数理解析研究所講究録
967巻 1996年 92-99

Klein 群と Carathéodory 収束

谷口 雅彦 (Masahiko TANIGUCHI)
京都大学大学院
理学研究科数学教室

1 一般的導入

群 Γ の表現列 $\rho_n:\Gamma\longrightarrow G_n$ が $\rho:\Gamma\longrightarrow G$ に代数的に収束するとは、全ての元 $\gamma\in\Gamma$ にたいし$\rho_n(\gamma)$ が $\rho(\gamma)$ に収束することである。このような「各点収束性」は、ある種の弱収束である。従ってたとえばタイヒミュラー空間での極限操作を考える場合には、代数的収束では一般に弱すぎるため、他のより精密な収束概念を用いる必要がある。Cofinite な擬フックス群の周辺などでは代数的収束性が projective structure の変形の Bers 収束、つまり群と compatible な Riemann map の local (weak) uniform convergence のような一見より強力な収束性と一致するという安定性が成り立つが、一般にはこのようなことは当然望めない。そのような乖離は無限生成の場合には普遍的にあらわれる。

例 1 無限生成のフックス群 G に適当な有限個のメビウス変換を付け加えて異なるクライン群 G' を作る。それら有限個の元に対応する G の生成元を「後ろ」にとばしてゆくことにより、同型表現 $\rho_n:G\longrightarrow G'$ で代数的には $id:G\longrightarrow G$ に収束するものが作れる。

ここで、(2次元の) 単連結領域の Gromov 収束はまさに上記の Riemann map の local uniform convergence を意味していた。一方、古典的には Riemann map の local (weak) uniform convergence は像領域の point-marked Carathéodory 収束と同値である。

ここで、リーマン球面内の open sets の収束としては、それ自身の (marked-point-free) Carathéodory 収束や、それらの境界あるいは補集合の Hausdorff 収束が自然であろう。以上、くわしくは [3] 等に委ねるが、つぎの定義のみを与えておく。

Definition Open sets の列 $\{\Omega_n\}$ in $\hat{\mathbb{C}}$ が Ω に Carathéodory 収束するとは

1. 任意の compact subset $K \subset \Omega$ が十分大きい任意の Ω_n に含まれ
2. 無限個の Ω_n に含まれる任意の open set は常に Ω にも含まれる

事である。

ここで注目に値するのは、位相的な収束と思える Carathéodory 収束が、(point-marked Carathéodory 収束の場合のように、やはり) Bloch norm や BMO norm といった極めて解析的な概念を用いて「計量」化できることである ([6])。

定理 1 単位円板の $\hat{\mathbb{C}}$ 内への等角写像の列 $\{f_n\}$ で、各々が $z=0$ の近傍で

$$\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

の形の展開を持つとする。この時 f_n のシフト $\hat{f}_n(z)=z\cdot f_n(z)$ は f のシフト $\hat{f}(z)$ に *Bloch norm* に関しノルム収束することと像領域 $f_n(U)$ が $f(U)$ に *Carathéodory* 収束することとは同値である。

更にこれらの条件は、f_n が f に単位円周上の *BMO norm* に関してノルム収束することとも同値である。

point-marked Carathéodory 収束は領域性にこだわりを持ち、かつ (代数的収束とは違う意味で) 最も弱い収束であるといえる。一方、上定理は Carathéodory 収束が双曲計量の収束を見ていることを意味していて、conformal welding の領域表現の収束というにふさわしい。また境界の Hausdorff 収束は conformal welding の境界表現の収束と言える。いずれにしろ、上に挙げた各種の収束の間には、一般的ヒエラルキーはない。

例 2 8の字曲線 L を固定する。

まず L の非有界な補集合の成分 D にジョルダン領域 D_n が D の中から (包含関係に関し) 単調に収束すれば、*marked (at ∞) Carathéodory* 極限 D は *Carathéodory* 極限と一致し、補集合や境界も D の補集合や境界に *Hausdorff* 収束する。

次に D_n の補集合が L に *Hausdorff* 収束するときでも D_n の *marked (at ∞) Carathéodory* 極限はやはり D であるが、*Carathéodory* 極限は

8の字の補集合全体となる。さらにこの例をすこし変えれば、D_n および D_n の補集合が L の補集合および L に *Hausdorff* 収束しなくとも、D_n の *marked (at ∞) Carathéodory* 極限がやはり D である例も作れる。

