数理解析研究所講究録
969巻 1996年 108-117

解析汎関数のいくつかの変換とその応用

上智大 理工　　吉野邦生 (Kunio Yoshino)

平成8年 5月 21日

解析汎関数にたいして幾つかの変換を定義し、その応用として幾つかの定理と公式を導く。Carlsonの定理、演算子法で重要なLerchの定理、ディジタル信号の理論で用いられるWhittaker-Shanonnの定理(Sampling定理), ラプラス変換の理論で知られているWidderの公式、Schlömilch展開の例を与えるPolya-Pisotの公式などである。

1 解析汎関数のいくつかの変換

WをC^nの開集合とする。$H(W)$でW上の正則関数の全体をあらわす。KをC^nのコンパクト凸集合とするとき、

$$H(K) = \lim_{K \subset W} ind H(W)$$

とおく。$H(K)$にはDFS位相が入ることが知られている。$H(K)$の双対空間を$H'(K)$であらわし$H'(K)$の元を解析汎関数とよぶ。$T \in H'(K)$としたときTのFourier-Borel(フーリエボレル)変換$\tilde{T}(z)$を次の様に定義する。

$$\tilde{T}(z) = \langle T_t, e^{zt} \rangle, (z \in C^n).$$

又、指数型整関数の空間を

$$Exp(C^n : K) = \{f(z) \in H(C^n); \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, |f(z)| \leq C_\varepsilon e^{H_K(z)+\varepsilon|z|}, (z \in C^n)\}.$$

と定義する。
解析汎函数のFourier-Borel変換の像については次の定理が知られている。
定理1 (Ehrenpreis-Martineau) Fourier-Borel変換は解析汎関数の空間$H'(K)$から指数型整関数の空間$Exp(C^n; K)$への線形位相同型である。

Kが$K = \prod_{i=1}^{n} K_i$という直積の形をしていると解析汎関数TのCauchy-Hilbert(コーシーヒルベルト)変換$\check{T}(w)$をつぎで定義することができる。

$$\check{T}(w) = \langle T_t, \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{w_i - t_i} \rangle.$$

ここで

$$H_0(\prod_{i=1}^{n}(C \setminus K_i)) = \{g(w) \in H(\prod_{i=1}^{n}(C \setminus K_i)); \lim_{|w| \to \infty} g(w) = 0\}$$

とおく。

このとき次が知られている。

命題1. Cauchy-Hilbert 変換は$H'(K)$から$H_0(\prod_{i=1}^{n}(C \setminus K_i))$への線形位相同型である。

Cauchy-Hilbert 変換の逆変換は境界値写像と呼ばれる。
例えば$f(t) \in C([a,b])$のCauchy-Hilbert 変換を$F(t+is)$とするとき

$$\lim_{s \to 0}\{F(t+is) - F(t-is)\} = F(t+i0) - F(t-i0) = -2\pi i f(t)$$

が成立するからである。
次のLegendre 多項式$P_n(x)$と第二種Legendre関数$Q_n(x)$の関係はこの例である。

$$Q_n(t+i0) - Q_n(t-i0) = -\pi i P_n(t), (-1 < t < 1)$$

さて$K = \prod_{i=1}^{n} K_i$であるとき指数型整関数$f(z) \in Exp(C^n : K)$に対しそのラプラス変換を次の様に定義する。

$$L(f)(w) = \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} f(z) e^{-wz} dz.$$

次が成立する。

命題2.

$$L \circ FB = CH$$

つまりフーリエボレル変換を行ってからラプラス変換をしたものはコーシーヒルベルト変換に等しい。

C^nのコンパクト凸集合Kに対しi番目座標への射影をK_iと表す。$K_i \subset \{t_i \in C; |Imt_i| < \pi\}, (1 \leq i \leq n)$であると変換G (Avanissian-Gay変換)が次の様にして定義できる。

$$G(T)(w) = \langle T_t, \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-w_i e^{t_i}} \rangle, (w = (w_1, ...w_n)).$$

