数理解析研究所講究録
969 巻 1996 年 12-17

特異点をもつ非線型偏微分方程式の解の一意性について

上智大理工　田原 秀敏 (Hidetoshi TAHARA)

本稿では

$$\text{(E)}\qquad \Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^m u = F\Big(t,x,\Big\{\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u\Big\}_{\substack{j+|\alpha|\le m\\ j<m}}\Big)$$

という形の非線型偏微分方程式の解の一意性について論じる. 目的は「解の一意性の結果を導き, それを解の特異点の研究に応用する」ことにある. 特異点が関係してくるのは, $t=0$ が方程式 (E) の特異点になっているためである.

1 方程式の条件など

$m\in \boldsymbol{N}^*(=\{1,2,\cdots\})$, $t\in \boldsymbol{C}$, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in \boldsymbol{C}^n$ とし, $u(=u(t,x))$ を未知関数とする次の形の非線型偏微分方程式を考える:

$$\text{(E)}\qquad \Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^m u = F\Big(t,x,\Big\{\Big(t\frac{\partial}{\partial t}\Big)^j\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha u\Big\}_{\substack{j+|\alpha|\le m\\ j<m}}\Big).$$

ここで, $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in \boldsymbol{N}^n(=\{0,1,2,\ldots\}^n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$,

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^\alpha=\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1}\cdots\Big(\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n}$$

とする.

$$Z=\{Z_{j,\alpha}\}_{\substack{j+|\alpha|\le m\\ j<m}},\qquad Z_{j,\alpha}\in \boldsymbol{C}$$

とおく. $F(t,x,Z)$ は (t,x,Z) を複素変数とする関数であって次の条件を満たすものとする.

$\mathrm{A}_1)$　$F(t,x,Z)$ は (0,0,0) の近傍で正則;

$\mathrm{A}_2)$　$x=0$ の近傍で $F(0,x,0)\equiv 0$;

$\mathrm{A}_3)$　$|\alpha|>0$ ならば, $x=0$ の近傍で $\dfrac{\partial F}{\partial Z_{j,\alpha}}(0,x,0)\equiv 0$.

問題 1　A$_1$), A$_2$), A$_3$) のもとで方程式 (E) の解の構造を決定せよ.

今, (E) に対して

$$C(\rho,x)=\rho^m-\sum_{j<m}\frac{\partial F}{\partial Z_{j,0}}(0,x,0)\rho^j$$

とおき, ρ に関する方程式 $C(\rho,x)=0$ の解を $\rho_1(x),\dots,\rho_m(x)$ とおく. この $\rho_1(x),\dots,\rho_m(x)$ を (E) の特性指数という.

正則解については, 次の結果が基本的である.

定理 1 (Gérard-Tahara [2])　もしも $\rho_1(0),\dots,\rho_m(0)\notin\{1,2,\cdots\}$ ならば, 方程式 (E) は 原点の近傍で正則な解 $u(t,x)$ で $u(0,x)\equiv 0$ を満たすものを唯一つもつ.

2　特異点の研究と解の一意性

定理 1 で得られた正則解を u_0, (E) の解 $u(t,x)$ で

「 $x=0$ の近傍で x に関して一様に $u(t,x)=o(1)$ $(t\longrightarrow 0)$ 」

を満たすものの全体を $\mathcal{S}$ とおく. 状況は

1) $u_0\in\mathcal{S}$ で u_0 は唯一つの正則解であり,

2) 従って u_0 以外の解はすべて何等かの特異点をもっている,

となっている. 方程式 (E) は, 言わば,「非線型の Fuchs 型」とでもいうべき形をしており, (E) の特徴的な性質は多分殆どすべて「$t=0$ に特異点をもつ解」の中に現れると思われる. 次の問題設定は当然であろう.

問題 2　方程式 (E) の解に現れるすべての特異点を決定せよ.

以後, 本稿では「特異点をもつ解」のことを「特異解」とよぶことにする.

