

代数的変形のもとで剛性を持つ擬 Fuchs 部分群

東京電機大学 理工学部 相馬輝彦 (Teruhiko Soma)

この小論の目標は、藤井道彦氏（横浜市立大学理学部）との共同研究で得られた結果を紹介し、証明の概略を与えることにある。詳細は、Fujii-Soma [6] を参照してほしい。

ねじれ (torsion) を持たない有限生成群 G に対し、 $R(G), \bar{R}(G)$ でそれぞれ表現 $\rho: G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ および $\bar{\rho}: G \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の代数的変形空間を表す。 $R(G)$ は affine algebraic set の構造を持つことはよく知られている（例えば Culler-Shalen [5] 参照）。 $\bar{\rho}: \Pi_M \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ を有限体積の双曲的 3 次元多様体 M のホロノミーとすると、 $\bar{\rho}$ のリフト $\rho: \Pi_M \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ は $R(\Pi_M)$ のただ一つの既約成分 $R_0(\Pi_M)$ に含まれる。以下では、自然な射影 $P: R(\Pi_M) \rightarrow \bar{R}(\Pi_M)$ による $R_0(\Pi_M)$ の像 $\bar{R}_0(\Pi_M) = P(R_0(\Pi_M))$ を $\bar{\rho}$ の代数的変形空間と考えることにする。 M の基本群 Π_M が、向き付け可能な種数 > 1 の閉曲面 S の基本群と同型な部分群 Π_S を含んでいると仮定する。 $\bar{\rho}$ を $\bar{R}_0(\Pi_M)$ 内で移動させるとき、制限 $\tau = \bar{\rho}|_{\Pi_S} \in \bar{R}(\Pi_S)$ もそれに連れて移動するかを考える。 τ が動かないとき、この表現は rigid であるという。正確に言えば、 τ が $\bar{R}_0(\Pi_M)$ において rigid であるとは、 $i_S^*(\bar{R}_0(\Pi_M)) = \mathrm{conj}(\tau)$ であることを言う。ただし、 $\mathrm{conj}(\tau)$ は $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ において τ と共役な表現からなる $\bar{R}(\Pi_S)$ の部分集合を表し、 $i_S^*: \bar{R}(\Pi_M) \rightarrow \bar{R}(\Pi_S)$ は包含写像 $i_S: \Pi_S \rightarrow \Pi_M$ から誘導される連続写像とする。さらに、この τ が M 中の incompressible 曲面 S のホロノミーのとき、 S は $\bar{R}_0(\Pi_M)$ において rigid であるという。

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \subset R(\Pi_S)$ を、次の条件 (0.1), (0.2) を満たすような表現 $\tau: \Pi_S \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ 全体からなる集合とする。

(0.1) τ は忠実な、離散的拡張 $\bar{\rho}_M: \Pi_M \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ を許す。

(0.2) $M = \mathbb{H}^3/\bar{\rho}(\Pi_M)$ は n 個のカスプを持つ体積有限の双曲的多様体であり、 τ は $\bar{R}_0(\Pi_M)$ で rigid である。

$k \leq n$ をみたす任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、 $\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \subset \mathrm{Rig}_k(\Pi_S)$ が成り立つことに注意せよ（補題 1）。以下では、 $F(S), QF(S)$ によって、それぞれ Fuchs 表現、擬 Fuchs 表現全体からなる $\bar{R}(\Pi_S)$ の部分空間を表す。

次の定理により、 $\mathrm{Rig}_1(\Pi_S)$ の元 $\tau: \Pi_S \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ が $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の部分群 $\tau(\Pi_S)$ によって特徴付けられることが分かる。ただし、 ε_0 は 3 次元の Margulis 定数とする。

定理 1. 次の (i), (ii) が成り立つ。

(i) $\mathrm{Rig}_1(\Pi_S)$ は $QF(S)$ の真部分集合である。

(ii) 忠実な表現 $\bar{\tau}: \Pi_S \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ が $\mathrm{Rig}_1(\Pi_S)$ の元であるための必要十分条件は, $\bar{\tau}(\Pi_S)$ が次の条件 (ii-a), (ii-b) をみたす無限個の cocompact でねじれない離散的拡張 $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m, \dots$ を持つことである.

(ii-a) $\sup_m \{\mathrm{vol}(\mathbb{H}^3/\Lambda_m)\} < \infty$.

(ii-b) $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ をみたすある ε に対し, 各 $(\mathbb{H}^3/\Lambda_m)_{\mathrm{thin}(\varepsilon)}$ は空であるかまたは連結である.

Cooper と Long [3] は $\mathrm{Rig}_1(\Pi_S) = \emptyset$ であろうと予想していた. しかし, Neumann と Reid [9] は, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, rigid な全測地的曲面 S を含む双曲的 3 次元多様体で n 個のカスプを持つものを構成した. すなわち, $\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \cap F(S) \neq \emptyset$ である. [9] で与えられた, S はかなり限定された双曲的構造を持ったものである. 次の定理は, $QF(S)$ のより一般的な表現であっても, $\mathrm{Rig}_n(S)$ の元になり得ることを示している.

定理 2. S を種数 $g > 1$ の任意の向き付け可能な閉曲面とする. このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\mathrm{Rig}_n(\Pi_S)$ は $QF(S)$ で稠密であり, $\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \cap F(S)$ は $F(S)$ で稠密である.