次の性質を持つ。

命題3.([2])

$$(1) G(T)(w) \in H_0(\prod_{i=1}^{n}(C \setminus exp(-K_i))).$$

$$(2) G(T)(w) = \sum_{m \in N^n} \tilde{T}(m) w^m.$$

(3)(反転公式)

$$\tilde{T}(z) = \left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^n \int_{\prod_{i=1}^{n}\Gamma_i} G(T)(w) w^{-z-1} dw.$$

が成立する。但し、Γ_iは$exp(-K_i)$を正のむきに囲む路である。

注意 (2)において$w = e^{-t}$とおくと

$$G(T)(e^{-t}) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{T}(n) e^{-nt} = \int \tilde{T}(z) e^{-zt} d\mu(z),$$

となる。但し、$d\mu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(z-n)$、($\delta$はディラックのデルタ関数)である。このためAvanissian-Gay変換は時々離散的ラプラス変換とも呼ばれる。

数列空間$l(K)$と標本化写像

$$l(K) = \{\{a_m\}; \exists f \in Exp(C^n : K), s.t. a_m = f(m), (m \in N^n)\}$$

と定義する。

命題4 ($l(K)$の特徴付け)$K = \prod_{i=1}^{n} K_i \subset \prod_{i=1}^{n}\{t_i \in C; |Imt_i| < \pi\}$であるとする。このとき次の(1),(2),(3)は同値である。

$$(1) \{a_m\} \in l(K)$$

$$(2) \sum_{m=0}^{\infty} a_m w^m \in H_0(\prod_{i=1}^{n} C \setminus exp(-K_i))$$

$$(3)\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, |\sum a_n c_n| \le C_\varepsilon sup_{t\in K_\varepsilon} |\sum c_n e^{tn}|.$$

がすべての有限数列(ある番号からさきではすべてゼロである数列)$\{c_n\}$に対して成立する。

(1)と(2)の同値性はLeroy-Lindelöfの定理の特別な場合と考えることができる。又、(1)と(3)の同値性は([9])による。

$Exp(C^n : K) \ni f \to \{f(m)\} \in l(K)$ を標本化写像と呼ぶ。定義から標本化写像は全射である。さらにもし$K \subset \prod_{i=1}^n \{t_i \in C; |Imt_i| < \pi\}$ であれば後述するCarlsonの定理により単射である。

2 Lerchの定理

[12]において次の指数型整関数に関するLiouville型定理を証明した。
定理2 $f \in Exp(C^n : K)$とし、次の条件を満たしているとする。

$$|f(m)| \le A|m|^p, (m \in Z^n).$$

もしKが実コンパクト集合であると$f(z)$は高々p次の多項式である。

(注意) (1) $K = \{0\}$のときはR.Gayにより示された。
(2) $K = \{0\}, n = 1$とした場合の定理は([4])に出ている。

さて、定理2を$n = 1$の場合に使うことによりMikusinskiの方法([6])とは異なるLerchの定理の証明を与えることができる。

Lerchの定理
$f(t)$を$[0, a]$の連続関数で次の条件を満足しているとする。

$$\left|\int_0^a f(t)e^{mt}dt\right| \le M, (m = 0, 1, 2, ...)$$

このとき$f(t) = 0$である。

(証明)$F(z) = \int_0^a f(t)e^{zt}dt$とおく。仮定から

$$|F(m)| \le M, (m = 0, 1, ...).$$

又 $F(z)$ の定義から

$$|F(-m)| \leq a sup_{t\in[0,a]}|f(t)|, (m = 1, 2, ..).$$

が分かる。

$$|F(z)| \leq ae^{ax}, (z = x + iy \in C)$$

である。従って、定理2により $F(z)$ は定数関数である。$\lim_{z\to-\infty} F(z) = 0$ に注意すると

$$F(z) = 0, (z \in C)$$

が分かる。ゆえにフーリエラプラス変換の単射性を使うか又はワイエルシュトラスの多項式近似定理を使うと

$$f(t) = 0, (t \in [0, a])$$

が結論できる。
系 $f(t)$ を $[0, a]$ の連続関数で次の条件を満足しているとする。

$$\int_0^a f(t)e^{mt}dt = 0, (m = 0, 1, 2, ...).$$

このとき $f(t) = 0, (t \in [0, a])$
である。

(注意) 境界値写像を用いても証明できる。([15])

