数理解析研究所講究録
965 巻 1996 年 183-189

セルバーグゼータ関数のガンマ因子と ルエルゼータ関数の関数等式について

東京大学数理科学　権　寧魯 (Yasuro GON)

1 序

Kを $[K:\mathbf{Q}]<\infty$ なる代数体とし, $\zeta_K(s)$ で Dedekind ゼータ関数とする. 完備 Dedekind ゼータ関数 $\widehat{\zeta_K}(s)=\zeta_K(s)\cdot\Gamma_K(s)$ は対称な関数等式: $\widehat{\zeta_K}(1-s)=\widehat{\zeta_K}(s)$ を持つ. ここでガンマ因子は:

$$\Gamma_K(s)=|D_K|^{\frac{s}{2}}\Gamma_{\mathbf{R}}(s)^{r_1(K)}\Gamma_{\mathbf{C}}(s)^{r_2(K)},$$

D_Kは Kの判別式, $r_1(K)$ と $r_2(K)$ はそれぞれ Kの実素点, 複素素点の個数. ガンマ因子の表示より$\Gamma_{\mathbf{R}}(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})$, $\Gamma_{\mathbf{C}}(s)=\Gamma_{\mathbf{R}}(s)\Gamma_{\mathbf{R}}(s+1)$ は無限素点に対応するガンマ因子の"基底"と思うことができる.

この稿では、**Selberg ゼータ関数の"ガンマ因子"**について上の類似を考えることにする. (Cf. Vignéras[7], Sarnak[6], Kurokawa[4]) 主な結果は K-type つき Selberg ゼータ関数のガンマ因子の多重ガンマ関数による明示公式 (Theorem 1) と, さらにその応用として得られるコンパクト $2n$ 次元実双曲空間 Xの Ruelle ゼータ関数 $R(s)$ の関数等式の易しい証明 (Theorem 2) である:

$$R(s)\cdot R(-s)=(-4\sin^2(\pi s))^{n\cdot(-1)^{n-1}vol(X)}$$

2 Selberg ゼータ関数

Gを実階数1の連結ノンコンパクト半単純 Lie 群で中心が有限, Kをその極大コンパクト部分群, Γを Gのその商がコンパクトなる離散部分群で自明でない有限位数の元を持たないとする. すると $X=\Gamma\backslash G/K$ は階数1のコンパクト局所対商空間になる. 与えられた Kの既約ユニタリ表現 τに対して, Wakayama [8] によって導入された Xの K-type つき Selberg ゼータ関数を $Z_\tau(s)$ によって表そう.

例えば, Xを種数 $g\geq 2$ なるコンパクトリーマン面とする. $X=\Gamma\backslash H$ ここで, $H=SL(2,\mathbf{R})/SO(2)$ は上半平面であり, Γ は基本群$\pi_1(X)$ で $SL(2,\mathbf{R})$ に離散的に埋めこまれている. トリヴィアル τに対して, コンパクトリーマン面の Selberg ゼータ関数は次のオイ

ラー積で定義される:

$$Z(s)=\prod_{p\in P_\Gamma}\prod_{k=0}^{\infty}(1-N(p)^{-(k+s)}).$$

ここで、P_Γ はすべての素な双曲共役類から成る集合で, ノルム関数 $N(p)=\max\{|$ 固有値 of $p|^2\}$. 他の階数 1 の Lie 群や非自明なτに対しても, $Z_\tau(s)$ は同様に多少複雑なオイラー積で定義される.

Selberg-Gangolli[2]-Wakayama[8] によれば:
$Z_\tau(s)$ は $\mathbf{C}$ 上有理型に解析接続され, τ-スペクトラム:

$$\widehat{G}_\tau=\left\{\pi\in\widehat{G}\quad|\quad m_\Gamma(\pi)>0,\quad \pi|_K\ni\tau\right\},$$

についての情報をその零点の位置と位数で与えるゼータ関数となる. ここで $m_\Gamma(\pi)$ は G の $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上への右正則表現 π_Γ における G のユニタリ表現πの重複度. 但し$\widehat{G}$は G の既約ユニタリ表現の同値類の集合で他の群に対しても同様に$\widehat{K}$等と表すことにする. (我々の場合, $m_\Gamma(\pi)$ はすべてのπで有限.)

