数理解析研究所講究録
967巻 1996年 102-116

Hyperbolic geometry, harmonic maps and $\mathbb{C}P^1$-structures on surfaces

名古屋大学 多元数理 谷川晴美
(Harumi TANIGAWA)

—はじめに— $\mathbb{C}P^1$-構造とは何か

Mをむきづけられた面とする。M上の$\mathbb{C}P^1$-構造(もしくは射影構造)とは、($\mathbb{C}P^1$, Aut$\mathbb{C}P^1$)をモデルとする構造、すなわち、局所的には射影空間$\mathbb{C}P^1$の部分集合と同一視され、張りあわせがMöbius変換で行われるような構造である。

$\mathbb{C}P^1$-構造が与えられたとき、Möbius変換はとくに正則であるから、$\mathbb{C}P^1$-構造の下の複素構造が与えられる。射影的という概念は、正則よりも強い概念である。

のちに述べるように、$\mathbb{C}P^1$-構造は解析的又は代数的な研究対称となることが多く、この方面からの研究が多い。一方、Thurstonは、grafting(つぎ木)というearthquakeと交役な操作により、$\mathbb{C}P^1$-構造の理論と双曲幾何とをむすびつけた。ここでは、この幾何学的な立場から$\mathbb{C}P^1$-構造を考察し、次の定理を得る。以下Σ_gを種数$g>1$の向きづけられた閉曲面とする。

定理： Σ_g 上の任意の複素構造の上に、$\mathbb{C}P^1$-構造で、そのホロノミー表現が Fuchs 群であるものが無限コ存在する。

まず、Thurston の幾何学的パラメータについて説明する前に、古典的な解析的パラメータについて思いだしておこう。

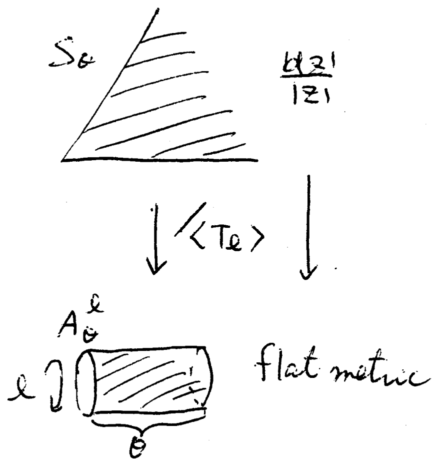
§0. analytic parametrization of $\mathbb{C}P^1$-manifolds

<u>例1</u> （双曲構造）

$\forall X \in T_g$, $\exists \Gamma_X \curvearrowright \mathbb{H}^2$ （Fuchs 群） s.t. $X = \mathbb{H}^2/\Gamma_X$。ここで $\mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$ より $\mathbb{H}^2$ には $\mathbb{C}P^1$-構造が入り、$\Gamma_X < PSL_2\mathbb{C}$ だから、$\mathbb{H}^2$ の射影構造は $\mathbb{H}^2/\Gamma_X$ の $\mathbb{C}P^1$-構造におちる。

<u>例2</u> （flat cylinder）

$\theta > 0$, $\ell > 0$ とおく。$S_\theta = \{re^{i\varphi}\,;\, r>0,\ 0<\varphi<\theta\}$ とおく。但し、$\theta > 2\pi$ の場合 $\mathbb{C}P^1$ 上でかさなる部分は、ちがうシートにのっているものと解釈する。S_θ には $\mathbb{C}P^1$ から自然な

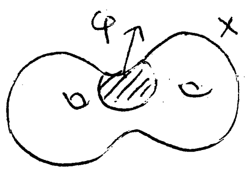


$\mathbb{C}P^1$ 構造が入る。$T_\ell = e^\ell z$ とおくと $\langle T_\ell\rangle < PSL_2\mathbb{C}$ により S_θ の $\mathbb{C}P^1$ 構造は、$A_\theta^\ell = S_\theta/\langle T_\ell\rangle$ の $\mathbb{C}P^1$ 構造におちる。なお S_θ には平坦計量 $|dz|/|z|$ が入るがこれは A_θ^ℓ に