一方、D_n が L の補集合に広がってかつ入りくんでいくときは、*marked (at ∞) Carathéodory* 極限 D が *Carathéodory* 極限と一致しても、境界の *Hausdorff* 極限は内点を持ち、 D の境界とは一致しないものが得られる。

ただし、point-marked Carathéodory 収束 (Gromov 収束) と他の (見かけ上強い) Carathéodory 収束などとのあいだにヒエラルキーが生じる事はある。このような結果は一種の安定性条件として重要である。

たとえば以下の命題は各収束の定義から容易に分かる。

命題 2 無限遠点を含む単連結領域の列 $\{D_n\}$ が同様の D に *∞-marked Carathéodory* 収束するとする。D が $\hat{\mathbb{C}}$ 内 *dense* ならば D_n および $\hat{\mathbb{C}}-\overline{D_n}$ はそれぞれ D および *empty set* に *Carathéodory* 収束 する。

とくに D_n の補集合は D の補集合に *Hausdorff* 収束する。

このような主張は、領域の有限個の系にたいしても成り立つ。たとえば conformal welding の場合に生じる領域対のばあいには、次のようになる。

命題 3 無限遠点と原点をそれぞれ含む単連結領域の列 $\{D_n\}$ と $\{D'_n\}$ が同様の D と D' に *point-marked Carathéodory* 収束するとする。$D \cup D'$ が $\hat{\mathbb{C}}$ 内 *dense* ならば D_n と D'_n はそれぞれ D と D' に *Carathéodory* 収束 する。

とくに $D_n \cup D'_n$ の補集合は $D \cup D'$ の補集合に *Hausdorff* 収束する。

2 クライン群

有限生成クライン群の作用は、Sullivan らの研究により、極限集合がカオス的部分と一致することが知られていて、残りの部分、すなわち ordinary set 上での作用と相互干渉しない。このような現象は、より一般的な群に対して成立するが、そのようなクライン群の作用に関しては、ordinary sets の各成分の Carathéodory 収束と ordinary sets そのものの Carathéodory 収束のあいだにヒエラルキーが生じる事がある。

定理 4 （有限生成とはかぎらない） *Fuchsian group* Γ の *generalized b-groups* （すなわち単連結な不変成分が指定された群）としての表現の列 $\{\rho_n : \Gamma \longrightarrow G_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ に代数的に収束するとする。

任意の G の成分の *stabilizer* が *non-elementary* であるとするとき、G_n の *ordinary sets* $\Omega(G_n)$ が G の *ordinary set* $\Omega(G)$ に *Carathéodory* 収束すれば、G_n の（*generalized b-groups* として）指定された単連結な不変成分 Δ_n も G の指定された単連結な不変成分 Δ に *Carathéodory* 収束する。

Remark 一般に $\{\rho_n : \Gamma \longrightarrow G_n\}$ が $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ に代数的に収束するとき

$$\cap_k \overline{\cup_{n=k}^{\infty} \Lambda(G_n)} \supset \Lambda(G),$$

すなわち

$$\cup_k \mathrm{Int}(\cap_{n=k}^{\infty} \Omega(G_n)) \subset \Omega(G).$$

は常に成り立つ。

他方、ordinary sets の Carathéodory 収束の重要性は、群に対応する３次元双曲多様体の Gromov 収束（あるいは群そのものとしては、幾何学的収束）との密接な関連にある。まず、つぎの定義を思い出しておく。

Definition 任意の $PSL(2, \mathbf{C})$ の部分群の列 $\{G_n\}$ にたいし、$\{G_n\}$ の envelop を

$$\mathrm{Env}\{G_n\} = \{g \in PSL(2, \mathbf{C}) \mid g = \lim_n g_n,\ g_n \in G_n\}.$$

で定義する。

列 $\{G_n\}$ が $H = \mathrm{Env}\{G_n\}$ に幾何学的に収束するとは、任意の部分列 $\{G_{n'}\}$ にたいして $H = \mathrm{Env}\{G_{n'}\}$ が成り立つことである。

明らかに $\mathrm{Env}\{G_n\}$ も群で、すべての G_n が discrete なら envelop H は discrete か（discrete とは限らない） elementary group である。また $\{G_n\}$ が G に幾何学的に収束するということをいいかえると