系. Γ を任意の cocompact な擬 Fuchs 群とする. このとき, Γ の任意に小さい擬等角変形の中には, $\sup_m \{\mathrm{vol}(\mathbb{H}^3/\Lambda_m)\} < \infty$ をみたす, 無限個の cocompact で, ねじれを持たない離散的拡張 $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_m, \dots$ を許すものが存在する.

定理 2 の証明では, Brooks [2] と同様なサークル・パッキングの利用法により, カスプを持つ双曲的 3 次元多様体 M で, rigid な曲面 S を含むものが構成される. その構成法より, 双曲的錐多様体が得られるような M 上の双曲的 Dehn 手術のもとで S が rigid であることは容易に検証できる. さらに, 双曲的 Dehn 手術の変形が正則写像でパラメーター付けられるという事実を利用すれば, S がいかなる Dehn 手術のもとでも rigid であることが証明できる.

§1. 準備

Ω を Riemann 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ の真部分開集合 (非連結でもよい) とし, $\tilde{\mathcal{C}}$ を Ω 内の円 C_i の集合とする. ただし, 各 C_i は Ω 内の円板 Δ_i の境界となり, かつ Δ_i は $\tilde{\mathcal{C}} - \{C_i\}$ 内のいかなる円も含まないと仮定する. さらに, $\tilde{\mathcal{C}}$ は局所有限 (すなわち Ω 内の任意のコンパクト集合 K は高々有限個の $\tilde{\mathcal{C}}$ の元と交わる), かつ $C_i \cap C_j = \emptyset$ のとき, $\Delta_i \cup \Delta_j$ の外側での C_i と C_j の交差角は $\pi/2$ 以下であると仮定する. このとき, もし $\tilde{\mathcal{C}}$ の “nerves” の集合が, Ω のある三角形分割 T の 1-骨格と一致するらば, $\tilde{\mathcal{C}}$ は Ω 上のサークル・パターンと呼ばれる. T の任意の三角形の頂点に対応する 3 円 $C_i, C_j, C_k \in \tilde{\mathcal{C}}$ に直交する Ω 内の円 D_l が存在する (図 1.1 参照). このような円全体の集合 $\tilde{\mathcal{D}}$ を, $\tilde{\mathcal{C}}$ に直交する円の集合という. また, $\tilde{\mathcal{C}}$ 内の互いに交わるすべての 2 円の交差角が零のとき, $\tilde{\mathcal{C}}$ をサークル・パッキングという.

Ω が擬 Fuchs 群 Γ の不連続領域 $\Omega(\Gamma)$ と一致する場合を考える. もし, $\Omega(\Gamma)$ 内のサークル・パターン $\tilde{\mathcal{C}}$ が Γ -不変なとき, 等化写像 $p: \Omega(\Gamma) \rightarrow \Omega(\Gamma)/\Gamma$ による, $\tilde{\mathcal{C}}$ の像 $\mathcal{C} = p(\tilde{\mathcal{C}})$ を 2 成分 Riemann 曲面 $\Omega(\Gamma)/\Gamma$ 上のサークル・パターンという. サークル・パターン, パッキングに関する詳しいことは, 松崎 [8] を参照せよ.

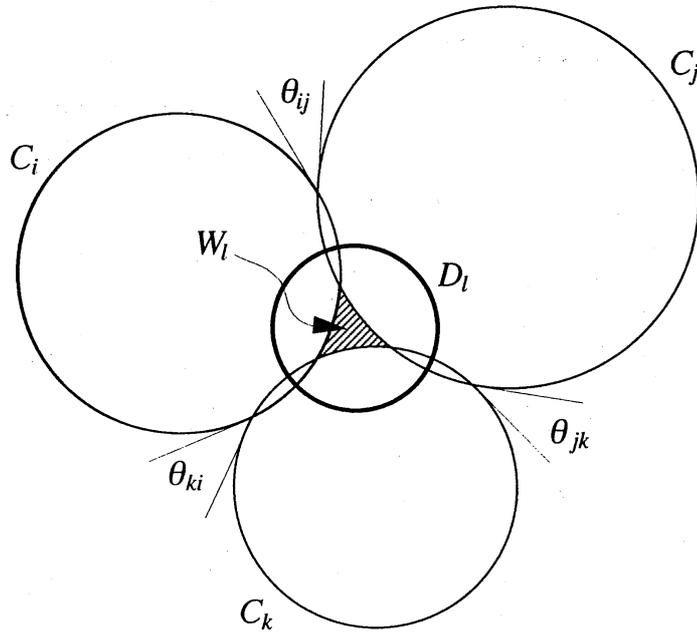


図 1.1

G を、離散表現 $\bar{\rho}_0 : G \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ を許す、ねじれを持たない有限生成群とする。また、 $C(\bar{\rho}_0)$ を $\bar{\rho}_0$ を含む $\bar{R}(G)$ の連結成分とする。Culler [4] の定理とホモトピー持ち上げ定理より、 $C(\bar{\rho}_0)$ の任意の元 $\bar{\rho}$ はリフト $\rho : G \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ を持つ。したがって、 $R(G)$ における ρ_0 の充分小さい開近傍 O を取れば、自然な射影 $P : R(G) \rightarrow \bar{R}(G)$ は O を $\bar{\rho}_0$ の近傍 $\bar{O} \subset \bar{R}_0(G)$ の上に同相に写す。さらに、 $\mathbb{H}^3/\bar{\rho}_0(G)$ が有限体積のときは、 O は $R(G)$ のただ一つの既約成分 $R_0(G)$ に含まれると仮定できる（例えば Hodgson-Kerckhoff [7] を見よ）。特に、 $\bar{R}_0(G) = P(R_0(G)) \supset \bar{O}$ である。