おちて、その平坦計量により A^{ℓ}_{θ} は周の長さ ℓ, 高さ θ の平坦シリンダーとなる。

§1. Σ_g 上の $\mathbb{C}P^1$ 構造

P_g を Σ_g 上の $\mathbb{C}P^1$ 構造全体の空間とする。$\pi: Q_g \to T_g$ をリーマン面上の正則2次微分のなすベクトル束とする。事実から先にのべると、P_g は Q_g によりパラメータづけされる。この(古典的)事実について少し説明をくわえよう。



まず、$X \in T_g$ 上 $\mathbb{C}P^1$ 構造が与えられたとする。その局所座標のひとつ φ をとりそれをあらゆる曲線に沿って解析接続する。すると、X 上の多価函数 f で、一点における2つの値が Möbius変換の合成分だけ異なるものが得られる。この多価函数を developing map、これから得られる準同型 $\chi: \pi_1(X) \to PSL_2\mathbb{C}$ をホロノミー表現とよぶ。

さて、この developing map f の Schwarz微分を $S(f)$ とかくことにすると $S(f)$ は X 上の正則2次微分となる。ここで Schwarz微分とは、$S(f) = (f''/f')' - \frac{1}{2}(f''/f')^2$ で与えられるものであるが、実は、これは次のような意味をもつ。(Thurston) 各点 $z \in X$ に対して f と同じ2 jet をもつ osculating Möbius 変換 $M_z^{(f)}(\cdot)$ が存在する。Schwarz微分とは実は、$d_z M_z^{(f)}$ にほかならない。つまり、f が"projective"であることからどれ

くらいはなれているかを知る目やすとなる量である。つまり、曲率が、多様体のまがり具合を表わすのと、類似の役目をはたす。

このようにして、対応 $P_g \to Q_g$ ができた。逆に各 $q \in Q_g$（$^\exists X \in T_g$ 上の2次微分）に対し、$S(f)=q$ なる developing map をもつ X 上の $\mathbb{C}P^1$ 構造が存在することが知られている。

以上で、P_g と Q_g とは同一視できることがわかった。なお、ベクトル束の標準射影 $\pi: Q_g = P_g \to T_g$ は、$\mathbb{C}P^1$-構造から、その下の複素構造への対応であることがわかった。したがって、一点 $X \in T_g$ 上の $\mathbb{C}P^1$ 構造の全体は、複素 $3g-3$ 次元のベクトル空間でパラメータ付けされることがわかった。

さて、ここまでに関する話しは、すべて解析的であり、この方面からの研究も多い。

一方、Thurston は grafting という操作により、$\mathbb{C}P^1$ 構造の理論と双曲幾何とを結びつけた。この grafting を説明するため少々の準備をする

§2. 長さについて.

$$\begin{aligned} T_g &= \{\text{marked complex structures on } \Sigma_g\} \\ &= \{\text{marked conformal structures on } \Sigma_g\} \\ &= \{\text{marked hyperbolic structures on } \Sigma_g\} \end{aligned}$$

いずれの立場をとるにせよ、与えられた2つの構造を比較するためには、曲線の長さの比較が有効である。

以下、$\mathcal{S}$に＝{Σ_g 上の単純閉曲線のホモトピー類}とかくことにする。

○定義　$X \in T_g$, $[c] \in \mathcal{S}$ に対し $[c]$ の extremal length を

$$E_X(c) = \sup_{\rho} \frac{\left(\inf_{c' \sim c} \int_{c'} \rho(z)|dz|\right)^2}{\mathrm{Area}_\rho X}$$

但し、sup は X 上の等角計量 $\rho(z)|dz|$ 全体についてとる。

○記号　$X \in T_g$, $[c] \in \mathcal{S}$ に対し、$\ell_X(c)$ を X の双曲計量に関する $[c]$ の測地線の長さとする