$Z_\tau(s)$ はさらに次の関数等式を持つ:

$$Z_\tau(2\rho_0-s)=\exp(\int_0^{s-\rho_0}\Delta_\tau(t)dt)Z_\tau(s). \tag{1}$$

ここで, $\rho_0>0$ は G のみに依存する定数であり、$\Delta_\tau(t)$ は K-type τつき"Plancherel"密度であり, その明示公式は [8] 等. これ以降,([5] に従って) 再正規化されたρ_0 と $\Delta_\tau(t)$ を使うことにする.

3 ガンマ因子

関数等式 (1) にあらわれる指数因子をガンマ因子$\Gamma_\tau(s)$ によって$\Gamma_\tau(s)/\Gamma_\tau(2\rho_0-s)$ なるようにあらわしたい. そうすれば完備化された Selberg ゼータ関数$\widehat{Z_\tau}(s)=Z_\tau(s)\cdot\Gamma_\tau(s)$ は対称な関数等式をみたす:

$$\widehat{Z_\tau}(2\rho_0-s)=\widehat{Z_\tau}(s) \tag{2}$$

ガンマ因子は Plancherel 密度に強く依存するわけだが

$$\Delta_\tau(t)=vol(X)\sum_{\sigma\in\widehat{M}}[\sigma:\tau|_M]\cdot\mu_\sigma(\sqrt{-1}t)$$

となり, ここで$\mu_\sigma(r)$ は各σに対応する A の Lie 環 $\mathfrak{a}$ の dual space 上の Plancherel 測度. ここで Mは A の Kにおける中心化群で, $G=KAN$を岩沢分解とする. (ゼータ関数自身も $Z_\tau(s)=\prod_{\sigma\in\widehat{M}}Z_\sigma(s)^{[\sigma:\tau|_M]}$の様に分解する. これら表現つき Selberg ゼータ関数 $Z_\tau(s)$,$Z_\sigma(s)$ を一般化された Selberg ゼータ関数と呼ぶこともある. 表現が自明なときは Selberg 自身や Gangolli[2] によって考えられたものと一致.) もし $\dim X$が奇数なら, Plancherel 密度 $\Delta_\tau(t)$ は多項式となり"ガンマ因子"は自明である. 以降では $\dim X$が偶数を仮定する, i.e.

$G = SO(2n,1)$, $SU(n,1)$, $Sp(n,1)$, F_4のうちのどれかとする．このときは Plancherel 密度 $\Delta_\tau(t) = \sum_{\text{有限和}}(\text{奇数次多項式})\pi(\tan(\pi t))^{\pm 1}$ で与えられる．

結果を述べる為に以下の定義をする．

Definition 3.1 Kの既約ユニタリ表現 τに対しそれに付随した2つの"*Plancherel* 多項式" $P_\tau(t)$ と $Q_\tau(t)$ を次の式で定義，

$$(-1)^{\dim X/2} vol(X)^{-1}\Delta_\tau(t) = -P_\tau(t)\pi\cot(\pi t) + Q_\tau(t)\pi\tan(\pi t).$$

これらの多項式は $(\dim X - 1)$ 次の奇数次多項式 *(*以下，奇多項式*)* となり，最高次の係数は正である．

Theorem 1 *(a)* $X = \Gamma\backslash G/K$を階数1の偶数次元コンパクト局所対称空間とする．$\tau \in \widehat{K}$ に対して $Z_\tau(s)$ のガンマ因子$\Gamma_\tau(s)$ は次のようにあらわされる*:*

$$\begin{aligned}\Gamma_\tau(s) \quad &= \quad \prod_{\ell=1}^{\dim X/2} \Gamma_{(0,\ell)}(s)^{(-1)^{\ell-1}P_\tau(\dim X/2-\ell+1)} \\ &\quad\times \prod_{\ell=1}^{\dim X/2} \Gamma_{(1,\ell)}(s)^{(-1)^{\ell-1}Q_\tau(\dim X/2-\ell+\frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

