数理解析研究所講究録
964 巻 1996 年 51-61

Artin graded rings with the weak Stanley property

四国大経営情報　張間忠人 (TADAHITO HARIMA)

序

weak Stanley property または strong Stanley property をもつ環については，あまり詳しく調べられていないように思う．歴史的には Stanley の論文 [19,20] の中で，the hard Lefschetz theorem が成立している環が登場している．その後，渡辺純三先生の論文 [22] の中で，これらの環が定義された．この論文の Example 3.9 の中で,「ほとんどの Gorenstein 環は SSP をもつ」という結果が述べられている．すなわち，ほとんどの Gorenstein 環の Hilbert 函数は unimodal である．Gorenstein 列の unimodality に関するこの興味深い結果を知り，これらの環に興味を持った．weak (strong) Stanley property をもつ環をここでは簡単に WSP (SSP) 環と呼ぶことにする．

本稿では，まず WSP (SSP) 環の例とその周辺の結果を紹介する (section 2)．次に WSP 環の Hilbert 函数の特徴付けを与え，socle type の上限をその Hilbert 函数の言葉で記述する (section 3)．section 4 では，とくに，与えられた O-列 $h=\{h_0,h_1=2,h_2,\ldots,h_s,\ldots\}$ を Hilbert 函数にもつ Artin 環 $k[x,y]/I$ の socle type をすべて決定する．従って，2 変数の多項式環の準同型像を扱っているので，$k[x,y]/I$ の起こり得る極小自由分解をすべて求めることができる．しかし，この極小自由分解に関する事実は，すでに Campanella により，違ったアプローチで示されている [3,4]．最後に,（$h_1=2$ の level 列の特徴付けを与えている文献を私は見たことがないので，この機会に）$h_1=2$ の level 列の特徴付けを述べておくことにする．

1 weak Stanley property

weak Stanley property の定義を述べて，この性質をもつ環の Hilbert 函数と socle type に関する簡単な考察を行う．

この報告書を通して，体 k はいつも無限体と仮定する．また，Artin 環といえば，いつも $A_0=k$, $A=k[A_1]$ かつ $\dim_k A_1<\infty$ をみたす次数環 $A=\bigoplus_{i=0}^{s}A_i$ $(A_s\neq 0)$ とする．ゆえに，A は多項式環 $k[x_1,\ldots,x_n]$ $(n=\dim A_1)$ の準同型像である．

$H(A,i)=\dim_k A_i$ $(i=0,1,\ldots)$ を A の Hilbert 函数，$F(A,\lambda)=\sum_{i\geq 0}H(A,i)\lambda^i$ を A の Hilbert 級数と言う．$\{a\in A:$ 斉次 $\mid A_1a=0\}$ で生成される A の斉次イデアルを $Soc(A)=\bigoplus_{i=0}^{s}[Soc(A)]_i$ で表し，A の socle と言う．さらに，$S(A,\lambda)=\sum_{i=0}^{s}\dim_k[Soc(A)]_i\lambda^i$ を，A の socle type と言う．

定義. A を Artin 環とする．A と同じ Hilbert 函数をもつ（すなわち $H(A,i)=H(B,i)$ $(i=0,1,\ldots)$ をみたす）Artin 環 B に対して，$S(A,\lambda)\geq S(B,\lambda)$ （すなわち，λ^i の係数がすべて "左辺 $\geq$ 右辺"）であるとき，A は maximal socle type をもつと言う．

定義. $A=\bigoplus_{i=0}^{s}A_i$ を Artin 環，$y\in A_d$ とする．すべての $i=0,1,\ldots$ に対して，線型写像 $A_i\ni a\mapsto ya\in A_{i+d}$ の行列が full rank をもつとき（すなわち，この写像は全射または単射である），y は full rank をもつと言う．次数 1 の full rank をもつ $y\in A_1$ を Lefschetz element と言う．

注意 1.1. $y\in A_d$ とする．$A_l\ni a\mapsto ya\in A_{l+d}$ が全射とすれば，明らかに $i\geq l$ に対して，$A_i\ni a\mapsto ya\in A_{i+d}$ も全射である．

定義 ([22, Definition 3.1])． $A=\bigoplus_{i=0}^{s}A_i$ を Artin 環とする．

(1) Lefschetz element $y\in A_1$ が存在するとき，A は weak Stanley property をもつと言う．このとき，(A,y) と書く．