以下では、 S は常に種数 $g > 1$ の向き付け可能な閉曲面とする。

補題 1. (i) $k < n$ である、任意の $n, k \in \mathbb{N}$ に対して、 $\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \subset \mathrm{Rig}_k(\Pi_S)$ 。

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 $\mathrm{Rig}_n(\Pi_S) \subset QF(S)$ 。

証明の概略 任意の $\tau \in \mathrm{Rig}_n(\Pi_S)$ に対し、 n 個のカスプを持つ有限体積の双曲的多様体 M と π_1 -単射写像 $i_S : S \rightarrow M$ で、 $i_S^*(\bar{R}_0(\Pi_M)) = \mathrm{conj}(\tau)$ をみたすものが存在する。

(i) M の $n - k$ 個のカスプの Dehn 手術で得られた k 個のカスプを持つ双曲的多様体を M' とする。このとき、 τ は $\bar{R}_0(\Pi_{M'})$ において rigid である。すなわち、 $\tau \in \mathrm{Rig}_k(\Pi_S)$ 。

(ii) τ が rigid であることから、 $\tau(\Pi_S)$ が parabolic 元を持たないことが分かる。したがって、 $\tau(\Pi_S)$ が擬 Fuchs 群であることと、幾何的に有限な Klein 群であることは同値である。もし、 $\tau(\Pi_S)$ が幾何的に無限であったならば、Thurston の被覆定理 [10, Theorem 9.2.2] や Bonahon [1] の定理より、 M の有限被覆 \tilde{M} で円周上の S -バンドルであるものが存在する。特に、 \tilde{M} はコンパクトであり、かつコンパクトでない多様体 M を被覆しているこ

とになるが、これは矛盾である。□

§2. カスプを持つ双曲的多様体の構成

この節では、 S を rigid な曲面として含む、カスプを持つ双曲的多様体を構成し、定理2の証明の概略を与える。

Brooks [2] の定理2によると、任意の $\tau_0 \in QF(S)$ と、その任意の開近傍 $\mathcal{N}(\tau_0) \subset QF(S)$ に対し、 $\mathcal{N}(\tau_0)$ に含まれる元 τ で、 $\Omega(\Gamma)$ が Γ -不変なサークル・パターンを持つものが存在する。ただし、 $\Omega(\Gamma)$ は擬 Fuchs 群 $\Gamma = \tau(\Pi_S)$ の不連続領域である。

Γ に対する Klein 多様体 $O(\Gamma) = (\mathbf{H}^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$ を考える。等化写像 $p: \mathbf{H}^3 \cup \Omega(\Gamma) \rightarrow O(\Gamma)$ は普遍被覆である。このとき、 $C = p(\tilde{C})$ は $\partial O(\Gamma) = p(\Omega(\Gamma))$ 上のサークル・パッキングである。 $\{C_1, \dots, C_m\}$ を、 C_i と $\cup(C - \{C_i\})$ の交点がちょうど3点 x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} であるような、 C の円全体の集合とし、 $C - \{C_1, \dots, C_m\} = \{C_{m+1}, \dots, C_{m+r}\}$ とおく。もし必要ならば C に新たに円を加えて、 $\partial O(\Gamma)$ 上の新しいサークル・パッキングを考えることによって、任意に与えられた $n \in \mathbf{N}$ に対し、 $3m \geq n$ と仮定できる。 $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_u\}$ を C に直行する $\partial O(\Gamma)$ 内の円全体からなる集合とする。 P_i, Q_j を $\partial P_i = C_i, \partial Q_j = D_j$ をみたすような、 \mathbf{H}^3/Γ 内の全測地的平面とする。 $\mathbf{H}^3/\Gamma - (\cup_{i=1}^m P_i) \cup (\cup_{j=1}^u Q_j)$ の連結成分で、 \mathbf{H}^3/Γ の凸コアを含むようなもの \mathbf{H}^3/Γ における閉包を N とする。包含写像 $N \subset \mathbf{H}^3/\Gamma$ はホモトピー同値写像であるから、埋め込み $i_S: S \rightarrow N$ で $\pi_1(i_S) = \tau$ をみたすものが存在する。 N の境界 ∂N は仮想頂点を持つ全測地的多面体 $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_u$ からなる。ただし、 $A_i = P_i \cap \partial N, B_j = Q_j \cap \partial N$ である。 $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ のとき、 A_i と B_j は直交する。 N を基底空間、 ∂N を特異焦点集合とするような、双曲的軌道体を考える。このとき、4-重軌道体被覆 $q: M \rightarrow N$ で、 M はカスプを持つ有限体積の双曲的多様体になり、かつ被覆変換群が $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ に同型なものが存在する。さらに、この変換群は $\text{Fix}(\alpha) = q^{-1}(\cup_{i=1}^m A_i), \text{Fix}(\beta) = q^{-1}(\cup_{j=1}^u B_j)$ をみたす等長写像 $\alpha, \beta: M \rightarrow M$ で生成される (図 2.1 参照)。 N 内の S は、 M 上の曲面 (これも S で表す) にリフトできる。 $\partial O(\Gamma)$ 上の点 $x_{i\gamma}$ ($i = 1, \dots, m; \gamma = 1, \dots, 3$) に対応する M の $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ -カスプを $\delta(x_{i\gamma})$ で表し、その他の M のカスプを $\delta(y_k)$ ($k = 1, \dots, l$) で表すところにする。階数2の自由アーベル群 $\pi_1(\delta(x_{i\gamma}))$ の生成元のうち、 $\text{Fix}(\alpha)$ とのみ交わり $\text{Fix}(\beta)$ とは交わらないループで定義されるものを $\mu_{i\gamma}$ で表す。同様にして定義される $\pi_1(\delta(y_k))$ の生成元を ν_k で表す。