ここで，$\Gamma_{(0,\ell)}(s)$ と$\Gamma_{(1,\ell)}(s)$ はガンマ因子を構成する基本的因子 *(*以下，基底と呼ぶ *)* であり表現 τ には独立である． 簡単の為 $c(X) = (-1)^{\dim X/2-1}vol(X)$ とおく，するとこれらのガンマ因子の基底は位数 $\dim X$の多重ガンマ関数の積となる*:*

$$\Gamma_{(0,\ell)}(s) = \left[\prod_{k=-(\ell-1)}^{\ell-1} \Gamma_{\dim X}(s - \rho_0 + \frac{\dim X}{2} + k)^{(-1)^k\binom{\dim X}{\ell-|k|-1}}\right]^{c(X)},$$

and

$$\Gamma_{(1,\ell)}(s) =$$
$$\left[\prod_{k=0}^{\ell-1}\left(\Gamma_{\dim X}(s-\rho_0+\frac{\dim X}{2}-k-\frac{1}{2})\Gamma_{\dim X}(s-\rho_0+\frac{\dim X}{2}+k+\frac{1}{2})\right)^{(-1)^k\binom{\dim X}{\ell-k-1}}\right]^{c(X)}.$$

(b) ガンマ因子 $\Gamma_\tau(s)$ は *Plancherel*多項式 $P_\tau(t)$ と $Q_\tau(t)$ のみで決まる．τ, $\tau' \in \widehat{K}$とすれば，

$$\begin{aligned}& \Gamma_\tau(s) = \Gamma_{\tau'}(s) \\ \Longleftrightarrow\quad & P_\tau(\ell) = P_{\tau'}(\ell) \quad and \quad Q_\tau(\ell - \frac{1}{2}) = Q_{\tau'}(\ell - \frac{1}{2}) \\ & (\ell = 1, \cdots, \dim X/2) \\ \Longleftrightarrow\quad & P_\tau(t) = P_{\tau'}(t) \quad and \quad Q_\tau(t) = Q_{\tau'}(t) \\ \Longrightarrow\quad & \dim\tau = \dim\tau'\end{aligned}$$

Remarks.
1. $\Gamma_r(z)$ は多重ガンマ関数であり,(Cf. Kurokawa [4]): $\Gamma_r(z) = \exp(\frac{\partial}{\partial s}\zeta_r(s,z)|_{s=0})$ で定義される, ここで$\zeta_r(s,z) = \sum_{n_1,\cdots,n_r \geq 0}(n_1 + \cdots + n_r + z)^{-s}$ は多重 Hurwitz ゼータ関数. Theorem 1 (a) には$\Gamma_r(z)$, $r = \dim X$があらわれる. この正規化された多重ガンマ関数$\Gamma_r(z)$ は通常のガンマ関数$\Gamma(z)$ に類似した多くの性質を持つ. 例えば, $\Gamma_1(z) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)$, $\Gamma_0(z) = 1/z$. $\Gamma_r(z+1) = \Gamma_{r-1}(z)^{-1}\cdot\Gamma_r(z)$. etc.
2. トリヴィアル τに対してはガンマ因子$\Gamma_\tau(s)$ は既に Kurokawa [5] によって得られている. 非自明な τに対しては, $G = SL(2, \mathbf{R})$ の場合のみ知られていた (Sarnak[6]).
3. "基底"は表現論的意味を持つ. $G = SO(2n, 1)$ のときを考える.

$$\Gamma_{(1,\ell)}(s) = \Gamma_{v(\ell)}(s).$$

が成立する. ここで$\Gamma_{v(\ell)}(s)$ は $Z_{v(\ell)}(s)$ のガンマ因子であり. これらの表現 $v(\ell) \in \widehat{M}$は次のように表現環の基底を成す:

$$Rep(M) \simeq \mathbf{Z}[v(1), \cdots, v(n)].$$

(未出の記号については Ruelle ゼータ関数の節を参照.) i.e. ここで導入したガンマ因子の基底には表現環 $Rep(M)$ の基底との対応が存在する.