これらは与えられた2点 $X, Y \in T_g$ を比較する有用な道具である。すなわち、

Y	X	mapping $Y \to X$	距離の"目やす"	by
conf	conf	extremal q.c.	$K = \sup_{c \in \mathcal{S}} \frac{E_X(c)}{E_Y(c)}$	Kerckhoff
hyp	hyp	extremal Lipschitz	$L = \sup_{c \in \mathcal{S}} \frac{\ell_X(c)}{\ell_Y(c)}$	Thurston
conf	hyp	harmonic map	$\mathcal{E} = \sup_{c \in \mathcal{S}} \frac{\ell_X(c)^2}{E_Y(c)} + O(1)$	Minsky

ここで"sup"とかいたものは、実は $\mathcal{S}$ を含むコンパク

ト空間の中で、最大値が実現される。それが、measured lamination の空間である。

§3. measured lamination and Thurston compactification

$\mathcal{ML}$ を measured laminations の空間とする。ここで measured lamination とは、重みつき単純閉曲線の一般化というにとどめて、正確な定義はしない。以下に必要な事実をのべるにとどめる。

◦ $\mathbb{R}_+\mathcal{S}$ を重さつき単純閉曲線とすると、

$$\begin{array}{ccc} \Phi: \mathbb{R}_+\mathcal{S} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^{\mathcal{S}} \\ \cup & & \cup \\ \alpha\cdot c & \longmapsto & \alpha\, i(c,\cdot) \end{array}$$

（幾何学的交点数）

◦ $\mathcal{ML} = \overline{\Phi(\mathbb{R}_+\mathcal{S})}$

◦ ${}^{\forall}\lambda$, ${}^{\forall}X$（双曲構造）, $[\lambda]$ の測地的代表元が存在する。

◦ $\ell_X(\cdot)$, $E_X(\cdot)$ は $\mathcal{ML}$ において連続

◦ $\ell_X(\theta\cdot\lambda) = \theta\,\ell_X(\lambda)$, $E_X(\theta\lambda) = \theta^2 E_X(\lambda)$.

◦ $P\mathcal{ML} := \mathcal{ML}-\{0\}/\mathbb{R}_+ \cong S^{6g-7}$

$$\begin{array}{c} \cup \\ \mathcal{S} \ \text{dense} \end{array}$$

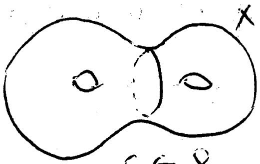
定義 Thurston の T_g の compact 化とは、

$$\begin{array}{ccc} T_g & \hookrightarrow & P\,\mathbb{R}^{\mathcal{S}} \\ \cup & & \\ X & \longmapsto & [\ell_X(c)]_{c\in\mathcal{S}} \end{array}$$

なる埋めこみの中での閉包。

<u>Fact</u> $\partial T_g = \mathcal{PML}$

大雑把に言えば、Thurston boundary とは次のようなものである。



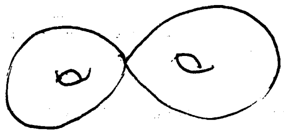
X

$c \in \mathcal{S}$

$\xrightarrow{\qquad}$

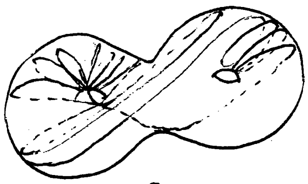
$\ell_X(c) \to 0$

$\Leftrightarrow E_X(c) \to 0$



(退化した構造)

