

$\lrcorner$

また，或る種のBanach空間においては，convex mappingは線型写像となる，様な例もあり，convex mappingに関する諸定理を一般のHilbert空間，Banach空間に拡張した場合に意味があるか，ないかを調べておくことが必要である。

§3. Φ-like mappings

Φ-like analytic function の概念はspirallikeの概念の拡張として，Brickman [3] によって与えられた。これを Gurganus [4] は $\mathbb{C}^n$ 及び Banach 空間に拡張した。これは，初期値問題として与えられるもので，広い応用面がある様に思うし，単葉函数（写像）族としても最も広いものである。

3.1. 定義. $\mathcal{D}$ を原点を含む $\mathbb{C}^n$ の領域とし，$\Phi(z) \in \mathcal{H}(\mathcal{D})$ を，$\Phi(0)=0$, $\mathcal{R}e\, z^* D\Phi(0) z > 0$ $(z \in \mathbb{C}^n, \neq 0)$ とする。

(a) $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$, $f(0)=0$, $Df(0)=I$ (identity matrix) $J_f(z) \neq 0$ in $\mathbb{B}$, $f(\mathbb{B})$ は Φ の定義域に含まれるとする。このとき，$f(z)$ が Φ-like in $\mathbb{B}$ であるとは，

$$\mathcal{R}e\, (z^* (Df(z))^{-1} \Phi(f(z))) > 0 \quad (z \in \mathbb{B}, \neq 0)$$

となるものである。

(b) 領域 $\mathcal{D}$ が <u>Φ-like</u> であるとは、$\forall X \in \mathcal{D}$ に対して初期値問題

$$\frac{dw}{dt} = -\Phi(w(t)) \quad , \quad w(0) = X$$

が解 $w(t) \in \mathcal{D}$ $(t \geqq 0)$, $w(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ を持つときである。(ここで解 $w(t)$ が存在すればただ1つである。)

<u>3.2. 定理</u>. ([4])

(a). $f(z)$: Φ-like in $\mathbb{B}$ $\Rightarrow$ $f(z)$: 単葉で、$f(\mathbb{B})$ は Φ-like domain in $\mathbb{C}^n$ である。

(b). $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$, $f(0) = 0$, $Df(0) = I$, $f(\mathbb{B})$: Φ-like domain in $\mathbb{C}^n$ $\Rightarrow$ $f(z)$: Φ-like mapping

$\lrcorner$

<u>3.3. 系</u> $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{B})$, $f(0) = 0$, $Df(0) = I$.

$f(z)$: $\mathbb{B}$ で単葉 $\rightleftarrows$ 或る Φ に対して、$f(z)$ は Φ-like.

<u>3.4. 系</u> $f(z) \in S^*(\mathbb{B})$ $\rightleftarrows$ $f(z)$: I-like

($\Phi(z) = Iz$)

$\lrcorner$

$$A = U^{*}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U,$$ (U: unitary 行列, 各固有値の実部 $\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$)

とし, $\Phi(z) = Az$ のとき, この Φ-like mapping を <u>spirallike</u> in $\mathbb{B}$ という。

本節の諸概念は, 勿論, 一般のBanach空間に拡張出来るが, 函数論的諸性質がどうなっているかはほとんど知られていない, 例えば, Rudinの本[10]にあがっている問題の類似はどうか等.?

文　献

[1] R. W. Barnard, C. H. Fitzgerald, and S. Gong : The growth and $\frac{1}{4}$-theorems for starlike functions in $\mathbb{C}^n$, Pacific J. M. 150 (1991) 13 − 22.

[2] R. W. Barnard, C. H. Fitzgerald, and S. Gong : A distortion theorem for biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^2$, Trans. A. M. S. 344 (1994), 907 − 924.

[3] L. Brickman : Φ-like analytic functions I, Bull. A. M. S. 79 (1973) 555 − 558.

[4] K. Gurganus; Φ-like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces, Trans. A. M. S. 205 (1975) 389 − 406.

[5] L. F. Heath and T. J. Suffridge : Starlike, convex close-to-convex, spirallike, and Φ-like maps in a commutative Banach algebra with identity, Trans. A. M. S. 250 (1979) 195 − 212.

[6] K. Kikuchi : Starlike and convex mappings in several complex variables, Pacific J. M. 44 (1973) 569 − 580.

[7] T. Matsumo : On starlike theorems and convex-like theorems in the complex vector space, Sci.

Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, A. 5 (1955) 88-95.
[8] J. A. Pfaltzgraff : Subordination chains and univalence of holomorphic mappings on $\mathbb{C}^n$, Math. Ann. 210 (1974) 55-68.
[9] J. A. Pfaltzgraff and T. J. Suffridge : Close-to-starlike holomorphic functions of several variables, Pacific J. M. 57 (1975) 271-279.
[10] W. Rudin : Function Theory in the unit ball in $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag. 1980.
[11] T. J. Suffridge : The principle of subordination applied to functions of several variables, Pacific J. M. 33 (1970) 241-248.
[12] T. J. Suffridge : Starlike and convex maps in a Banach space, Pacific J. M. 46 (1973) 575-589.
[13] 鶴見和之 : Radial growth of starlike holomorphic mappings in the unit ball in $\mathbb{C}^n$, 数理解析研究所講究録 946 (1996年4月). 61-69.