数理解析研究所講究録
969巻 1996年 139-142

論文の内容の要旨

論文題目 SCALING 函数の W 空間の次元及び JOINT SPECTRAL RADIUS

氏　名　　程　遠

この論文で、Wavelet 理論における D.Colella と C.Heil の予想を証明した。

$$f(x)=\sum_{k=0}^{N} c_k f(2x-k) \tag{1}$$

は dilation 方程式と呼ばれる。ここで、係数は、条件

$$\sum c_{2k}=\sum c_{2k+1}=1 \tag{2}$$

を満たすと仮定する。この方程式の nonzero 解は scaling function と呼ばれる。もし、係数 $(c_0,\dots,c_N)$ が Cohen の条件を満たせば、任意の一つの scaling 函数から、一つの wavelet を作れる。この wavelet の連続性は scaling 函数の連続性より決まる。最近の wavelet 研究では、scaling 函数の連続性についての研究は多い。1992 年、I.Daubechies は初めて、dilation 方程式の研究で以下のような dyadic の方法を採用した。

まず、方程式（1）を vector 函数より書き直す。係数 $(c_0,\dots,c_N)$ に対して、もし連続で、compact な台を持つ解があれば、supp(f)⊂[0,N] だから、vector 函数

$$v(x)=\begin{pmatrix} f(x) \\ f(x+1) \\ \vdots \\ f(x+N-1) \end{pmatrix} \quad (\forall x\in[0,1]). \tag{3}$$

は函数 $f(x)$ の全部の情報を含んでいる。

二つの $N\times N$の行列を $(\mathbb{T}_0)_{i,j}=c_{2i-j-1}$, $(\mathbb{T}_1)_{i,j}=c_{2i-j}$と定義する。即ち、

$$\mathbb{T}_0=\begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_N & c_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\mathbb{T}_1=\begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_N \end{pmatrix}$$

とする $x\in[0,1]$ に対し

$$\tau x=2x \bmod 1=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1/2, \\ 2x-1 & 1/2\le x\le 1. \end{cases} \tag{5}$$

と定義すれば、dilation 方程式は次の様な vector 方程式になる

$$v(x)=\begin{cases} \mathbb{T}_0 v(2x) & 0\le x\le 1/2, \\ \mathbb{T}_1 v(2x-1) & 1/2\le x\le 1. \end{cases}$$

f(x) が連続とすれば、v(x) も連続で、逆もいえる。

この研究で、最初の問題は係数について、どんな条件を付けると, 対応する函数 f(x) が連続になるかという事である：この問題は 1994 年 D.Cololla と C.Heil より完全に解決された。彼らの結論は曲面 (2) の下で、函数 f(x) が連続函数になる係数 $(c_0,...,c_N)$ の集合は、次の様に与えられる

$$C_W=\{(c_0,...,c_N);(2)\text{ を満たし、}\hat{\rho}(\mathbb{T}_0|_W,\mathbb{T}_1|_W)<1\}. \tag{6}$$

ここで

$$W=span\{v(x)-v(0)\ ;x\in[0,1]\text{ で }x\text{ は dyadic }\}.$$

(2) 式により、行列 $\mathbb{T}_0$、$\mathbb{T}_1$の中で各列の成分を足すと全部 1 になるので、一般的に

$$W\subset V=\{u\in\mathbb{C}^N;u_1+\cdots+u_N=0\}$$

が成り立つ。1994 年 D.Colella と C.Heil は次の予想をした：

予想 $\mu\{(c_0,...,c_N)\in C_W;W\neq V\}=0$ in 曲面 (2) 。

この論文で、次の事を証明した。

定理 5.1（主定理） 予想は正しい。

この定理の証明のため、まず compact 台の distrbution の整数移動に対する線形独立の概念を紹介する。$f\in\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ とする。

$$N(f):=\{a\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}};\sum_{j\in\mathbb{Z}}a(j)f(c-j)=0\}. \tag{7}$$

定義 もし $N(f)=\{0\}$ ならば、fは整数移動について線形独立という。

$$K(f):=\{z\in\mathbb{C}\backslash\{0\};(z^j)_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathbb{Z}\},$$
$$F(f):=\{\zeta\in\mathbb{C};\hat{f}(\zeta+2k\pi)=0,k\in\mathbb{C}\}$$

と記すと、Ron は 1989 年、次の事を証明した。

$$N(f)=\{0\}\Leftrightarrow K(f)\text{ is empty }\Leftrightarrow F(f)\text{ is empty.}$$

更に、

$$e^{i\zeta}\in K(f)\Leftrightarrow\hat{f}(\zeta+2k\pi)=0\text{ for }k\in\mathbb{Z}. \tag{8}$$