同じく



λ

$\xrightarrow{\qquad}$

$\ell_X(\lambda) \to 0$

$E_X(\lambda) \to 0$

----- $\lambda \in \partial T_g$

§4. realization of measured lamination in 3-mfd

N：双曲的三次元多様体

$f : \Sigma_g \to N$ s.t. $f_\# \ \pi_1(\Sigma_g) \to \pi_1(N)$ injective

とする。

定義 $\lambda \in \mathcal{ML}$ がホモトピー類$[f]$において実現可能とは、

$^\exists X$；双曲構造 on Σ_g，$^\exists g : X \to N$，$g \sim f$

$^\exists \lambda' \supset \lambda$ geodesic lamination on X

∘ $g(\lambda')$ はNの測地線からなる。

∘ $g|\lambda'$ は長さを保つ

∘ $g|X - \lambda'$ は等長的

すなわち、$g(X)$ は $g(\lambda')$ でおりまげられ、他所では、まっ

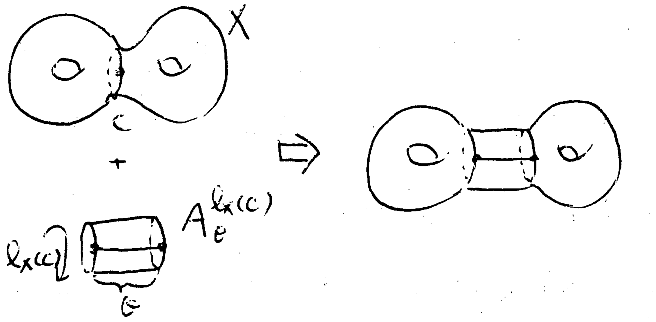
すぐな面である。このように geodesic lamination に沿って
おりまげられた、区分的に totally geodesic な面を pleated
surface という。

<u>Fact</u> "ほとんどすべての" measured lamination は実現化。

注). $^\forall X \in T_g$, $\exists 1\, h \sim f$, $h: X \to N$ harmonic であるが
measured lamination λ の実現化とは、$\lambda \in \partial T_g$ からの
"harmonic map" のアナロジーであるといえる。
∵ $\lambda \in \partial T_g$ とは $E_X(\lambda) \to 0$ なる極限である。よって、$X \in T_g$
が、$E_X(\lambda)$ が十分短ければ、λ 方向に著しいストレッチ
が生じる。一方、エネルギーは $\int \|dh\|^2$ で与えられるので、
maximal stretch の方向は、harmonic map によってほとんど
まっすぐにうつらねばならない。 □

§5. Grafting and Bending

まず Grafting についてのべる。双曲面 X とその上の単純



測地線 c をとる。§0
例2でみたように、
平坦シリンダー $A_\theta^{l_X(c)}$
をとる。そこで、X

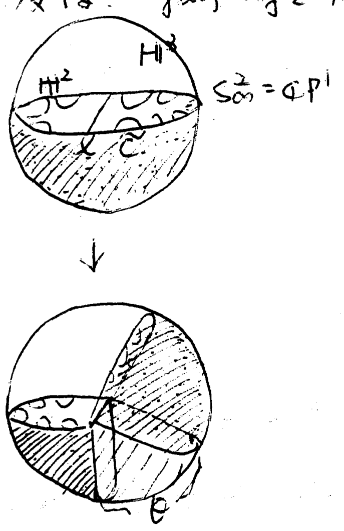
をCに沿って切り、$A_{\theta}^{(C)}$ をねじれなくCに沿ってつぎ木する。$X-C$ のCに沿う $\mathbb{C}P^1$-構造と $A_{\theta}^{(C)}$ のそれとはうまく整合し新しい面は X の双曲構造と A の平坦構造をうけつぐ $\mathbb{C}P^1$-多様体となる。この操作を "grafting θC to X" といい、新しくできたこの $\mathbb{C}P^1$-構造を、$Gr_{\theta C}X$ とかくことにする。

定理(Thurston)

$$\begin{array}{ccccc} Gr : & T_g \times \mathbb{R}_+\mathcal{S} & \longrightarrow & P_g & \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & \\ & (X, \theta C) & \longmapsto & Gr_{\theta C}X & \end{array}$$

は、$T_g \times \mathcal{ML}$ に連続的に拡張され、$Gr : T_g \times \mathcal{ML} \to P_g$ は上への homeo である。