(2) すべての $i=0,1,\ldots,\lfloor s/2\rfloor$ に対して，$A_i\ni a\mapsto y^{s-2i}a\in A_{s-i}$ が全単射となる $y\in A_1$ が存在するとき，A は strong Stanley property をもつと言う．このとき，(A,y) と書く．

注意 1.2. $A=\bigoplus_{i=0}^{s}A_i$ を Artin 環とする．(A,y) が SSP 環ならば，すべての $d\geq 1$ に対して y^d は full rank をもつ．よって，(A,y) は WSP 環である．

$A_i\ni a\mapsto y^d a\in A_{i+d}$ が全射または単射を示せばよい．$i+d>s$ のときは，$A_{i+d}=0$ なので全射である．

$i+d\leq s$ とする．(A,y) は SSP 環なので，$A_i\ni a\mapsto y^{s-2i}a\in A_{s-i}$ は全単射である．ゆえに $i+d\leq s-i$ のときは，$A_i\to A_{i+d}\to A_{s-i}$ なので，$A_i\to A_{i+d}$ は単射である．$i+d>s-i$ とする．(A,y) は SSP 環なので，$A_{s-(i+d)}\to A_{s-\{s-(i+d)\}}=A_{i+d}$ は全単射である．$s-(i+d)<i$，すなわち $A_{s-(i+d)}\to A_i\to A_{i+d}$，なので，$A_i\to A_{i+d}$ は全射である．

注意 1.3. $(A=\bigoplus_{i=0}^{s}A_i,y)$ を WSP 環とする．

$$t=\mathrm{Min}\{i\mid A_i\ni a\mapsto ya\in A_{i+1}:\text{全射}\}$$

とおく．ゆえに，$t=\mathrm{Min}\{i\mid H(A,i)\geq H(A,i+1)\}$．注意 1.1 より，

$$(*1)\qquad H(A,0)<H(A,1)<\cdots<H(A,t)\geq H(A,t+1)\geq\cdots\geq H(A,s),$$

すなわち A の Hilbert 函数は unimodal であることがわかる．

さらに，

$$(*2)\qquad \Delta H(A,0),\Delta H(A,1),\ldots,\Delta H(A,t),0,0,\ldots\quad\text{は } A/yA \text{ の Hilbert 函数},$$

すなわち O-列であることもわかる (O-列に関しては [18] 参照)．

次に，$[Soc(A)]_i \subset \ker(A_i \ni a \mapsto ya \in A_{i+1})$ に注意する．ゆえに，$i = 0, 1, \ldots, t-1$ に対して，$A_i \ni a \mapsto ya \in A_{i+1}$ は単射なので，$[Soc(A)]_i = 0$．さらに，$i \geq t$ に対して，$A_i \ni a \mapsto ya \in A_{i+1}$ は全射なので，$\dim_k \ker(A_i \ni a \mapsto ya \in A_{i+1}) = H(A,i) - H(A,i+1)$ である．よって，

$$(*3) \qquad S(A,\lambda) \leq \sum_{i=t}^{s} \{H(A,i) - H(A,i+1)\}\lambda^i$$

を得る．

WSP 環 A の Hilbert 函数の最大の値を $s(A)$，$s(A) = \mathrm{Max}\{H(A,i)\}$，で表す．$s(A)$ を A の Sperner number と言う [22]．このとき，$s(A) = \sum_{i=t}^{s}\{H(A,i) - H(A,i+1)\}$ なので，A の Cohen-Macaulay type $S(A, \lambda = 1)$ は $s(A)$ 以下である．

2 WSP または SSP をもつ環の例

WSP または SSP をもつ環の例とその周辺の結果を紹介して，いくつかの問題を整理する．

まず，2 変数以下の多項式環の準同型について考える．

例 2.1. 明らかに，$(k[x]/(x^{s+1}), \overline{x})$ は SSP 環である．

命題 2.2. I を $R = k[x,y]$ の斉次イデアルで R/I が Artin 環とする．このとき，$A = R/I$ は WSP 環である．

証明. $I = I_d \bigoplus I_{d+1} \bigoplus \cdots$ として，I_d から non-zero な元 f を 1 つとってくる．$B = R/fR = \bigoplus_{i \geq 0} B_i$ は 1 次元の C-M 次数環なので，non-zero divisor $g \in B_1$ がとれる．次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccccccc}
B_0 & \xrightarrow{g} & B_1 & \xrightarrow{g} & \cdots & \xrightarrow{g} & B_s & \xrightarrow{g} & B_{s+1} & \cdots \\
\varphi\downarrow & & \varphi\downarrow & & & & \varphi\downarrow & & \varphi\downarrow & \\
A_0 & \xrightarrow{\overline{g}} & A_1 & \xrightarrow{\overline{g}} & \cdots & \xrightarrow{\overline{g}} & A_s & \xrightarrow{\overline{g}} & 0 & \cdots
\end{array}$$