4 証明の概略

Theorem 1 の (a) を証明する際に鍵となる多項式を導入しよう.

Proposition 4.1 奇多項式 $P_k(t) = t\prod_{j=1}^{k-1}(t^2 - j^2)$ と $Q_k(t) = t\prod_{j=1}^{k-1}(t^2 - (j-\frac{1}{2})^2)$, $k \in \mathbf{N}$, に対して次が成立*:*

$$\exp(\int_0^{s-\rho_0} P_k(t)\pi\cot(\pi t)dt) = \left[\frac{\Gamma_{2k}(\rho_0 - s + k)}{\Gamma_{2k}(s - \rho_0 + k)}\right]^{-(2k-1)!},$$

and

$$\exp(\int_0^{s-\rho_0} Q_k(t)\pi\tan(\pi t)dt) = \left[\frac{\Gamma_{2k}(\rho_0 - s - \frac{1}{2} + k)\,\Gamma_{2k}(\rho_0 - s + \frac{1}{2} + k)}{\Gamma_{2k}(s - \rho_0 - \frac{1}{2} + k)\,\Gamma_{2k}(s - \rho_0 + \frac{1}{2} + k)}\right]^{\frac{(2k-1)!}{2}}.$$

Proof. 多重サイン関数 $S_r(z) = \Gamma_r(z)^{-1}\Gamma_r(r-z)^{(-1)^r}$を定義し, $S_r(z)$ の微分方程式を使う. [4]:

$$\frac{S_r'}{S_r}(z) = (-1)^{r-1}\binom{z-1}{r-1}\pi\cot(\pi z).$$

□

次の Lemma を使えば Theorem の証明は二項係数の計算に帰着される.

Lemma 4.2 表現 $\tau \in \widehat{K}$に対して, *Plancherel* 多項式 $P_\tau(t)$ と $Q_\tau(t)$ は上で導入した多項式たちの $\mathbf{Q}$-線形結合として一意にかける:

$$P_\tau(t) = \sum_{k=1}^{\dim X/2} a_k(\tau)P_k(t), \qquad Q_\tau(t) = \sum_{k=1}^{\dim X/2} b_k(\tau)Q_k(t), \qquad \textit{with } a_k(\tau), \quad b_k(\tau) \in \mathbf{Q}.$$

Proof. t^{2i-1}は $P_k(t)$ たち (resp.$Q_k(t)$ たち) で一意にかける. 例えば, $t = P_1(t)$, $t^3 = P_2(t) + P_1(t)$. etc. $t = Q_1(t)$, $t^3 = Q_2(t) + \frac{1}{4}Q_1(t)$. etc. あとは $P_\tau(t)$, $Q_\tau(t)$ とも奇多項式より証明は終わる. □

Theorem 1 の (b) を示すには, 次の lemma が基本的である:

Lemma 4.3 有限個を除いて *0* なる有理数の列 $\{a_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$に対して, $f_r(z) = \prod_{k\in\mathbf{Z}} \Gamma_r(z+k)^{a_k}$ とおく. このとき

$$f_r(z) = 1 \Longrightarrow \forall a_k = 0.$$

Proof. 多重ガンマ関数の性質を使うと $f_r(z)/f_r(z+1) = f_{r-1}(z)$ が示せる. だから, $f_r(z) = 1$ ならば $f_{r-1}(z) = 1$ である. よって $r = 0$ のとき示せばよいが, $\Gamma_0(z) = 1/z$よりこれは自明. □

