数理解析研究所講究録
967 巻 1996 年 168-171

あるクライン群の極限集合について

防衛大　山本博夫 (HIRO-O YAMAMOTO)

赤座は簡単なクライン群を構成しその極限集合のハウスドルフ次元は 1 以上であることを示した．ここでは赤座の結果を赤座の方法でパソコンを使って詳しく計算することによって，ほんの少しだけ改良し 1 を 1.05 に置き換えられることを報告する．併せてささやかな問題を提示する．

1. 4 個の円で囲まれた基本領域を持つクライン群の構成 ([A])

$$E_1 : z \longmapsto \frac{2\sqrt{3}iz/3 - i/3}{iz - 2\sqrt{3}/3}$$

$$E_2 : z \longmapsto \frac{2\sqrt{3}iz/3 + (\sqrt{3}+i)/6}{(\sqrt{3}-i)z/2 - 2\sqrt{3}i/3}$$

$$E_3 : z \longmapsto \frac{-2\sqrt{3}iz/3 + (\sqrt{3}+i)/6}{(\sqrt{3}+i)z/2 + 2\sqrt{3}/3}$$

$$E_4 : z \longmapsto \frac{2\sqrt{3}z/3 - 1}{-(\sqrt{3}+3)z}$$

これらは全てある（ユークリッドの）円の内と外を入れ替える位数 2 の楕円的変換である．E_1, E_2, E_3, E_4 で生成される群を G とする．G の元 Sは全て $S = S_nS_{n-1}\cdots S_2S_1, S_j \in \{E_1, E_2, E_3, E_4\}, S_j \neq S_{j+1}$ と唯一通りに書ける．自然数 n を Sの長さと言い，長さを強調するとき $S_{(n)}$と書くことにする．$S_{(n)}$の形をした G の元は全部で $4\cdot 3^{n-1}$個ある．

注意 1．G の元は全て一意に書けることを示すには（ある）基本領域は内部が互いに素な円で囲まれていることを仮定しなくても，内部が互いに素な単純閉曲線で囲まれていることが仮定できれば良い．

2. 収束指数　メービウス変換 $S : z \longmapsto (az+b)/(cz+d), ad-bc = 1, c \neq 0$ に対してユークリッドの円 $|cz+d| = 1$ つまり $|z - S^{-1}(\infty)| = 1/|c|$ を Sのアイソメトリックサークルと言う．Sのアイソメトリックサークルの半径を R_Sで表せば $R_S = 1/|c|$ である．G の元で $c = 0$ つまり ∞ を固定するものは id のみであるから $G' := G - \{id\}$ の全ての元に対しアイソメトリックサークルを定義できる．正項級数 $P^\mu(G) := \sum_{S\in G'} R_S^\mu$ を G のμ次元ポアンカレ級数と言うことにする．さて $L^\mu_{(n)}(G) := \sum_{S_{(n)}} R^\mu_{S_{(n)}}$ と定義すれば明らかに $P^\mu(G) = \sum_{n=1}^\infty L^\mu_{(n)}$ である．$\delta(G) := \sup\{\mu; P^\mu(G) = \infty\}$ を G の収束指数と言う．良く知られているように $0 < \delta(G) < 4$ である．

3. クライン群の極限集合のハウスドルフ次元と収束指数　1 で構成したクライン群 G は幾何学的有限であることは直ちに分かるが，この場合は G の極限集合$\Lambda(G) := \{S(\infty); S \in G\}'$ のハウスドルフ次元 $d_H(\Lambda(G))$ は G の収束指数$\delta(G)$ の丁度半分であることが D.Sullivan[S]

によって証明された．よって $d_H(\Lambda(G))$ を（下から）評価するには $\delta(G)$ を（下から）評価すれば良い．

注意 2．一般に集合のハウスドルフ次元の評価はその定義からすぐ解るように下からの評価が上からの評価に比べて難しい．そこでハウスドルフ次元となんらかの関係のある量を見つけてその量を下から評価することがよく行なわれる．今の場合 $\delta(G)$ がその量である．

4．定理　ここで改めて定理を述べる．

定理．**1** で構成したクライン群 G の極限集合のハウスドルフ次元は（実は）1.05 以上である．

補題 1．$0 \le \mu \le 4$ とし自然数 n を固定する．任意の $S \in G'$ に対し

$$* \qquad \frac{\sum_{S_{(n)}} R^{\mu}_{S_{(n)}S}}{R^{\mu}_{S}} > 1$$

が成り立つと仮定すれば $P^{\mu}(G)$ は発散する．ただし仮定 $*$ において
$S_{(n)}S = T_{u+n} \cdots T_{u+1}T_u \cdots T_1$