ここで，$\varphi : B \to A$ は canonical homomorphism である．B の Hilbert 函数が $1, 2, \cdots, d, d, \cdots$ となることと，g が non-zero divisor であることに注意すると

$$B_i \to B_{i+1} \text{は} \begin{cases} \text{単射} & 0 \leq i \leq d-2 \\ \text{全単射} & d-1 \leq i \end{cases}$$

がわかる．また，

$$B_i \to A_i \text{は} \begin{cases} \text{全単射} & 0 \leq i \leq d-1 \\ \text{全射} & d \leq i \end{cases}$$

である．ゆえに，

$$A_i \to A_{i+1} \text{は} \begin{cases} \text{単射} & 0 \leq i \leq d-2 \\ \text{全射} & d-1 \leq i. \end{cases}$$

よって，$(A,\overline{g})$ は WSP 環である． □

問題 2.3． $A = k[x,y]/I$ を Artin 環とする．

(1) A の Lefschetz element y で，すべての $i \geq 1$ に対して y^i が full rank をもつものが存在するか ？

(2) A の Hilbert 函数が対称的であるとき，A は SSP 環であるか ？

(3) A が complete intersection であれば，A は SSP 環であるか ？

例 2.4． 3変数に関しては，命題 2.2 は成立しない．例えば，$A = k[x,y,z]/(x^2, xy, xz, y^3, y^2z, yz^2, z^4)$ は WSP 環ではない．A の Hilbert 函数は $1,3,3,1,0,0,\cdots$ であり，socle type $S(A,\lambda) = \lambda + 2\lambda^2 + \lambda^3$ である．ゆえに，(*3) が成立しないので，A は WSP 環でない．この上の単項式イデアルは，lexsegment と呼ばれる重要な単項式イデアルのクラスに入る．Bigatti と Hulett は，それぞれ独立に，Hilbert 函数を固定したとき，ベッチ列の上限は lexsegment イデアルで与えられることを示した [2,15]．これは，一般の場合の，非常に興味深い事実である．そこで，この問題を WSP 環のクラスに制限して考えてみるとどうなるか．この例からもわかるように，その答は lexsegment イデアルで与えられるとは限らない．また違った興味深いイデアルのクラスが見つかるかもしれない．

問題 2.5． WSP 環のクラスにおいて，Hilbert 函数を固定したとき，ベッチ列の上限を与えるイデアルはどんなものたちか ？

次に Gorenstein 環のクラスの中で，WSP 環または SSP 環の構成方法に関するいくつかの事実を紹介する．

命題 2.6 ([22, Corollary 3.5])． $(A = \bigoplus A_i, g)$，$(B = \bigoplus B_i, h)$ を SSP 環として，$A_0 = B_0 = k$ とする．このとき，$(A \bigotimes B, g \bigotimes 1 + 1 \bigotimes h)$ もまた SSP 環である．とくに，$(k[x_1,\ldots,x_n]/(x_1^{e_1},\ldots,x_n^{e_n}), \overline{x_1 + \cdots + x_n})$ は SSP 環である．

問題 2.7． complete intersection は SSP（または WSP）環か ？

定理 2.8 ([22, Theorem 3.8 (2),(3)])． $(A = \bigoplus_{i=0}^{s} A_i, g)$ を SSP 環，$f \in A_d$ を general な元とする．このとき，

(1) f が $A/0:g$ に対しても general な元であるとき，$(A/0:f,\overline{g})$ は WSP 環である．

(2) f が $A/0:g^i (i = 1,\ldots,s)$ に対しても general な元であるとき，$(A/0:f,\overline{g})$ は SSP 環である．

WSP をもつ Gorenstein 環の Hilbert 函数の特徴としては，対称的であって，前半の差分が O-列であることが簡単にわかる．すなわち，$h = \{h_0, h_1, \ldots, h_s, 0, \ldots\}$ を WSP をもつ Gorenstein 環の Hilbert 函数とすると，$h_{s-i} = h_i (i = 0,1,\ldots,\lfloor s/2 \rfloor)$ であって，$\{h_0, h_1 - h_0, \ldots, h_{\lfloor s/2 \rfloor} - h_{\lfloor s/2 \rfloor - 1}, 0, \ldots\}$ が O-列である．この逆も成立する．