今度は、graftingと同値な操作、bendingについて述べる。



X, Γ_X, C を、上と同じものとする。まず、$\mathbb{H}^2$ を $\mathbb{H}^3$ に、totally geodesic にうめこむ。C の $\mathbb{H}^2$ への lift $\tilde{C}$ は互いに交わらない測地線からなる。このうちのひとつの成分 l にまず着目する。

$\mathbb{H}^2$ を l に沿って θ だけおりまげると無限遠球面、すなわち $\mathbb{C}P^1$ 上においては、はじめ $\mathbb{H}^2$ が張っていた下半平面に平坦 sector S_θ をつぎ木したことになる。この操作を $\tilde{C}$ の各成分に対して順次行う。すると、$\mathbb{C}P^1$ 上には

双曲的部分と平坦部分とからなる単連結 $\mathbb{C}P^1$-多様体 $\hat{\Omega}$ が得られることになる。

さて、$\mathbb{H}^2$ には最初 Γ_X が作用していたが、上の操作のたびに Γ_X を変形していくことにより、$\hat{\Omega}$ に作用する $PSL_2\mathbb{C}$ の部分群が得られることが容易にわかる。

事実から先に述べると、$\hat{\Omega}$ は $Gr_\lambda X$ の "projective" 普遍被覆面で、$\Gamma_{\theta c}$ は $Gr_\lambda X$ のホロノミー、$\hat{\Omega}/\Gamma_{\theta c} = Gr_{\theta c} X$ である。

このように、$\mathbb{H}^2$ を $\mathbb{H}^3$ でおりまげる操作を bending という。上に見たように bending と grafting は同値な操作である。なお、bending は Γ_X と $\Gamma_{\theta c}$ について同変な写像で、$\tilde{c}$ に沿っておりまげられそれ以外の所では計量を保つ写像で与えられた。このような同変写像を pleated map とよぶことにする。

$\Gamma_{\theta c}$ が離散群なら、$f(\mathbb{H}^2)/\Gamma_{\theta c}$ は $\mathbb{H}^3/\Gamma_{\theta c}$ の通常の意味での pleated surface である。

上では、簡単のため、$\mathbb{R}_+ \delta$ について考えたが、一般の $\mathcal{ML}$ の元についても同様に議論することができる。

§6. $\mathbb{C}P^1$-structures with Fuchsian holonomy

ここで、ホロノミーがフックス群であるような $\mathbb{C}P^1$-構造について考えよう。$^\forall X \in T_g$, 双曲的構造はもちろん、ホロノミーがフックス群 Γ_X であるが、双曲的構造以外にホロノミーが

フックス群であるような$\mathbb{C}P^1$-構造が存在するか、という問題がおこる。この問題に対しては、Maskit がまず、函数論的に例を構成した。また、Hejhal および Goldman がより幾何学的研究をしている。

定理（Goldman）

$\mathbb{C}P^1$-構造 $Gr_\lambda X$ が、フックス群をホロノミーとする必要十分条件は、λ が $\mathcal{ML}$ の格子点であることである。但し、λ が格子点であるとは、$\exists C_1, \cdots, C_m$ (disjoint union) $\in \mathcal{S}$, $\exists n_1, \cdots, n_m$, $\lambda = \sum_{i=1}^{m} 2 n_i \pi C_i$ なる表示をもつことである。

さて、このようにフックス群をホロノミーとする$\mathbb{C}P^1$-構造の特徴づけが行われたわけであるが、ここでひとつ注意をのべる。一般に、$\mathbb{C}P^1$-構造 $Gr_\lambda X$ に対し、その下の複素構造を $gr_\lambda X$ とかくことにすると、$\lambda \neq 0$ ならば $gr_\lambda X \neq X$ であり、$gr_\lambda X$ を X と λ とから計算する方法はない。したがって、次の問題は自明ではない。