ここで、 M のホロノミーのリフト $\rho_\infty: \Pi_M \rightarrow \text{SL}_2(\mathbf{C})$ を含む代数的多様体 $R_0(\Pi_M)$ について復習する。まず、 $\sigma_{i\gamma}, \sigma_k \in \{-1, 1\}$ を、 $\sigma_{i\gamma} \text{tr}(\rho_\infty(\mu_{i\gamma})) = 2, \sigma_k \text{tr}(\rho_\infty(\nu_k)) = 2$ をみたす定数とする。このとき、

$$\eta(\rho) = (2 - \sigma_{11} \text{tr}(\rho(\mu_{11})), \dots, 2 - \sigma_{m3} \text{tr}(\rho(\mu_{m3})), 2 - \sigma_1 \text{tr}(\rho(\nu_1)), \dots, 2 - \sigma_l \text{tr}(\rho(\nu_l)))$$

で定義される正則写像 $\eta: R(\Pi_M) \rightarrow \mathbf{C}^{3m+l}$ を考える。よく知られているように、 $R(\Pi_M)$ における ρ_∞ の連結開近傍 O_∞ で、次元が $3m+l+3$ の (滑らかな) 複素多様体であるものが存在する。特に、 O_∞ は、ただ一つの既約成分 $R_0(\Pi_M)$ に含まれる。さらに、制限写像 $\eta|_{O_\infty}$ はしずめ込みであり、 $\eta^{-1}(\eta(\rho)) \cap O_\infty = \text{conj}(\rho) \cap O_\infty$ をみたす (例えば、[7] の第4節を参照)。

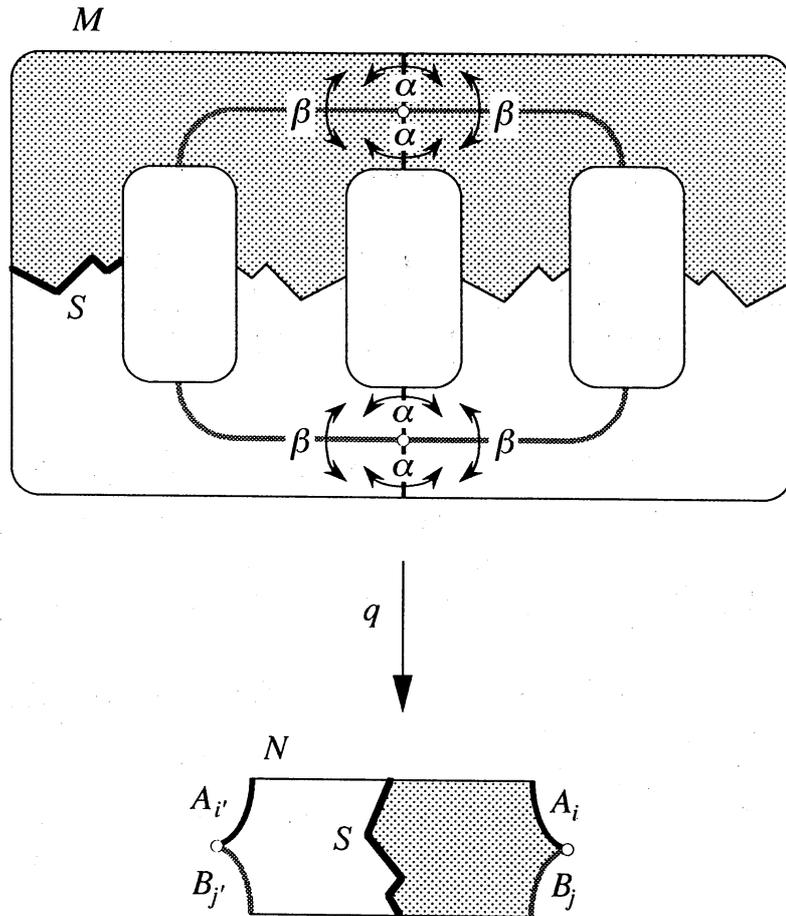


図 2.1

有限生成群 G に対して, $X(G)$ を Culler-Shalen [5, §1] で定義されているような, $R(G)$ の元のキャラクター全体からなる集合とする. [5] で示されているように, $X(G)$ はアフィン代数的集合であり, 自然な射影 $t : R(G) \rightarrow X(G)$ は正則写像である. $X_0(\Pi_M)$ を $t(R_0(\Pi_M))$ を含むような $X(G)$ の既約成分とする. $\eta|_{O_\infty}$ はしずめ込みであるから, ρ_∞ を含む O_∞ 内の $(3m+l)$ 次元連結多様体 W_∞ が存在して, 制限 $\eta_0 = \eta|_{W_\infty} : W_\infty \rightarrow \mathbb{C}^{3m+l}$ は原点 $(0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{3m+l}$ の開近傍 V_0 上への双正則写像となる. ここで, 正則写像