定理 2.9 ([10, Theorem 1.2])． $h = \{h_0, h_1 = n+1, \ldots, h_s, 0, 0, \ldots\}$ を，対称的でありかつ前半の差分が O-列であるような数の列とする．このとき，$\mathbf{P}^n$ の有限個の点からなる 2 つ

の集合 X と Y をうまくとると，$k[x_0, x_1, \ldots, x_n]/I(X)+I(Y)$ は WSP をもつ Gorenstein 環で，その Hilbert 函数は h となるようにできる．ただし，$I(X)$ と $I(Y)$ は X と Y の定義イデアルである．

Diesel [6]（さらに Geramita, Migliore [8]）は，codimension 3 の Gorenstein 環のクラスの中で，Hilbert 函数を固定したときの可能なベッチ列をすべて求め，逆に，与えられた Hilbert 函数とベッチ列をもつ Gorenstein 環を構成している．定理 2.9 で得られた具体例をより詳しく調べてみると，与えられた Hilbert 函数に対して何通りかの Gorenstein 環が構成ができて，それらのベッチ列たちは上の可能なものすべてであることがわかった．すなわち：

定理 2.10 ([11]). 与えられた Hilbert 函数とベッチ列をもつ Gorenstein 環が WSP のクラスの中で構成できる．

定理 2.9, 2.10 の証明で，実際のイデアルの構成では，linkage 理論の基本的な事実「幾何的に link する 2 つのイデアルの和は Gorenstein である」を使った．このようなイデアルで定義される Gorenstein 環の Hilbert 函数はわりと自由に扱うことができる [9]. 最近，この基本的な事実を使っての Gorenstein 環の研究が盛んに行われている ([8,16] 等参照).

Stanley [18] の codimension 3 の Gorenstein 列の特徴付けからも次が予想される．

予想 2.11. Gorenstein Artin greded ring $k[x, y, z]/I$ は WSP （または SSP）をもつ．

5 変数以上では，non-unimodal な Hilbert 函数をもつ Gorenstein Artin 環が存在する [1] から，この予想は 5 変数以上では成立しない．

問題 2.12. non-unimodal な Hilbert 函数をもつ codimension 4 の Gorenstein 環は存在するか ?

問題 2.13. SSP（または WSP）環にどんな条件があれば Gorenstein 環になるか ?

問題 2.14. I と J を $R = k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ の高さ n の Cohen-Macaulay イデアルで，$Ass(R/I) \cap Ass(R/J) = \phi$ とする．このとき，$R/I + J$ は WSP 環であるか ?

3 maximal socle type をもつ WSP 環の例

section 1 の注意 1.3 で考察したように，定義から簡単に WSP 環の Hilbert 函数のもつべき性質，すなわち unimodal であって前半の差分が O-列である，はすぐわかる．さらに，socle type についても 1 つの upper bound を与えることができた．次に，我々はこれらの逆を示す．すなわち，前半の差分が O-列 であるような unimodal 列に対して，それを Hilbert 函数にもつ WSP 環で，しかも (*3) において等号が成立する例を構成する．

定義. 数の列 $h = \{h_0, h_1, \ldots, h_s, 0, \ldots\}$ が unimodal であって，前半の差分が O-列であるとき，すなわち，

(1) $h_0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_t \geq h_{t+1} \geq \cdots \geq h_s > 0$,
(2) $\{h_0, h_1 - h_0, \ldots, h_t - h_{t-1}, 0, \ldots\}$ が O-列,
（とりあえずここでは）h を WSP-列と呼ぶことにする．さらに，WSP-列 h に対して，

$$\Phi_h(\lambda) = \sum_{i=t}^{s}(h_i - h_{i+1})\lambda^i$$

とおく．

定理 3.1. $h = \{h_0, h_1, \ldots, h_s, 0, \ldots\}$ を O-列とする．このとき，h がある WSP 環の Hilbert 函数であるための必要充分条件は h が WSP-列であることである．さらに，h を Hilbert 函数にもつ WSP 環 A に対して，$S(A,\lambda) \leq \Phi_h(\lambda)$ が成立して，また等号を与える WSP 環も存在する．