もしも すべての特異解を具体的に構成出来たなら, 上の問題 2 は直ちに即解決. しかし, 実際に「すべての特異解を具体的に構成する」ことはそう簡単ではなさそうである. そこで, 上の問題 2 を 2 つに分けて考えてみたい.

(2-1) どんな種類の特異点が現れるのか？
(2-2) どんな種類の特異点は, 実際には現れないのか？

(2-1) は「特異点の存在の問題」であり, (2-2) は「特異点の非存在の問題」である. (2-1) を解くには,「実際に解を構成してしまう」というのが普通考えられる方法だろう. 幾つかの場合については, Gérard-Tahara [2] の中で実行されている. 参照されたい. 本稿では (2-2) を考えてみたい. 戦略は「解の一意性を使って特異点の非存在を示す」というものである. アイデアは次のとおり.

[アイデア] $\mathcal{S}$ の部分集合 $\mathcal{S}_0$ で次の性質をもつものを見つける.

i) $\mathcal{S}_0 \ni u_0$;
ii) $\mathcal{S}_0$ は見掛け上, 設定の段階で特異点を許容している;
iii) $\mathcal{S}_0$ の中では 解の一意性が成り立つ.

この時 $\mathcal{S}_0 = \{u_0\}$ であり, 従って 「見掛け上, 設定の段階で許容していた種類の特異点は $\mathcal{S}$ の中には実際には出てこない」と結論できる.

3 一意性定理 (1)

はじめに, Gérard-Tahara [2] の中で使われた一意性の結果を述べておく. 次の記号を使う.

- $\mathcal{R}(\boldsymbol{C} \setminus \{0\})$ を $\boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ の普遍被覆面とする;
- $S_\theta(\delta) = \{t \in \mathcal{R}(\boldsymbol{C} \setminus \{0\})\ ;\ 0 < |t| < \delta,\ |\arg t| < \theta\}$;
- $D_r = \{x \in \boldsymbol{C}^n\ ;\ |x| \le r\}$.

$\rho_1(x), \ldots, \rho_m(x)$ を (E) の特性指数とし

$$\rho^* = \max_{1 \le i \le m} \mathrm{Re}\, \rho_i(0)$$

とおく.

定義 1 (解のクラス $\mathcal{S}_+^*$)　次の条件を満たす関数 $u(t,x)$ の全体を $\mathcal{S}_+^*$ とかく.

1) $u(t,x)$ は $S_\theta(\delta) \times D_r$ で正則であり,

2) ある $a > \max\{0, \rho^*\}$ があって, 次が成り立つ.

$$\max_{x \in D_r} |u(t,x)| = O(|t|^a) \ \ (S_\theta(\delta) \ni t \longrightarrow 0 \text{ のとき}).$$

定理 2 (Gérard-Tahara [2]) 方程式 (E) に対して, $\mathcal{S}_+^*$ の中で解の一意性が成り立つ.

一見, $\rho^* \geq 1$ のときは $\mathcal{S}_+^*$ は正則解 u_0 を含まないようにみえる. しかし「もしも $\mathcal{S}_+^* \neq \emptyset$ ならば適合条件から自動的に $\mathcal{S}_+^* \ni u_0$ となる」ことが分かる. よって次を得ることは易しい.

定理 2 の系 方程式 (E) の解の中には「ある $a > \max\{0, \rho^*\}$ に対して,

$$\max_{x \in D_r} |u(t,x)| = O(|t|^a) \ \ (S_\theta(\delta) \ni t \longrightarrow 0 \text{ のとき})$$

となる」ような特異点は出てこない.

定理 2 の系の意味を解説しておく. [2] の中で次の結果が示されている.

結果 もしも

1) $\rho^* > 0$,

2) $\mathrm{Re}\, \rho_p(0) = \rho^*$ となる $\rho_p(x)$ が正則で,

3) $\rho_1(0), \ldots, \rho_m(0) \notin \{1, 2, \cdots\}$

ならば, 方程式 (E) は次のような特異解をもっている.

$$U(t,x) = u_0(t,x) + t^{\rho_p(x)} \left(\varphi(x) + w(t,x)\right).$$

(但し, $u_0(t,x)$ は定理 1 の正則解, $\varphi(x)$ は $\varphi(0) \neq 0$ なる正則関数, $w(t,x)$ は $S_\theta(\delta) \times D_r$ 上で正則で $w(t,x) = o(1)\ (t \longrightarrow 0)$ を満たすもの.)