1. 任意の $g \in G$ にたいし $g_n \in G_n$ で $g = \lim_n g_n$ となるものがある。
2. ある $\{g_n \in G_n\}$ の集積点となる任意の g は G の元である。

の２条件が満たされることと同じである。したがって同値な定義として

Definition 列 $\{G_n\}$ が G に幾何学的に収束するとは $\{G_n\}$ が G に Hausdorff 収束することである。すなわち、次の２条件が満たされることである。

1. 任意の G の点の近傍は有限個を除くすべての G_n と交わる。

2. g が無限個の G_n とまじわれば $g \in G$ である。

Remark すでに触れた様に、幾何学的収束は対応する3次元多様体の Gromov 収束と同値であり、これはたとえば群の基本多面体の polyhedral 収束として述べることができる ([2])。

Definition クライン群 G_n が G に polyhedrally に収束するとは、ある点 p での fundamental polyhedra $P(G_n)$ が $P(G)$ に局所一様に収束することである。

このとき上述の同値性は Jorgensen-Marden [2] による。

定理 5 クライン群の列があるクライン群に幾何学的に収束することと *polyhedrally* に収束することとは同値である。

さらに有限生成のある種のクライン群の代数的収束列の場合には、対応する ordinary sets の Carathéodory 収束 は幾何学的収束とヒエラルキーを作ることも知られている ([2])。

定理 6 *Torsion free* 有限生成 *Kleinian group* Γ にたいし、代数的収束列 $\{\rho_n : \Gamma \longrightarrow G_n\}$ をとり、その極限を $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ とする。$\Omega(G)$ が空でないとし、 $\Omega(G_n)$ が $\Omega(G)$ に *Carathéodory* 収束するとするとき G_n は G に幾何学的にも収束する。

Remark 有限生成クライン群の幾何学的極限が幾何学的有限な場合には、幾何学的収束から Carathéodory 収束 がでることも Jorgensen-Marden によって示されている。(さらに幾何学的極限は代数的極限と rank 2 parabolic groups とで生成される。) この主張は、 Bonahon 条件をみたし、両側に parabolic が保たれていれば、やはり正しいことが、大鹿 [5] により示されている。

有限生成 Kleinian group の場合には、 ordinary sets の Carathéodory 収束は常に幾何学的収束を意味しているように思われるが、完全には未解決の様である。一方、幾何学的収束から ordinary sets の Carathéodory 収束がでない例は無限生成なら容易に作れる。

例 3 例1のように、無限生成のフックス群 G に適当な有限個の双曲型変換を付け加えて異なるクライン群 G' を作る。それら有限個の元に対応する G の生成元を「後ろ」にとばしてゆくことにより、同型表現 $\rho_n : G \longrightarrow G'$ で代数的には $id : G \longrightarrow G$ に収束するものが作れる。ここで付け加えた元の移動距離を無限大に飛ばしてゆけば、幾何学的には収束させることができる。

3 強収束

有限生成の場合でも、代数的収束のみからでは一般的には幾何学的収束も Carathéodory 収束もでない。ただつぎの主張は成り立つ ([2])。

定理 7 表現列 $\{\rho_n : \Gamma \longrightarrow G_n\}$ が代数的に $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ に収束するとき、$\{G_n\}$ は常に幾何学的に収束する部分列 $\{G_{n_k}\}$ を含む。そのような部分列の幾何学的極限 H は常に G を含む。

H が有限生成なら *homomorphism* $\psi_{n_k} : H \longrightarrow G_{n_k}$ で $\lim_k \psi_{n_k}(h) = h$ ($h \in H$) を満たすものが十分大きい k に対して存在する。さらに G も有限生成のときは $\psi_{n_k}(H) = G_{n_k}$ と出来る。

実際に、幾何学的極限が代数的極限よりも真に大きくなる例は Jorgensen, Marden, Thurston, Kerckhoff, 大鹿らにより数々報告されている。次の例は、それらの原点とも言える例である。

例 4 零でない ω_1 と ω_2 を $\tau = \omega_2/\omega_1$ の虚部が正であるようにとる。

$$a_n = \exp\left(-2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1 + n\omega_2}\right)$$