証明. 注意 1.3 から後は，与えられた WSP-列 h に対して，それを Hilbert 函数にもつ WSP 環 A で $S(A,\lambda) = \Phi_h(\lambda)$ が成立する例を構成すればよい．

まず，$u_1, \ldots, u_l$ を $u_1 = \mathrm{Min}\{i \mid h_i \geq h_{i+1}\}$，もし $u_j > s$ ならば，以下順次 $u_{j+1} = \mathrm{Min}\{i > u_j \mid h_{i-1} > h_i\}$ で定義する，すなわち

$$h_0 < \cdots < h_{u_1} = \cdots = h_{u_2 - 1} > h_{u_2} = \cdots = h_{u_3 - 1} > h_{u_3} \cdots > h_{u_l} = \cdots = h_s > h_{u_{l+1}} = 0.$$

$n = h_1 - 1$ とおく．WSP-列の定義から数の列 $b = \{h_0, h_1, \ldots, h_{u_1}, h_{u_1}, \ldots\}$ は differentiable O-列であるので，[7] によって，$\mathbf{P}^n$ の有限個の点からなる集合 X で，その Hilbert 函数が b であるものが存在する（[7] ではその具体的な構成方法を与えている）．次に，X の部分集合の列: $X = X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_l$ で，各 X_j の点の個数が h_{u_j} であるものをとってくる．そして各 X_j の定義イデアルを $I^{(j)} = \bigoplus_{i \geq 0}[I^{(j)}]_i$ で表す．明らかに，$I^{(1)} \subset \cdots \subset I^{(l)}$．そこで，次のイデアルを考える:

$$I = (\bigoplus_{i=0}^{u_2-1}[I^{(1)}]_i) \bigoplus (\bigoplus_{i=u_2}^{u_3-1}[I^{(2)}]_i) \bigoplus \cdots \bigoplus (\bigoplus_{i=u_{l-1}}^{u_l-1}[I^{(l-1)}]_i) \bigoplus (\bigoplus_{i=u_l}^{s}[I^{(l)}]_i) \bigoplus m^{s+1}$$

ただし，$m = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \subset R = k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$．$A = R/I$ とおく．この A が求めるものである．

A の Hilbert 函数が h であること : $B^{(j)} = R/I^{(j)} = \bigoplus[B^{(j)}]_i$ とおく．すべての j に対して $H(B^{(j)}, i) = h_{u_j}$ $(i \geq u_1)$ となることに注意する．ゆえに，$A_i = [B^{(1)}]_i$ $(0 \leq i \leq u_2 - 1)$，$A_i = [B^{(j)}]_i$ $(u_j \leq i \leq u_{j+1} - 1)$，$A_i = 0$ $(s + 1 \leq i)$ なので，A の Hilbert 函数は h と一致する．

A が WSP 環であること : すべての j $(1 \leq j \leq l)$ に対して，x_0 は mod $I^{(j)}$ で non-zero divisor と仮定してよい．さらに，次の可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
[B^{(j)}]_{u_{j+1}-1} & \xrightarrow{x_0} & [B^{(j)}]_{u_{j+1}} & \twoheadrightarrow & [B^{(j+1)}]_{u_{j+1}} \\
\| & & & & \| \\
A_{u_{j+1}-1} & & \xrightarrow{x_0} & & A_{u_{j+1}}
\end{array}$$

に注意することにより，A が WSP 環であることは簡単にわかる．

$S(A,\lambda)=\Phi_h(\lambda)$ であること：実際，

$$[Soc(A)]_{u_{j+1}-1}=[I^{(j+1)}]_{u_{j+1}-1}/[I^{(j)}]_{u_{j+1}-1}$$

であることがわかり，さらに，

$$\begin{aligned}\dim_k\{[I^{(j+1)}]_{u_{j+1}-1}/[I^{(j)}]_{u_{j+1}-1}\} &= H(B^{(j)},u_{j+1}-1)-H(B^{(j+1)},u_{j+1}-1)\\ &= h_{u_j}-h_{u_{j+1}}\end{aligned}$$

である．よって，$S(A,\lambda)=\Phi_h(\lambda)$ である． □

上で構成したイデアルは，WSP 環のクラスで Hilbert 函数を固定したときの，最後のベッチ列の上限を与えている例になっている．

問題 3.2. maximal socle type をもつ WSP 環は，ある特別なイデアルの filtration から構成できていないか ?