5 Ruelle ゼータ関数の関数等式

$G = SO(2n,1)$ のときを考える. X の Ruelle ゼータ関数 $R(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 2n-1$ なるとき次で定義される,

$$R(s) = \prod_{p\in P_\Gamma} \left(1 - N(p)^{-s}\right),$$

ここで P_Γは基本群$\Gamma = \pi_1(X)$ の全ての素な双曲共役類から成る集合で G に離散的に埋めこまれている. $N(p) = \exp(l(p))$ はノルム関数で, $l(p)$ は対応する素測地線の長さ. Fried [1] は $R(s)$ が一般化された Selberg ゼータ関数の積として表されることを示した:

$$R(s) = \prod_{\ell=1}^{2n} Z_{v(\ell)}(s+\ell-1)^{(-1)^{\ell-1}}, \qquad v(\ell): M \to \wedge^{\ell-1}(\mathbf{C}^{2n-1}) \quad \text{交代テンソル表現.}$$

ここで M は A の K における中心化群である, ただし $G = KAN$ を岩沢分解とする. 我々の場合, $K = SO(2n)$ で $M = SO(2n-1)$ である. $Z_{v(\ell)}(s)$ のガンマ因子 $\Gamma_{v(\ell)}(s) = \Gamma_{(1,\ell)}(s)$ なることは Theorem 1 よりわかり (実際には各表現 $v(\ell)$ に対応する Plancherel 測度から前に定義した Plancherel 多項式を計算する), $\rho_0 = n - \frac{1}{2}$と $\dim X = 2n$ を使い,

$$\Gamma_{v(\ell)}(s) = \left[\prod_{k=0}^{\ell-1} \left(\Gamma_{2n}(s-k)\Gamma_{2n}(s+k+1)\right)^{(-1)^k\binom{2n}{\ell-k-1}}\right]^{c(X)}.$$

Theorem 2 $X = \Gamma\backslash SO(2n,1)/SO(2n)$ をコンパクトな実双曲空間とする. このとき Xの *Ruelle* ゼータ関数 $R(z)$ は次の関数等式を満たす:

$$R(z)\cdot R(-z) = \left(-4\sin^2(\pi z)\right)^{n\cdot c(X)}. \tag{3}$$

ここで, $c(X) = (-1)^{n-1}vol(X)$.

Proof.

$$\begin{aligned}
R(z)\cdot R(-z) &= \prod_{\ell=1}^{n}\left[\frac{Z_{v(\ell)}(z+\ell-1)}{Z_{v(\ell)}(-z+2n-\ell)}\frac{Z_{v(\ell)}(-z+\ell-1)}{Z_{v(\ell)}(z+2n-\ell)}\right]^{(-1)^{\ell-1}}\\
&= \prod_{\ell=1}^{n}\left[\frac{\widehat{Z}_{v(\ell)}(z+\ell-1)\Gamma_{v(\ell)}(-z+2n-\ell)}{\widehat{Z}_{v(\ell)}(-z+2n-\ell)\Gamma_{v(\ell)}(z+\ell-1)}\right]^{(-1)^{\ell-1}}\\
&\quad\times\prod_{\ell=1}^{n}\left[\frac{\widehat{Z}_{v(\ell)}(-z+\ell-1)\Gamma_{v(\ell)}(z+2n-\ell)}{\widehat{Z}_{v(\ell)}(z+2n-\ell)\Gamma_{v(\ell)}(-z+\ell-1)}\right]^{(-1)^{\ell-1}}\\
&= \prod_{\ell=1}^{n}\left[\prod_{k=0}^{\ell-1}\left(S_{2n}(z+\ell-k-1)S_{2n}(z+\ell+k)\right)^{(-1)^k\binom{2n}{\ell-k-1}}\right]^{(-1)^{\ell-1}\cdot c(X)}\\
&\quad\times\prod_{\ell=1}^{n}\left[\prod_{k=0}^{\ell-1}\left(S_{2n}(-z+\ell-k-1)S_{2n}(-z+\ell+k)\right)^{(-1)^k\binom{2n}{\ell-k-1}}\right]^{(-1)^{\ell-1}\cdot c(X)}\\
&= \prod_{j=0}^{2n-1}\left(S_{2n}(z+j)S_{2n}(-z+j)\right)^{a(j)\cdot c(X)}\\
&\qquad a(j)=\begin{cases}(-1)^j(n-j)\binom{2n}{j}+(-1)^{j-1}b(j) & \cdots j=0,\cdots,n\\ (-1)^{j-1}b(j) & \cdots j=n+1,\cdots,2n-1\end{cases}\\
&\qquad b(j)=\sum_{\frac{j+1}{2}\le\ell\le\min(n,j)}\binom{2n}{2\ell-j-1}=b(2n-j)\\
&= \prod_{j=0}^{n-1}\left(S_{2n}(z+j)S_{2n}(-z+j)\right)^{(a(j)-a(2n-j))\cdot c(X)}\\
&= \prod_{j=0}^{n-1}\left(S_{2n}(z+j)S_{2n}(-z+j)\right)^{(-1)^j(n-j)\binom{2n}{j}\cdot c(X)}\\
&= \left(S_1(z)\cdot S_1(-z)\right)^{n\cdot c(X)}\\
&= \left(-4\sin^2(\pi z)\right)^{n\cdot c(X)}.
\end{aligned}$$