数学的帰納法を用いるとLerchの定理を次のように高次元化することができる。
Lerchの定理の高次元化
$K = \prod_{i=1}^n [0, a_i]$ とおく。$f(t) \in C(K)$ は次の条件を満足しているとする。

$$\left|\int_K f(t)e^{mt}dt\right| \leq M, (m \in N^n).$$

このとき $f(t) = 0, (t \in K)$ である。

解析汎関数によるLerchの定理の一般化については[13]を見てください。

3 Carlsonの定理

定理([2])$f(z) \in Exp(C^n : K)$とし、次の条件を満たしているとする。

$$f(m) = 0, (m \in N^n).$$

もし$K \subset \prod_{i=1}^{n}\{t_i \in C : |Imt_i| < \pi\}$であると$f(z) = 0$である。
(証明)
Martineau-Ehrenpreis の定理により

$$\tilde{T}(z) = f(z)$$

となる解析汎関数$T \in H'(K)$が存在する。命題3の(2)により

$$G(T)(w) = \sum \tilde{T}(m)w^m = \sum f(m)w^m.$$

仮定より$f(m) = 0$であるので

$$G_T(w) = 0.$$

命題3の(3)(反転公式)により

$$f(z) = 0$$

が判る。

(注意) 素粒子論などでは右半平面(複素角運動量平面)上での指数型正則関数に対するCarlsonの定理が使われる。このことも込めてCarlsonの定理に関する話題については例えば[14]を見てください。

4 Polya-Pisotの公式

Cauchy-Hilbert変換とAvanissian-Gay変換を結ぶものとしてつぎの公式がある。
定理 ([5])
$K \subset \{t \in C; |Imt| < \pi\}$ とする。このとき $f(z) \in Exp(C : K)$に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-nt} = \frac{1}{2}f(0) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} L(f)(t + 2\pi in)$$

が成立する。
(証明)

$$\frac{1}{1-e^{\zeta-t}}=\frac{1}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-\zeta+2\pi in}$$

の両辺に解析汎関数$T\in H'(K)$を作用させる。

例 (Schlömilch展開[7])

$$\sum_{n=0}^{\infty}J_0(nx)e^{-na}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{(a+2mi\pi)^2+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{(a-2mi\pi)^2+x^2}}\right)$$

$J_0(z)$は0次のベッセル関数であり$i=\sqrt{-1}$である。

5 Widderの公式

Widderの公式 $f(z)\in Exp(C:K)$, $g(w)=\int_0^{\infty}f(z)e^{-zt}dz$とする。

$$f(z)=\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}g^{(k)}\left(\frac{k}{z}\right)\left(\frac{k}{z}\right)^{k+1}.$$

ここで$g^{(k)}$は$g(w)$のk次導関数である。

解析汎関数の理論を使うと指数型整関数に対するWidderの公式を次のようにして導くことができる。
(証明)$f(z)=\tilde{T}(z)$となる$T\in H'(K)$が存在する。又、命題2 により$g(w)=\check{T}(w)$である。従って

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}g^{(k)}\left(\frac{k}{z}\right)\left(\frac{k}{z}\right)^{k+1}=\lim_{k\to\infty}<T_t,\left(1+\frac{zt}{k}\right)^k>=\tilde{T}(z).$$

(注意)(1) 上の証明はWidderによる証明([10])ともPaley-Wienerによる証明([8])とも異なる。
(2)Kが一般のコンパクト凸集合のときにはFantappie変換$\hat{T}(p)$を用いた次の公式が成立する。([16])

$$\tilde{T}(z)=\lim_{k\to\infty}\frac{(n-1)!}{k!}\prod_{l=n}^{k}D_l\hat{T}(-\frac{k}{z}).$$