証明．仮定より任意の $S_{(1)}$ に対して $\sum_{S_{(n)}} R^{\mu}_{S_{(n)}S_{(1)}} > R^{\mu}_{S_{(1)}}$ である．両辺を全ての $S_{(1)}$ について加えれば $L^{\mu}_{(n+1)} > L^{\mu}_{(1)}$ である．同様に仮定より $\sum_{S_{(n)}} R^{\mu}_{S_{(n)}S_{(n+1)}} > R^{\mu}_{S_{(n+1)}}$ が成り立つから両辺を全ての $S_{(n+1)}$ について加えれば $L^{\mu}_{(2n+1)} > L^{\mu}_{(n+1)} > L^{\mu}_{(1)}$ これを繰り返して $P^{\mu}(G) > \sum_{k=1}^{l} L^{\mu}_{(kn+1)} > l \cdot L^{\mu}_{(1)} \longrightarrow \infty (l \longrightarrow \infty)$ を得る．□

次に $*$ の成り立つ十分条件を求めよう．

補題 2．$0 \le \mu \le 4$ とする．$k = 1,2,3,4$ に対して

$$** \qquad \sum_{j \ne k} \sum_{S_{(n-1)}} R^{\mu}_{S_{(n-1)}E_j} > 4^4$$

が成り立てば $*$ が成り立つ．

証明．任意のメービウス変換 S, T に対し $R_{ST} = R_S R_T / |T(\infty) - S^{-1}(\infty)|$ が成り立つ（Ford[F;p.40]）．また G の非有界な基本領域の補集合の直径は 4 だから任意の $0 \le \mu \le 4$ と任意の $S, S_{(n)} \in G'$ に対し $|S(\infty) - S_{(n)}(\infty)|^{\mu} \le 4^4$ である．これらと仮定より

$$\frac{\sum_{S_{(n)}} R^{\mu}_{S_{(n)}S}}{R^{\mu}_{S}} = \sum_{S_{(n)}} \frac{R^{\mu}_{S_{(n)}}}{|S(\infty) - S^{-1}_{(n)}(\infty)|^{\mu}} \ge \sum_{S_{(n)}} \frac{R^{\mu}_{S_{(n)}}}{4^4} > 1$$

を得る．よって $*$ が成り立つ．□

定理の証明．μ を 2.1, n を 13 とすればパソコンの力を借りて $**$ の成り立つことを示すことができる．よって補題 2 より $*$ が成り立ち補題 1 より $P^{2.1}(G)$ は発散する．このことは $\delta(G) \ge 2.1$ であることを示す．つまり $d_H(\Lambda(G)) \ge 1.05$ を得る．□

注意3．補題2の証明で2番目の不等号の評価がいかにも乱暴である．赤座の原論文([A])では劣調和関数の性質等を使って左辺の分母をより精密に評価している．実際$\mu = 1$ではあるが，なんと$n = 5$としても$*$が成り立つことを手計算で示している．

5．問題　注意1でも触れたようにここで紹介した赤座の方法は非古典的ショットキー群，つまり円とは限らない単純閉曲線で囲まれた基本領域を持つショットキー群の極限集合のハウスドルフ次元を調べるのにも有効である．またChuckrow([C])によれば，ある（非古典的）ショットキー群の列$\{\Gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$の代数的極限に不連続でないクライン群$\Gamma$が存在する．Bishop-Jonesの定理([BJ;Theorem1.5])によれば$\liminf_{j\to\infty} d_H(\Gamma_j) \geq d_H(\Gamma) \geq 4$だから任意の$\varepsilon > 0$に対し$d_H(\Gamma_\varepsilon) > 4 - \varepsilon$なる非古典的ショットキー群が存在する．

問題1．任意の$\varepsilon > 0$に対し$d_H(\Gamma_\varepsilon) > 4 - \varepsilon$なる非古典的ショットキー群を構成せよ．

現実には非古典的ショットキー群は僅かに1例しか知られていない([Y])．問題1を甚だしく矮小化して

問題2．その非古典的ショットキー群の極限集合のハウスドルフ次元を下から評価せよ．

References

[A] T.Akaza, Singular sets of some Kleinian groups(II). Nagoya Math. J., 29 (1967), 145-162.

[BJ] C.Bishop and P.Jones, Hausedorff dimension and Kleinian groups, to appear.

[C] V.Chuckrow, On Schottky groups with applications to Kleinian groups, Ann. of Math., 88 (1967) 47-61.

[F] L.Ford, Automorphic functions, Chelsea, New York, 1951

[S] D.Sullivan, Entropy, Hausdorff measure old and new, and the limit sets of geometrically finite Kleinian groups. Acta Mathematica, 153 (1983), 259-277.

[Y] H.Yamamoto, An example of a nonclassical Schottoky group. Duke Math. J. 63 (1991), 193-197.