Q.E.D. □

Remarks.

1. 上の計算に於いては以下に述べるような多重サイン関数の性質を使った.

$$\begin{aligned}
S_1(z) &= \Gamma_1(z)^{-1}\Gamma_1(1-z)^{-1}\\
&= \left[(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(z)\cdot(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(1-z)\right]^{-1}\\
&= 2\sin(\pi z),
\end{aligned}$$

$$S_{2n}(\alpha)\cdot S_{2n}(2n-\alpha)=1,$$

and

$$
\begin{aligned}
S_1(z) \cdot S_1(-z) &= \prod_{j=0}^{2n-1} (S_{2n}(z+j) S_{2n}(-z+j))^{(-1)^j \binom{2n-1}{j}} \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} (S_{2n}(z+j) S_{2n}(-z+j))^{\{(-1)^j \binom{2n-1}{j} - (-1)^{2n-j} \binom{2n-1}{2n-j}\}} \\
&= \prod_{j=0}^{n-1} (S_{2n}(z+j) S_{2n}(-z+j))^{(-1)^j \frac{(n-j)}{n} \binom{2n}{j}}.
\end{aligned}
$$

2. 特にコンパクトリーマン面のときは, $n = 1$ で $vol(X) = 2g-2$ (通常の測度では $vol(X) = 4\pi(g-1)$ に注意.) より

$$
R(s) \cdot R(-s) = (-4\sin^2(\pi s))^{2g-2} = (2\sin(\pi s))^{2(2g-2)}.
$$

となる.

References

[1] D. Fried: Analytic torsion and closed geodesics on hyperbolic manifolds. Invent. math.,**84**, 523-540 (1986).

[2] R. Gangolli: Zeta functions of Selberg's type for compact space forms of symmetric spaces of rank one. Illinois J. Math.,**21**, 1-41 (1977).

[3] Y. Gon: Gamma factors for generalized Selberg zeta functions. Proc. Japan Acad.,**71**A, 148-150 (1995).

[4] N. Kurokawa: Lectures on Multiple Sine Functions. Univ. of Tokyo 1991 April-July, notes by Shin-ya Koyama.

[5] N. Kurokawa: Gamma factors and Plancherel measures. Proc. Japan Acad.,**68**A, 256-260 (1992).

[6] P. Sarnak: Determinants of Laplacians. Commun. Math. Phys.,**110**, 113-120 (1987).

[7] M. F. Vignéras: L'equation fonctionnelle de la fonction zêta de Selberg du groupe $PSL(2,\mathbf{Z})$. Société Mathématique de France Astérisque **61**(1979), 235-249.

[8] M. Wakayama: Zeta functions of Selberg's type associated with homogeneous vector bundles. Hiroshima Math.J.,**15**, 235-295 (1985).