4 Artin 環 $k[x,y]/I$ の極小自由分解

定義. O-列 $h=\{h_0,h_1=2,h_2,\ldots,h_s,\ldots\}$ に対して，

$$\begin{aligned}F_h(\lambda) &= \textstyle\sum_{i\geq 0}h_i\lambda^i\\ \Phi_h(\lambda) &= \textstyle\sum_{i\geq 0}\mathrm{Max}\{0,h_i-h_{i+1}\}\lambda^i\\ \Phi'_h(\lambda) &= \textstyle\sum_{i\geq 2}\mathrm{Max}\{0,\Delta^2 h_i\}\lambda^{i-2}\end{aligned}$$

とおく．ここで，$\Delta^2 h_i$ は h の 2 回差分である．

定理 4.1. $h=\{h_0,h_1=2,h_2,\ldots,h_s,\ldots\}$ を O-列とする．このとき，

(1) h を Hilbert 函数にもつ Artin 環 $A=k[x,y]/I$ に対して，

$$\Phi'_h(\lambda)\leq S(A,\lambda)\leq\Phi_h(\lambda)$$

が成立する．

(2) 逆に，$\Phi'_h(\lambda)\leq S(\lambda)\leq\Phi_h(\lambda)$ をみたす $S(\lambda)$ に対して，h を Hilbert 函数にもつ Artin 環 $A=k[x,y]/I$ で，$S(A,\lambda)=S(\lambda)$ となるものが存在する．

証明. (1) に関しては，定理 3.1 と次の section の補題 5.2 からわかる．

(2) に関しては，実際 I として，単項式イデアルで構成することができる．詳しいことは省略する． □

O-列 $h=\{h_0,h_1=2,h_2,\ldots,h_s,\ldots\}$ を Hilbert 函数にもつ Artin 環 $A=k[x,y]/I$ の極小自由分解を

$$0\longrightarrow\bigoplus_{j=1}^{m-1}R(-p_j)\longrightarrow\bigoplus_{j=1}^{m}R(-q_j)\longrightarrow R(0)\longrightarrow A\longrightarrow 0$$

$(p_j > 0, q_j > 0)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} F_h(\lambda) &= \frac{1 - \sum_{j=1}^{m} \lambda^{q_j} + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{p_j}}{(1-\lambda)^2}, \\ S(A,\lambda) &= \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{p_j - 2} \end{aligned}$$

に注意する．起こり得る socle type $S(A,\lambda)$ は，定理 4.1 からすべて計算できるので，上の関係から起こり得る $\{p_i\}$，$\{q_i\}$ の組もすべて求めることができる．

5 $h_1 = 2$ の level 列

Artin 環 $A = \bigoplus_{i=0}^{s} A_i$ に対して，明らかに $Soc(A) \supset A_s$ が成立する．そこで：

定義 ([17]). $Soc(A) = A_s$ が成立する Artin 環 $A = \bigoplus_{i=0}^{s} A_i$ を level 環と呼ぶ．また，O-列 $h = \{h_0, h_1, \ldots, h_s, 0, \ldots\}$ が，ある level 環 の Hilbert function であるとき h を level 列と言う（level 環，level 列に関しては [13,14,17] 等参照）．

$h_1 = 2$ の level 列は次のように特徴付けられる．

定理 5.1. $h = \{h_0, h_1 = 2, h_2, \ldots, h_s, 0, \ldots\}$ $(h_s > 0)$ を O-列とする．h が level 列である必要充分条件は，h の 1 回差分の数の列 Δh が unimodal であることである．

2つの補題を準備する．まず：

補題 5.2. Artin 環 $A = k[x,y]/I$ の Hilbert 函数を $h = \{h_0, h_1 = 2, h_2, \ldots, h_s, 0, \ldots\}$ とする．もし $\Delta^2 h_{i+2} > 0$ であれば，$\dim[Soc(A)]_i \geq \Delta^2 h_{i+2}$ が成立する．

証明. Artin 環 $A = k[x,y]/I$ の極小自由分解を

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m-1} R(-p_j) \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} R(-q_j) \longrightarrow R(0) \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$(p_j > 0, q_j > 0)$ とする．このとき

$$Soc(A) = \bigoplus_{j=1}^{m-1} k(-p_j + 2)$$

に注意する．ゆえに

$$\dim[Soc(A)]_i = \#\{j \mid p_j - 2 = i\}.$$

また $F(A,\lambda)$ は次のような2通りの表し方がある：

$$\begin{aligned} F(A,\lambda) &= \frac{1 - \sum_{j=1}^{m} \lambda^{q_j} + \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{p_j}}{(1-\lambda)^2}, \\ F(A,\lambda) &= \frac{\sum_{i=0}^{s+2} \Delta^2 h_i \lambda^i}{(1-\lambda)^2}. \end{aligned}$$