$$\omega : V_0 \xrightarrow{\eta_0^{-1}} W_\infty \subset R_0(\Pi_M) \xrightarrow{t_M} X_0(\Pi_M)$$

を考える. このとき, $U_\infty = \omega(V_0)$ が $X_0(\Pi_M)$ における $t_M(\rho_\infty)$ の開近傍であることが容易に示せる. $i_S^* : X_0(\Pi_M) \rightarrow X_0(\Pi_S)$ を包含写像 $i_S : S \rightarrow M$ から誘導される正則写像とすると, 次のような可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc}
V_0 & \xrightarrow{\eta_0^{-1}} & R_0(\Pi_M) & \xrightarrow{i_S^*} & R(\Pi_S) \\
\omega \downarrow & & \downarrow t_M & & \downarrow t_S \\
U_\infty & \subset & X_0(\Pi_M) & \xrightarrow{i_S^*} & X(\Pi_S)
\end{array}$$

V_0 を充分小さくとれば, 任意の $t \in V_0 \cap \mathbf{R}_+^{3m+l}$ に対し, $\eta_0^{-1}(t)$ は M から双曲的 Dehn 手術で得られる双曲的錐多様体のホロノミーのリフトとして実現できる. 次の補題では, $\mathbf{z} = (z_{11}, \dots, z_{m3}, w_1, \dots, w_l) \in V_0$ とおくと, $i_S^* \circ \omega$ が変数 z_{11}, \dots, z_{m3} に関して不変であることが示される.

補題 2. M を上で与えた $(3m + l)$ 個のカスプを持つ双曲的多様体とする. このとき, $\delta(y_1), \dots, \delta(y_l)$ に沿っての双曲的 Dehn 手術によって, M から得られる $3m$ 個のカスプを持つ双曲的多様体 \widehat{M} に対し, $\hat{\tau} = \hat{\rho} \circ \hat{i}_{S^*} : \Pi_S \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ は $R_0(\Pi_{\widehat{M}})$ で rigid である. ただし, $\hat{i}_S : S \rightarrow \widehat{M}$ は包含写像, $\hat{\rho} : \Pi_{\widehat{M}} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ は \widehat{M} のホロノミーのリフトである.

補題 2 は, $P(\hat{\tau}) \in \mathrm{Rig}_{3m}(\Pi_S)$ を示している. この Dehn 手術の係数を充分大きくとれば, $P(\hat{\tau})$ は $P(\tau) = \tau$ に任意に近接させられる. したがって, $P(\hat{\tau})$ は $\mathcal{N}(\tau_0) \cap \mathrm{Rig}_{3m}(\Pi_S) \subset \mathcal{N}(\tau_0) \cap \mathrm{Rig}_n(\Pi_S)$ の元である. したがって, $\mathrm{Rig}_n(\Pi_S)$ は $QF(S)$ で稠密である. これは, 定理 2 の前半部分である. 後半部分の証明のためには, [2] の定理 3 を利用して, S が全測地的部分曲面になるように, M を構成すればよい (詳細は [6] を参照せよ).

補題 2 の証明の概略 $a_1, \dots, a_l \in \mathbf{N}$ を自然数の任意の l 組で, $t_k = 2 - 2 \cos(\pi/a_k)$ ($k = 1, \dots, l$) に対して, $t' = (0, \dots, 0, t_1, \dots, t_l)$ が V_0 に含まれるようなものとする. このとき, $\rho' = \eta_0^{-1}(t')$ は $3m$ 個のカスプを持つ 3 次元双曲的軌道体のホロノミーのリフトである. Mostow の剛体性定理より, M 上の $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ 作用は, M' 上の等長的作用に拡張される. $q : M' \rightarrow N' = M'/\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ を, この作用による等化写像とする. このとき, N' を軌道体の基底空間というよりは, 区分的に全測地的な境界 $\partial N'$ を持つ双曲的多様体とみなす. A_i, B_j に対応する, $\partial N'$ 内の全測地的多面体を A'_i, B'_j で表す. $A'_{i_1} \cap A'_{i_2} \neq \emptyset$ であって, それが M' の特異焦点集合の k 番目の成分に対応するとき, N' において A'_{i_1} と A'_{i_2} の作る角度は π/a_k である. また, $A'_i \cap B'_j \neq \emptyset$ であれば, これらの多面体は直交する. $\tau' = \rho' \circ i_{S^*} : \Pi_S \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, $\Gamma' = P(\tau')(\Pi_S) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbf{C})$ とおく. また, Klein 多様体 $O(\Gamma') = (\mathbf{H}^3 \cup \Omega(\Gamma'))/\Gamma'$ を考える. P'_i を $P'_i \cap \partial N' = A'_i$ をみたすような, \mathbf{H}^3/Γ' 内の全測地的平面とする. このとき, $O(\Gamma')$ における境界 $C'_i = \partial P'_i$ ($i = 1, \dots, m+r$) は, $\partial O(\Gamma')$ 上のサークル・パッキング C' を定義する. C' の nerves の集合は, C の nerves の集合と同じ組合せ型を持つ. $1 \leq i \leq 3m$ に対して, C'_i と $\cup(C' - \{C'_i\})$ の交点は 3 点 $x'_{i1}, x'_{i2}, x'_{i3}$ からなる. $C'_{i\gamma}$ を $C'_i \cap C'_{i\gamma} = \{x'_{i\gamma}\}$ となる C' の元とする, 図 2.2 (a) 参照. 充分小さい $s_{i\gamma} > 0$ ($i = 1, \dots, m, \gamma = 1, 2, 3$) に対して, $\partial O(\Gamma')$ 内の円 C''_i で $C'_{i\gamma}$ との交差角が $\theta_{i\gamma} = \arccos(1 - s_{i\gamma}/2)$ であるものが存在する (図 2.2 (b) 参照).