と置き、 G_n を

$$V_n(z) = a_n z + \omega_2.$$

で生成される *loxodromic cyclic group* とする。

G_n は *parabolic cyclic group* $G =< T_2(z) = z + \omega_2 >$ に代数的に収束するが、幾何学的には *abelian group* $H =< T_1(z) = z + \omega_1, T_2 >$ に収束する。

しかし、代数的収束と Carathéodory 収束および幾何学的収束とのヒエラルキーが成り立つ場面もたとえば、Thurston, Kerckhoff, 大鹿, Canary, Minsky, Anderson 等により、数多く発見されている。ただし、クライン群の強収束性の文脈で語られるのが普通である。命題2の系もそのような場面を与える。まず、命題2から次の主張が得られる。

命題 8 （有限生成とはかぎらない） *Fuchsian group* Γ の *generalized b-groups* （すなわち単連結な不変成分が指定された群）としての表現の列 $\{\rho_n : \Gamma \longrightarrow G_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ に代数的に収束するとする。

さらに G_n の指定された単連結成分 Δ_n が G の指定された単連結成分 Δ に *point-marked Carathéodory* 収束するとき、Δ が $\mathbf{C}$ で *dense* ならば、G_n の *ordinary sets* $\Omega(G_n)$ は G の *ordinary set* $\Omega(G)$ に *Carathéodory* 収束する。

Remark 一方命題3は、有限生成 quasifuchsian groups の列の場合には、擬等角安定性を意味していることに注意せよ。さらに次の Jorgensen の結果とも比較せよ。

命題 9 体積有限な3次元双曲多様体 V_n が V に *Gromov* 収束するとき $\lim_n Vol(V_n) = Vol(V)$。

さて、定理6と命題8から次の大鹿 [5] の結果が得られる。

系 1 第1種有限生成 *fuchsian group* Γ の *Bers slice* への表現の列 $\{\rho_n : \Gamma \longrightarrow G_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ に代数的に収束するとする。G が *degenerate group* のとき、G_n は G に幾何学的にも収束する。

最後に Anderson-Canary ([1]) による、この方面で最も深い結果を述べておく。

定理 10 有限生成 *torsion-free* なクライン群 Γ にたいし、表現列 $\{\rho_n : \Gamma \longrightarrow G_n\}$ が代数的に $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ に収束するとする。すべての G_n および G が *purely loxodromic* であり、かつ G の *ordinary set* $\Omega(G)$ が空でないとき、G_n の *ordinary sets* $\Omega(G_n)$ は $\Omega(G)$ に *Carathéodory* 収束し G_n は G に幾何学的に収束する。

定理はたとえば G_n が qc-conjugate な convex cocompact function groups のときは大鹿により示されていた。 Parabolic な元があっても、G が幾何学的素直 (tame) で、APT をもたず surface group と同型でないとき、それらの間の自然な同相写像が元の型を保てば幾何学的収束は言える。(Thurston-大鹿)

定理 11 有限生成 *torsion-free* なクライン群 Γ にたいし、表現列 $\{\rho_n : \Gamma \longrightarrow G_n\}$ が代数的に $\rho : \Gamma \longrightarrow G$ に収束するとする。さらに G の *ordinary set* $\Omega(G)$ が空であるとする。

この時、Γ が *surface groups* と *cyclic groups* の自由積ではなければ、G_n の *ordinary sets* $\Omega(G_n)$ は $\Omega(G)$ に *Carathéodory* 収束し G_n は G に幾何学的に収束する。

なお G が幾何学的素直 (tame) なときには、G に対する仮定なしでも上記の主張はなりたつ (Canary) 。

参考文献

[1] J. A. Anderson and R.D. Canary, *Cores of hyperbolic 3-manifolds and limits of Kleinian groups,* preprint,1995

[2] T. Jorgensen and A. Marden, *Algebraic and geometric convergence of Kleinian groups,* Math. Scand. **66**, (1990), 47-72.

[3] K. Matsuzaki and M. Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups,* Oxford Univ. Press, to appear.

[4] K. Ohshika, *Geometric behavior of Kleinian groups on the boundaries fro deformation spaces,* Quart. J. Math. Oxford **43**, (1992), 97-111.

[5] K. Ohshika, *Strong convergence of Kleinian groups and Carathéodory convergende of domains of discontinuity,* Math. Oric. Camb. Phil. Soc. **112**, (1992), 297-307.

[6] M. Taniguchi, *Bloch topology of the Universal Teichmüller space,* preprint, 1995.