ゆえに $\Delta^2 h_{i+2} > 0$ であれば,

$$\#\{j \mid p_j - 2 = i\} \geq \Delta^2 h_{i+2}.$$

よって

$$\dim[Soc(A)]_i \geq \Delta^2 h_{i+2}$$

がわかる. □

次に, 単項式イデアルで定義される Artin 環の Hilbert 函数と socle type を計算する. 証明は, 簡単な計算の繰り返しなので省略する.

補題 5.3. $R = k[x,y]$ の単項式イデアル

$$I = (y^{b_1}, y^{b_2}x^{a_1}, \ldots, y^{b_l}x^{a_{l-1}}, x^{a_l})$$

に対して, 次が成立する. ただし $0 < a_1 < \cdots < a_l$, $b_1 > \cdots > b_l > 0$ とする. さらに, $c_1 = a_1, c_i = a_i - a_{i-1}$ $(2 \leq i \leq l), a_0 = 0$ とおく.

(1) $F(R/I,\lambda) = \sum_{i=1}^{l} \lambda^{a_{i-1}} \frac{(1-\lambda^{b_i})(1-\lambda^{c_i})}{(1-\lambda)^2}$.

(2) $S(R/I,\lambda) = \sum_{i=1}^{l} \lambda^{a_i+b_i-2}$.

(3) R/I が level 環であるための必要充分条件は, すべての $i \neq j$ に対して $a_i + b_i = a_j + b_j$ であることである.

定義. $0 < r_1 \leq \cdots \leq r_e$ であるような整数の組 $(r_1, \ldots, r_e)$ に対して, 次のような元の個数が $r_1 + \cdots + r_e$ の有限集合を考える:

$$P = \{\alpha^i \beta^j \mid 1 \leq i \leq e, 1 \leq j \leq r_i\}$$

この集合を次の r_e 個の部分集合に分割し, その部分集合の元の個数をそれぞれ $s_1, \ldots, s_{r_e}$ とする:

$$P = \{\alpha^i \beta^1\} \cup \cdots \cup \{\alpha^i \beta^{r_e}\},\ s_j = \#\{\alpha^i \beta^j\}\ (1 \leq j \leq r_e).$$

すなわち s_j $(1 \leq j \leq r_e)$ はβ のべきが j であるような元 $\alpha^i\beta^j$ の個数である. このとき, 次の順の組 $(s_{r_e}, s_{r_e-1}, \ldots, s_2, s_1)$ を $\theta(r_1, \ldots, r_e)$ で表す.

定理 5.1 の証明. h は $h_1 = 2$ の O-列なので, $u = \mathrm{Min}\{i \mid h_{i-1} > h_i\}$ とおくと, その 1 回差分は

$$\Delta h = \{1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0, \Delta h_u, \ldots, \Delta h_{s+1}, 0, \ldots\}$$

のようになっている. $\Delta h_u < 0, \Delta h_{s+1} < 0$ に注意する.

h は level 列であると仮定する. すなわち, h を Hilbert 函数にもつ level 環 $A = R/I$ が存在する. このとき, もし Δh は unimodal でないとすると, $\Delta h_{i-1} < \Delta h_i$ すなわち

$\Delta^2 h_i > 0$ となる $u < i \leq s+1$ が存在する．ゆえに，補題 5.2 から $\dim[Soc(A)]_{i-2} > \Delta^2 h_i$．$i-2 < s$ なので，これは A が level 環であるということに反する．