上の結果は「特異点の存在」を主張するものである. 解 $U(t,x)$ の特異点の主要部は $t^{\rho_p(x)}$ であり, $x = 0$ に固定して考えると

$$\left|t^{\rho_p(0)}\right| = |t|^{\mathrm{Re}\rho_p(0)} = |t|^{\rho^*}$$

である. このことを考え合わせれば, 定理 2 の系の「特異点の非存在の条件 $a > \max\{0, \rho^*\}$ 」は「$\rho^* > 0$ のときはギリギリの条件である」と言っても言い過ぎではあるまい.

4 一意性定理(2)

次の例を見てみよう.

例 $(t,x) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C}$, $k \in \{1,2,3,\ldots\}$ として次の方程式を考える.

$$\text{(e)} \qquad t\frac{\partial u}{\partial t} = u\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^k.$$

このとき, $\rho^* = 0$ であって次が成り立つ.

1) (e) の唯一つの正則解は $u_0 \equiv 0$ であり,
2) 更に (e) は次の形の特異解をもっている.

$$u_{\alpha,c}(t,x) = \Big(\frac{1}{k}\Big)^{1/k}\frac{x+\alpha}{(c-\log t)^{1/k}}, \quad \alpha, c \in \boldsymbol{C}.$$

上の方程式 (e) に対しては 「 $\mathcal{S}_+^*$ の中で解の一意性が成り立つ」が, それは $u_{\alpha,c} \notin \mathcal{S}_+^*$ だからである. 解のクラスを $u_{\alpha,c}$ を含むように もう少し広く設定してみよう.

定義 2 (解のクラス $\mathcal{S}_{log}$) 次の条件を満たす関数 $u(t,x)$ の全体を $\mathcal{S}_{log}$ とかく.

1) $u(t,x)$ は $S_\theta(\delta) \times D_r$ で正則であり,
2) ある $a > 0$ があって, 次が成り立つ.

$$\max_{x \in D_r}|u(t,x)| = O\left(\frac{1}{(-\log|t|)^a}\right) \quad (S_\theta(\delta) \ni t \longrightarrow 0 \text{ のとき}).$$

このように解のクラスを設定すると, 方程式 (e) に対して「$\mathcal{S}_{log}$ の中では, 解の一意性は成り立たない」. しかし $\rho^* < 0$ ならば次が成り立つ.

定理 3 (Tahara [4]) もしも $\rho^* < 0$ ならば, 方程式 (E) に対して $\mathcal{S}_{log}$ の中で解の一意性が成り立つ.

もちろん, 本節はじめの例から分かるように $\rho^* < 0$ という条件は「$\mathcal{S}_{log}$ の中で解の一意性が成り立つ」 ギリギリの条件である. 次を得ることは易しい.

定理 3 の系 もしも $\rho^* < 0$ ならば, 方程式 (E) の解の中には「ある $a > 0$ に対して,

$$\max_{x \in D_r} |u(t,x)| = O\left(\frac{1}{(-\log|t|)^a}\right) \quad (S_\theta(\delta) \ni t \longrightarrow 0 \text{ のとき})$$

となる」ような特異点は出てこない.

参考文献

[1] R. Gérard and H. Tahara : *Holomorphic and singular solutions of nonlinear singular first order partial differential equations,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 26 (1990), 979-1000.

[2] R. Gérard and H. Tahara : *Solutions holomorphes et singulières d'équations aux dérivées partielles singulières non linéaires,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. 29 (1993), 121-151.

[3] R. Gérard and H. Tahara : *Singular nonlinear partial differential equations,* Aspects of Mathematics, E 28, Vieweg-Verlag, 1996

[4] H. Tahara: *Uniqueness of the solution of non-linear singular partial differential equations,* to appear.