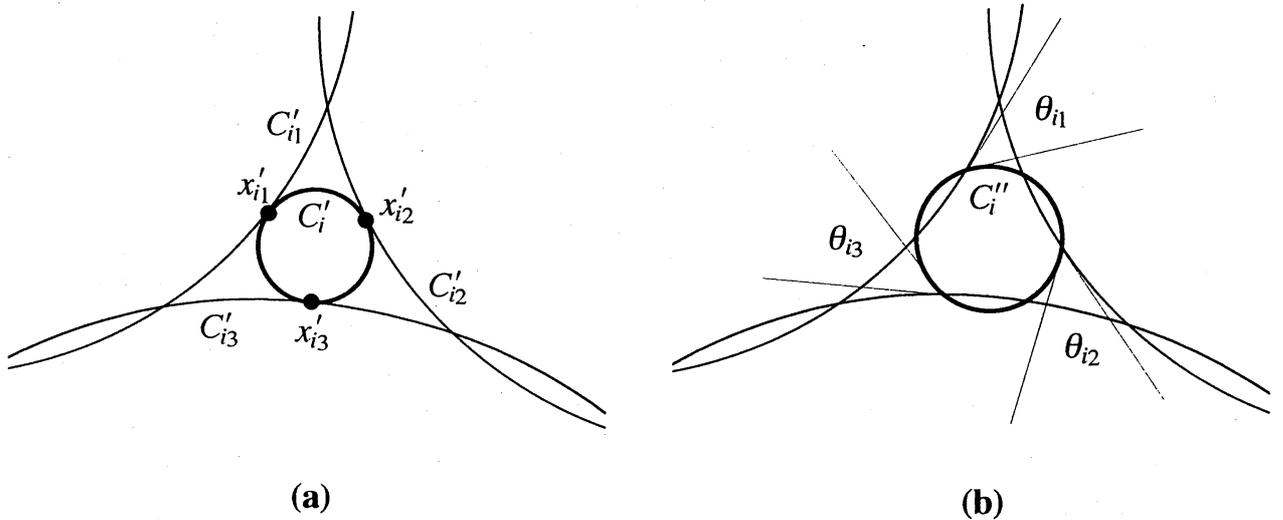


図 2.2

ここで、新しいサークル・パターン

$$C'' = \{C''_1, \dots, C''_m\} \cup \{C'_{m+1}, \dots, C'_{m+r}\}$$

を考える. $D'' = \{D''_1, \dots, D''_u\}$ を C'' に直行する $\partial O(\Gamma')$ 内の円全体の集合とする. C, D から M を構成したのと同様に, C'', D'' から双曲的錐多様体 M'' が得られる. 以上の構成を順に並べると,

$$C \implies N \implies M \implies M' \implies N' \implies C' \implies C'' \implies N'' \implies M''$$

となる. 各 θ_{i_r} は充分小さく取ってあるので, M'' は M' から双曲的 Dehn 手術で得られる. したがって, M'' のホロノミーのリフト $\rho'' : \Pi_M \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ で, $\eta_0(\rho'') = (s_{11}, \dots, s_{m3}, t_1, \dots, t_l)$ をみたすものが存在する. Γ' を動かすことなく, C' から C'' への置き換えがなされたので, $\tau'' = \rho'' \circ i_{S^*}$ は $R(\Pi_S)$ において τ' に共役である. これは, $(0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{3m}$ の充分小さな開近傍 V'_0 に対し, $i_S^* \circ \omega' : V'_0 \rightarrow X(\Pi_S)$ が定値写像であることを意味する. ただし, $\omega' : V'_0 \rightarrow X_0(\Pi_M)$ は

$$\omega'(z_{11}, \dots, z_{3m}) = \omega(z_{11}, \dots, z_{m3}, t_1, \dots, t_l)$$

で定義される写像とする. $i_S^* \circ \omega'$ は正則写像であるから, 一致の定理より $i_S^* \circ \omega'$ は V'_0 で定値である. $a_1, \dots, a_l \in \mathbb{N}$ が任意に選べること, および $\lim_{a_k \rightarrow \infty} t_k = 0$ であることより, 再び一致の定理より $i_S^* \circ \omega : V_0 \rightarrow X(\Pi_S)$ が変数 z_{11}, \dots, z_{m3} に関して定値であることが分かる.