逆に Δh は unimodal であると仮定する．すなわち，$0 > \Delta h_u \geq \cdots \geq \Delta h_{s+1}$．さて，$h$ を Hilbert 函数にもち socle type が $h_s\lambda^s$ であるような level 環を構成しよう．$r_1 = -\Delta h_u, r_2 = -\Delta h_{u+1}, \ldots, r_e = -\Delta h_{s+1}$ とおくと，$0 < r_1 \leq \cdots \leq r_e$．そこで，$\theta(r_1, \ldots, r_e) = (c_1, \ldots, c_{r_e})$ とする．さらに，$a_1 = c_1, a_i = c_i + a_{i-1}$ $(2 \leq i \leq r_e)$，$b_i = s + 2 - a_i$ $(1 \leq i \leq r_e)$ とおく．次の単項式イデアルを考える：

$$I = (y^{b_1}, y^{b_2}x^{a_1}, \ldots, y^{b_l}x^{a_{l-1}}, x^{a_l}),$$

ただし $l = r_e$．このとき，補題 5.3 を使って $H(k[x,y]/I) = h$，$S(k[x,y]/I, \lambda) = h_s\lambda^s$ が確認できる．ゆえに $k[x,y]/I$ が求めるもの level 環である．　□

参考文献

[1] D. Bernstein and A. Iarrobino, A nonunimodal graded Gorenstein Artin algebra in codimension five, *Comm. Algebra*, **20** (8) (1992), 2323-2336.

[2] A. M. Bigatti, Upper bounds for the Betti numbers of a given Hilbert function, *Comm. Algebra* **21** (1993), 2317-2334.

[3] G. Campanella, Standard bases of perfect homogeneous polynomial ideals of height 2, J. Algebra, **101** (1986), 47-60.

[4] G. Campanella, Homogeneous polynomial ideals: standard basis and liaison, *J. Pure Appl. Algebra* **64** (1990), 119-130.

[5] E. Davis, A. V. Geramita and P. Maroscia, Perfect homogeneous ideals: Dubreil's theorems revisited, *Bull. Sci. Math.* (2) **108** (1984), 143-185.

[6] S. J. Diesel, Irreducibility and dimension theorems for families of height 3 Gorenstein algebras, to appear in *Pacific J. Math.*.

[7] A. V. Geramita, P. Maroscia and L. G. Roberts, The Hilbert function of a reduced K-algebra, *J. London Math. Soc.* **28** (1983), 443-452.

[8] A. V. Geramita and J. Migliore, Reduced Gorenstein codimension three subschemes of projective space, preprint.

[9] T. Harima, Some examples of umnimodal Gorenstein sequences, *J. Pure and Appl. Algebra* **103** (1995), 313-324.

[10] T. Harima, Characterization of Hilbert functions of Gorenstein Artin algebras with the weak Stanley property, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 3631-3638.

[11] T. HARIMA, untitled, in preparation.

[12] T. HARIMA AND H. OKUYAMA, The conductor of some special points in $\mathbf{P}^2$, *J. Math. Tokushima University* **28** (1994), 5-18.

[13] T. HIBI, Level rings and algebras with straightening laws, *J. Algebra* **117** (1988), 343-362.

[14] T. HIBI, Flawless O-sequences and Hilbert functions of Cohen-Macaulay integral domains, *J. Pure and Appl. Algebra* **60** (1989), 245-251.

[15] H. A. HULETT, Maximum Betti numbers of homogeneous ideals with a given Hilbert function, *Comm. Algebra* **21** (1993), 2335-2350.

[16] J. C. MIGLIORE AND C. PETERSON, A construction of codimension three arithmetically Gorenstein subschemes of projective space, preprint.

[17] R. STANLEY, Cohen-Macaulay complexes, in: M. Aigner, ed., Higher Combinatorics (Reidel, Dordrecht, 1977) 51-62.

[18] R. STANLEY, Hilbert functions of graded algebras, *Adv. in Math.* **28** (1978), 57-83.

[19] R. STANLEY, The nmber of faces of a simplicial convex polytope, *Adv. in Math.* **35** (1980), 236-238.

[20] R. STANLEY, Weyl groups, the Lefschetz theorem, and the Sperner property, SIAM *J. Algebra, Disc. Math.* **1** (1980), 168-184.

[21] J. WATANABE, m-Full ideals, *Nagoya Math. J.* **106** (1987), 101-111.

[22] J. WATANABE, The Dilworth number of Artinian rings and finite posets with rank function, " Commutative algebra and Combinatorics ", *Advanced Studies in Pure Math.* **11** (1987), 303-312.

[23] J. WATANABE, The Dilworth number of Artin Gorenstein rings, *Adv. in Math.* **76** (1989), 194-199.

DEPARTMENT OF MANAGEMENT AND INFORMATION SCIENCE, SHIKOKU UNIVERSITY, FURUKAWA OHJIN-CHO, TOKUSHIMA 771-11, JAPAN
E-mail address: harima@keiei.shikoku-u.ac.jp