言い換えると、もし、fが線形従属であれば、$\exists\zeta\in\mathbb{C}$

$$\hat{f}(\zeta+2k\pi)=0\text{ for }k\in\mathbb{Z}. \tag{9}$$

この論文はまず次の命題を示す：

命題 5.3 f(x) は線形独立である⇒ $W=V$。

命題 5.3 により

$$\{(c_0,...,c_N)\in C_W;W\neq V\}\subset\{(c_0,...,c_N)\in C_W;f(x)\text{ は線形従属である }\}\text{ 。} \tag{10}$$

故り、主定理は次の命題に帰着した。

命題 5.4

$$\mu\{(c_0,...,c_N)\in C_W;f\text{ は線形従属である }\}=0\text{ in 曲面 (2) 。} \tag{11}$$

命題 5.4 の証明が本質的なので、以下命題 5.4 の証明の方針を述べる。

まず (11) の集合を、S と記し、二つの集合

$$S_1=\{(c_0,...,c_N)\in C_W,\exists\zeta\in\mathbb{C},m(\zeta)=m(\zeta+\pi)=0\}$$

と

$$S_2=S\backslash S_1$$

に分けて、$\mu(S_1)=0$ と$\mu(S_2)=0$ の証明ができれば、証明が終わる。

$\mu(S_1)=0$ の証明は、S_1を二つの集合の直積として、Fubini の定理を使うと証明できる。予想の証明の point は$\mu(S_2)=0$ の証明である。

$\mu(S_2)=0$ の証明において、まず fは線形従属なので、ある$\zeta\in\mathbb{C}$ に対し (9) が成り立つ。一方、ここでの fが compact 台の distrbution というだけでなく、scaling 函数でもあるので、次の式も満たす

$$\hat{f}(\zeta)=m(\zeta/2)\hat{f}(\zeta/2). \tag{12}$$

但し、$m(\zeta)=1/2\sum_{k=0}^{N}c_ke^{-ik\zeta}$。論文は (9) と (12) の両方を出発点として、詳しい分析により、$K(f)$ の構造は次のようである事が分かる：

$K(f)$ はいくつかの次のような輪より得られる集合である：

$$\text{(13)} \qquad \{z_0, z_1, ..., z_n\} \quad z_0 = z_1^2, z_1 = z_2^2, ..., z_n = z_0^2, \quad z_i^{2^{n+1}} = z_i \ (0 \le i \le n).$$

一方、この論文は次のことを証明する、

$$z \in K(f) \Rightarrow a(-z) = 0$$

但し、$a(z) = 1/2 \sum_{k=0}^{N} c_k z^k$。故に

$$a(z) = (z + z_0)(z + z_1) \cdots (z + z_n)\tilde{a}(z)$$

と書ける。

$a(z)$ の係数 $(c_0, ..., c_N)$ より得た集合の自由度は $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_2, ..)$ できまるので、このような $a(z)$ の係数より得た集合は曲面 (2) 中の測度 0 の集合である。

一方、N を固定すると、(13) の様な数列は有限個しかないので、$\mu(S_2) = 0$ 。これにより予想の証明は完全にできる。

そのほか、論文は $m(\xi)$ を詳しく分析する。もし

$$m(\xi) = (\frac{1 + e^{-i\xi}}{2})^L \tilde{m}(\xi)$$

と書けると仮定しょう。但し、$\tilde{m}(\pi) \neq 0, \tilde{m}(\xi) = 1/2 \sum_{k=0}^{N-L} \tilde{c}_k e^{-ik\xi}$。よく知られているように L が大きければ大きいほど $f(x)$ は滑らかとなる。論文は更に$\tilde{m}(\xi)$ の整数部分 $I_{\tilde{m}}$ と小数部分 $D_{\tilde{m}}$を次のように定義する：

$$I_{\tilde{m}} = \min\{L; \hat{\rho}(\mathbb{T}_0^{(L)}(\tilde{m}) \mid_{W_L(\tilde{m})}, \mathbb{T}_1^{(L)}(\tilde{m}) \mid_{W_L(\tilde{m})}) < 1\},$$

$$D_{\tilde{m}} = \hat{\rho}(\mathbb{T}_0^{(I_{\tilde{m}})}(\tilde{m}) \mid_{W_{I_{\tilde{m}}}(\tilde{m})}, \mathbb{T}_1^{(I_{\tilde{m}})}(\tilde{m}) \mid_{W_{I_{\tilde{m}}}(\tilde{m})}).$$

この定義の下で次のことが証明された：$(\frac{1+e^{-i\xi}}{2})^L \tilde{m}(\xi)$ に対応する函数を $f(x)$ とする。$L \ge I_{\tilde{m}}$ならば

$$f \in C^{L - I_{\tilde{m}}}(\mathbb{R}) \backslash C^{L - I_{\tilde{m}} + 1}(\mathbb{R}).$$

ここで $C^n(\mathbb{R})$ は n 階連続微分可能の函数空間を表す。更に、参考論文で証明したように函数

$$\alpha_{\max}(c_0, ..., c_N) = \sup\{\alpha; f(x) \text{ は}\alpha\text{指数で Hölder 連続である }\}$$

の不連続点の集合は曲面 (2) の中の測度 0 の集合である。