$\eta_0^{-1}(\hat{w}) \in R_0(\Pi_M)$ が双曲的多様体 \widehat{M} のホロノミーのリフト $\hat{\rho} : \Pi_M \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ であるような点 $\hat{w} = (0, \dots, 0, \hat{w}_1, \dots, \hat{w}_l) \in V_0$ を取る. \widehat{M} のホロノミーのリフト $\hat{\rho} : \Pi_{\widehat{M}} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \in R_0(\Pi_{\widehat{M}})$ で $t_M \circ j_{\widehat{M}}^*(\hat{\rho}) = \omega(\hat{w})$ をみたすものが存在する. ただし, $j_{\widehat{M}} : M \rightarrow \widehat{M}$ は包含写像である. $j_{\widehat{M}}^* : X_0(\Pi_{\widehat{M}}) \rightarrow X_0(\Pi_M)$ は正則 (したがって特に連続) 写像であるか

ら, $t_{\widehat{M}}(\widehat{\rho})$ の $X_0(\Pi_{\widehat{M}})$ における連結な開近傍 \widehat{U}_∞ で $j_{\widehat{M}}^*(\widehat{U}_\infty) \subset U_\infty$ をみたすものが存在する. $\widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_l$ を固定したとき, $i_S^* \circ \omega$ は z_{11}, \dots, z_{m3} に関して定値であるから, $j_{\widehat{M}}^*(\widehat{U}_\infty)$ の任意の元は $\omega(z_{11}, \dots, z_{m3}, \widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_l) = \omega(0, \dots, 0, \widehat{w}_1, \dots, \widehat{w}_l) = \omega(\widehat{w})$ と表される. したがって,

$$\begin{aligned} \widehat{i}_S^*(\widehat{U}_\infty) &= i_S^*(j_{\widehat{M}}^*(\widehat{U}_\infty)) = \{i_S^*(\omega(\widehat{w}))\} = \{i_S^*(t_M \circ j_{\widehat{M}}^*(\widehat{\rho}))\} = \{i_S^*(j_{\widehat{M}}^* \circ t_{\widehat{M}}(\widehat{\rho}))\} \\ &= \{\widehat{i}_S^*(t_{\widehat{M}}(\widehat{\rho}))\} = \{t_S(\widehat{i}_S^*(\widehat{\rho}))\} = \{t_S(\widehat{\tau})\}. \end{aligned}$$

ただし, $\widehat{i}_S^*: X_0(\Pi_{\widehat{M}}) \rightarrow X(\Pi_S)$ は包含写像 $\widehat{i}_S: S \rightarrow \widehat{M}$ から誘導される正則写像である. \widehat{i}_S^* は $t_{\widehat{M}}(\widehat{\rho})$ の近傍 \widehat{U}_∞ 上で定値であるから, \widehat{i}_S^* は $X_0(\Pi_{\widehat{M}})$ 上でも定値である. したがって,

$$t_S(\widehat{i}_S^*(R_0(\Pi_{\widehat{M}}))) = \widehat{i}_S^*(t_{\widehat{M}}(R_0(\Pi_{\widehat{M}}))) \subset \widehat{i}_S^*(X_0(\Pi_{\widehat{M}})) = \{t_S(\widehat{\tau})\}$$

が成り立つ. すなわち, $\widehat{i}_S^*(R_0(\Pi_{\widehat{M}})) \subset t_S^{-1}(\widehat{\tau}) = \text{conj}(\widehat{\tau})$ である. 以上で, $\widehat{\tau}$ が $R_0(\Pi_{\widehat{M}})$ で rigid であることが証明された. \square

§3. 定理 1 の証明の概略

補題 1 (ii) より, $\text{Rig}_1(\Pi_S) \subset QF(S)$ である. 容易に分かるように, $\text{Rig}_1(\Pi_S)/\text{conj}$ は可算集合である. 一方, 等化空間 $QF(S)/\text{conj}$ は $\mathbf{R}^{12(g-1)}$ に同相であるから, $\text{Rig}_1(\Pi_S) \neq QF(S)$ が成り立つ. 以上で, 定理 1 (i) が証明できた.

定理 1 (ii) の証明の概略 必要条件の証明は, 双曲的 Dehn 手術定理 [10, Theorem 5.9] より自明なので, ここでは十分条件の証明の概略を述べる.