ここで

$$D_l f(p) = l f(p) + \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial f(p)}{\partial p_i}$$

であり

$$\hat{T}(p) = \langle T_t, \frac{1}{(1+\sum_{i=1}^{n} p_i t_i)^n} \rangle$$

である。
(3) 超幾何関数から合流型超幾何関数を得る操作はWidderの公式に他ならない。([17])

6 Sampling 定理

Carlsonの定理を使うと標本化写像 $Exp(C^n : K) \longrightarrow l(K)$ が単射であることが分かる。
$l(K)$ から $H_0(C \setminus exp(-K))$ への対応はディジタル信号処理の分野では z 変換とよばれている。$l(K)$ から $Exp(C^n : K)$ への対応は次のSampling定理で実現される。

定理3([12]) $K = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{-1}[-b_i, b_i], (|b_i| < \pi)$ とする。もし $f(z) \in Exp(C^n : K)$ であると次が成立する。

$$f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{m \in N^n} e^{-\varepsilon |n|} f(m) \prod_{i=1}^{n} \frac{\sin(\pi(z_i - m_i))}{\pi(z_i - m_i)}.$$

注意 (1)$n = 1$ のとき上の級数はWhittaker-Shannonの補間公式、又はCardinal級数と呼ばれることもある。
(2)Sampling定理は $n = 1$ のときは音声のディジタル信号処理で重要であり、$n = 2$ のときは画像のディジタル処理で重要である。([1],[11])
(3) 指数型正則関数の自然数の上の値のみを使う補間公式としては例えばNewtonの補間公式がある。([11])
例 (Dougal展開) $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ とする。このとき次が成立する。

$$P_z(\cos\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} P_n(\cos\theta) \frac{\sin(\pi(z-n))}{\pi(z-n)}$$

$P_z(\cos\theta)$ はLegendre関数であり $P_n(\cos\theta)$ はn次のLegendre多項式である。

参考文献

[1] 有本卓：信号、画像のディジタル処理, 産業図書 1980.

[2] V.Avanissian and R.Gay : Sur une transformation des fonctionnlles analytiques et ses applications aux fonctions entieres,Bull Soc.Math.France (1975)

[3] C.Bernstein and R.Gay : *Complex Analysis and Special Topics in Harmonic Analysis*,Vol.II, Springer Verlag, Heidelberg, (1995).

[4] R.P.Boas : *Entire Functions*, Academic Press, New York, (1954).

[5] P.Henrici : *Applied and Computational Complex Analysis*, John Wiley and Sons, (1977).

[6] J.G.Mikusinski : *Operational Calculus*, Pergamun Press.(1959)

[7] 森口、宇田川、一松：数学公式III, 岩波全書.(1960)

[8] R.E.A.C.Paley and N.Wiener : *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Amer.Math.Soc.Colloquim Publ. 19, New York. (1934)

[9] G.Rauzy : Les zeros entieres des fonctions entieres de type exponentiel, Seminaire de Theorie des Nombres, Annes (1976-1977).

[10] D.V.Widder : *An Introduction to transformation theory*, Academic Press. New York London (1971).

[11] 吉野邦生, 荒井隆行：ディジタル信号と超関数, 海文堂,(1995).

[12] K.Yoshino : Liouville type theorem for entire functions of exponential type, Complex Variable. vol.5,28-51. (1985).

[13] K.Yoshino : Lerch's theorem for analytic functionals, Proc. Japan Acad. vol.58, Ser.A, no.9 (1982).

[14] K.Yoshino : On Carlson's theorem for holomorphic functions, *Algebraic Analysis*, vol.2, Academic Press. (1988).

[15] K.Yoshino : New proofs of Lerch's theorem, in preparation,

[16] K.Yoshino : Representation of entire functions of exponential type by Widder's formula, in preparation.

[17] K.Yoshino : Some transformations of analytic functionals and its applications,to appear