Q. どのような複素構造の上に、フックス群をホロノミーとする$\mathbb{C}P^1$構造が存在するか？

この問題に対する解答が我々の主定理である。

主定理：任意の格子点 $\lambda \in \mathcal{ML}$ に対して、$gr_\lambda(\cdot) : T_g \to T_g$ は、同相写像である。

系．すべての複素構造の上に、フックス群をホロノミーとする $\mathbb{C}P^1$-構造が無限個存在する。

主定理を示すためには、次のことを示せばよい：

- $gr_\lambda(\cdot) : T_g \to T_g$ は、局所的に単射である．
- $gr_\lambda(\cdot) : T_g \to T_g$ は、proper map である。

§7. Properness of grafting

定理 7.1. $^\forall \lambda \in \mathcal{ML}$（必ずしも格子点でない）に対して $gr_\lambda(\cdot) : T_g \to T_g$ は proper

証明には次の評価式を用いる．

定理 7.2. $X \in T_g$, $\lambda \in \mathcal{ML}$ に対し $Y = gr_\lambda X$ とかくことにする。$h : Y \to X$ を調和写像，$f : Y \to X$ を grafting の逆操作つまり collapsing-grafted-part-map とし，$\mathcal{E}$ で総エネルギーをあらわすことにすると

$$\frac{1}{2} l_X(\lambda) \le \frac{1}{2} \frac{l_X(\lambda)^2}{E_Y(\lambda)} \le \mathcal{E}(h) \le \mathcal{E}(f) = \frac{1}{2} l_X(\lambda) + 4\pi(g-1) \quad \square$$

◎定理7.2 ⇒ 定理7.1

$gr_\lambda X_n = Y_n$とかくことにする。$\{X_n\} \subset T_g$, $X_n \to \partial T_g$のとき、$Y_n \to \partial T_g$をいう。必要なら部分列をとって、

(i) $l_{X_n}(\lambda) < {}^\exists C$, ${}^\forall n$ or

(ii) $\lim_{n\to\infty} l_{X_n}(\lambda) = \infty$

なる場合を考えればいい。

(i)のとき、もしも$\{Y_n\} \subset\subset T_g$とすれば、$X_n \to \partial T_g$より、$\mathcal{E}(h_n : Y_n \to X_n) \to \infty$である。一方定理7.2より$\mathcal{E}_n(h_n) < \frac{1}{2} l_{X_n}(\lambda) + C$で(i)の仮定からこれは有界である。矛盾。

(ii)のとき、定理7.2から、$E_{Y_n}(\lambda) \asymp l_{X_n}(\lambda) \to \infty$より、$Y_n \to \partial T_g$.

□

定理7.2の証明は略すが、ひとつ注意をのべておく。定理7.2より、$l_X(\lambda)$が大なるとき、fはharmonic mapに近いことがわかる。これは、①Xは$Gr_\lambda X$の"pleated surface"であること(§5) ②pleated surfaceは$\lambda \in \partial T_g$からのharmonic mapのアナロジーであること(§4) ③fもhもλ方向に多大なstreching を行うこと、等を考えあわせると、自然な現象であるといえる。

§8 local injectivity

graftingの局所単射性については、くわしいことは省略する。今のところ、証明できているのは、

定理 8.1　λ が半格子点のとき，$gr_\lambda(\cdot): T_g \to T_g$ は単射である。

証明には，λ が半格子点のときに $Gr_\lambda X$ のホロノミーが，$PSL_2\mathbb{R}$ で表現できることから，Faltings の $PSL_2\mathbb{R}$ 表現に関する定理をつかう。この方法では一般の λ についての証明ができない。

予想　$\forall\lambda \in \mathcal{ML}$，$gr_\lambda(\cdot)\ T_g \to T_g$ は単射である。

注)．最近，McMullen によって次のことが示されている。

定理 (McMullen)　タイヒミュラー空間が一次元のとき ($T = T_{1,1}$ or $T_{0,4}$)，$\forall\lambda \in \mathcal{ML}$，$gr_\lambda(\cdot): T \to T$ は，単射である。

REFERENCES

[B] L. Bers, *Holomorphic families of isomorphisms of Möbius groups*, J. Math. Kyoto Univ. **26** (1986), 73-76.