$M_m = \mathbf{H}^3/\Lambda_m$, $M_\Gamma = \mathbf{H}^3/\Gamma$ (ただし, $\Gamma = \tau(\Pi_S)$) とおく. 相異なる Λ_m が共通の部分群 Γ を持つことより, 必要ならば $\{\Lambda_m\}$ のある無限部分集合を考えることにより, $\{\Lambda_m\}$ の各元は互いに $\text{PSL}_2(\mathbf{C})$ で共役ではないと仮定できる. $i: S \rightarrow M_\Gamma$ を $\pi_1(i) = \tau$ をみたす滑らかな埋め込みとする. Λ_m は Γ を含むので, 局所等長的被覆 $q_m: M_\Gamma \rightarrow M_m$ が存在する. $S_m = q_m(i(S))$ の直径は有界なので, ε より充分小さい $\delta > 0$ を取れば, 任意の m に対して, $S_m \subset (M_m)_{\text{thick}(\delta)}$ となる. $\sup_m \{\text{vol}(M_m)\} < \infty$ であり, かつ $(M_m)_{\text{thin}(\delta)}$ は 2 成分以上を持つことはないので, $\{\Lambda_m\}$ の無限部分列 $\{\Lambda_r\}$ と, 1 個のカスプを持つ有限体積の双曲的多様体 M , および $\lim_{r \rightarrow \infty} K_r = 1$ をみたす K_r -擬等長写像 $\varphi_r: (M_r)_{\text{thick}(\delta)} \rightarrow M_{\text{thick}(\delta)}$ が存在する (例えば, [10, §5.11] 参照). $(\varphi_r)_* = \text{id}_{\Pi_M}$ となるように, $\pi_1((M_r)_{\text{thick}(\delta)})$ と $\pi_1(M_{\text{thick}(\delta)}) = \Pi_M$ を同一視する. このとき, $(M_r)_{\text{thick}(\delta)}$ のホロノミー $\bar{\rho}_r: \Pi_M \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbf{C})$ を適当に取ることによって, $\{\bar{\rho}_r\}$ が $\bar{R}(\Pi_M)$ において M のホロノミー $\bar{\rho}_\infty$ に収束するようにできる. Ascoli-Arzelà の定理より, $\{\Lambda_r\}$ の無限部分列 $\{\Lambda_u\}$ が存在し, $\varphi_u \circ (q_u \circ i)$ が $M_{\text{thick}(\delta)} \subset M$ において互いにホモトピックであるようにできる. よって, Π_S と Π_M の部分群 $(\varphi_u \circ (q_u \circ i))_*(\Pi_S) = (q_u \circ i)_*(\Pi_S)$ との同一視は, u の選び方に依存しない. したがって, $\{\bar{\rho}_u|_{\Pi_S}\}$ は $\bar{R}(\Pi_S)$ において $\bar{\rho}_\infty|_{\Pi_S}$ に収束する. 各 $\bar{\rho}_r|_{\Pi_S}$ は $\text{PSL}_2(\mathbf{C})$ において τ に共役であるから, $\bar{\rho}_\infty|_{\Pi_S}$ もまた τ に共役である.

$\mu \in \Pi_M$ を M の $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ -カスプの基本群を生成する元の一つとする. §2 と同様に, $0 \in \mathbf{C}$ の開近傍 V_0 と正則写像 $\omega: V_0 \rightarrow X_0(\Pi_M)$ が存在して, $\omega(z) = t_M(\rho)$ となる. ただし, $\rho: \Pi_M \rightarrow \text{SL}_2(\mathbf{C})$ は, 定数 $\sigma = 2/\text{tr}(\rho_\infty(\mu))$ に対し, $z = 2 - \sigma \text{tr}(\rho(\mu))$ をみたす表現で

ある. $i_S : S \rightarrow M$ は π_1 -単射写像で, $i_{S*} : \Pi_S \rightarrow \Pi_S \subset \Pi_M$ が恒等写像になるものとする. 充分大きな全ての u と, $\bar{\rho}_u$ のあるリフト $\rho_u : \Pi_S \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ に対して, $\omega(z_u) = t_M(\rho_u)$ をみたす $z_u \in V_0$ が存在する. τ のあるリフト τ に対して, $i_S^* \circ \omega(z_u) = t_S(\tau)$ であり, かつ $\lim_{u \rightarrow \infty} z_u = 0$ であるから, 一致の定理より $i_S^* \circ \omega$ は V_0 上で定値である. したがって, 補題 2 と同様な議論によって, $P(\tau) = \bar{\tau} \in \mathrm{Rig}_1(\Pi_S)$ が成り立つ. \square

参考文献

1. F. Bonahon, Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, *Ann. of Math.* **124** (1986), 71-158.
2. R. Brooks, Circle packings and co-compact extensions of Kleinian groups, *Invent. Math.* **86** (1986), 461-469.
3. D. Cooper and D. Long, An undetected slope in a knot manifold, In: *Topology '90, Proceedings of the Research Semester in Low Dimensional Topology at Ohio State University*, pp. 111-121, de Gruyter, Berlin New York 1991.
4. M. Culler, Lifting representations to covering groups, *Advances in Math.* **59** (1986), 64-70.
5. M. Culler and P. Shalen, Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds, *Ann. of Math.* **117** (1983), 109-146.
6. M. Fujii and T. Soma, Rigid quasi-Fuchsian subgroups in algebraic deformations, Preprint.
7. C. Hodgson and S. Kerckhoff, Rigidity of hyperbolic cone-manifolds and hyperbolic Dehn surgery, Preprint.
8. 松崎克彦 (他), Circle Packing の幾何学, 数理解析研究所講究録 **893**, 1995.
9. W. Neumann and A. Reid, Rigidity of cusps in deformations of hyperbolic 3-orbifolds, *Math. Ann.* **295** (1993), 223-237.
10. W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, *Lect. Notes, Princeton Univ.*, 1978.