[EKK] C. Earle, I. Kra and S. Krushkal, *Holomorphic Motions and Techmüller spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **??** (1994), ??.

[EM] C. Earle and C. McMullen, *Quasiconformal isotopes*, Holomorphic Functions and Moduli II, Springer-Verlag, New york, Berlin, Heidelberg, London, Paris and Tokyo, 1987, pp. 143-154.

[F] G. Faltings, *Real projective structures on Riemann surfaces*, Compositio Math. **48** (1983), 223-269.

[EM] D. B. A. Epstein and A. Marden, *Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan and measured pleated surfaces*, London Mathematical Society Lecture Notes, vol. 111, Cambridge University Press, 1897, pp. 114-253.

[GGP] D. Gallo, W. Goldman and R. Porter, *Projective structures with monodromy in PSL(2,R)*, (preprint).

[G] W.M. Goldman, *Projective structures with Fuchsian holonomy*, J. Diff. Geom **25** (1987), 297-326.

[H] D. Hejhal, *Monodromy groups and linearly polymorphic functions*, Acta math. **135** (1975), 1-55.

[KT] Y. Kamishima and S. P. Tan, *Deformation spaces on geometric structures*, Aspects of Low Dimensional Manifolds, Advanced Studies in Pure Mathematics 20, Kinokuniya Co., 1992, pp. 263-299.

[Ka] M. Kapovich, *On monodromy of complex projective structures*, Invent. math. **119** (1995), 243-265.

[Ke] S. Kerckhoff, *The asymptotic geometry of Teichmüller space*, Topology **19** (1980), 23-41.

[Ko] S. Kobayashi, *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic mappings*, Marcel Dekker Inc., New York, 1970.

[La] F. Labourie, *Surfaces cinvexes dans l'espace hyperbolique et* CP^1*-structures*, J. London Math.soc. **??** (1992), 549-565.

[L] O. Lehto, *Univalent functions and Teichmüller spaces*, Springer-Verlag, New york, Berlin, Heidelberg, London, Paris and Tokyo, 1985.

[Kr1] I. Kra, *A generalization of a theorem of Poincaré*, Proc. Amer. Math. Soc. **27** (1971), 299- 302.

[Kr2] ______, *Deformations of Fuchsian groups*, Duke Math. J. **36** (1969), 537-546.

[Kr3] ______, *Deformations of Fuchsian groups II*, Duke Math. J. **38** (1971).

[M] B. Maskit, *On a class of Kleinian groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A **442** (1969), 1-8.

[Mi 1] ______, *Harmonic maps, length, and energy in Teichmüller space*, J. Diff. Geom. **35** (1992), 151-217.

[Mi 2] Y. Minsky, *Harmonic maps into hyperbolic 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1992), 605-632.

[Sh] H. Shiga, *Projective sructures on Riemann surfaces and Kleinian groups*, J. Math. Kyoto Univ. **27** (1987), 433-438.

[Su] D. Sullivan, *On the ergodic theory at infinity of an arbitrary discrete group of hyperbolic motions*, Riemann Surfaces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference, Annals of Math.Studies 97, Princeton, 1981.

[ST] H. Shiga and H. Tanigawa, *Projective structures with discontinuous holonomy representations*, (preprint).

[Ta] H. Tanigawa, *Grafting, harmonic maps and hyperbolic surfaces*, (preprint).

[Th1] W. Thurston, *Geometry and Topology of 3-manifolds*, Princeton University lecture notes.

[Th2] W. Thurston, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces*, (preprint).

[Tsp] S.P. Tan, *Complex Fenchel-Nielsen coordinates for quasi-fuchsian structures*, International. J. Math. **5** (1994), 234-251.

[W] M. Wolf, *The Teichmüller theory of harmonic maps*, Trans. J. Diff. Geom. **29** (1989), 449-479.