数理解析研究所講究録
969巻 1996年 188-197

対称系に対する特異境界値問題

阪大理　西谷 達雄　(Tatsuo Nishitani)
阪大理　高山 正宏　(Masahiro Takayama)

1. Introduction と主な結果

Ω を境界 $\partial\Omega$ が滑らかな $\mathbf{R}^n$ の有界開集合とし, 境界値問題 (BVP)

$$\begin{cases} (L+\lambda)u = f & \text{in} \quad \Omega \\ u \in M & \text{at} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

を考える. ここで $u = (u_1, \ldots, u_N)$ 及び $\partial_j = \partial/\partial x_j$ として,

$$Lu = \textstyle\sum_{j=1}^n A_j(x)\partial_j u + B(x)u, \quad A_j(x), B(x) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad A_j^*(x) = A_j(x)$$

とする. また境界空間 $M(x)$ $(x \in \partial\Omega)$ は $\mathbf{C}^N$ の線形部分空間で, maximal positive という条件を満たすとする. 即ち各 $x \in \partial\Omega$ に対して, $\nu(x) = (\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ を Ω に対する単位外法線として

$$A_b(x) = \sum_{j=1}^n \nu_j(x) A_j(x)$$

で境界行列を表わすとき, 次の 2 つの条件が満たされるとする.

$$\langle A_b(x)v, v\rangle \geq 0, \quad \forall v \in M(x),$$
$$\mathrm{dim} M(x) = \#\{A_b(x)\text{の重複度を込めた非負固有値}\}.$$

ここでは, “ f がある種の regularity をもつとき, 解 u もまた同様の regularity をもつかどうか？”という問題について考えてみたい.

$A_b(x)$ の rank が $\partial\Omega$ 上一定のときは既に多くの肯定的な結果が知られている. (例えば [6], [7] などを参照のこと). しかし rank が一定でないときとしては, 特別な場合が [5] で扱われているだけである. この報告では [5] の拡張として, 次のような場合を考えてみる.

$$O^+(O^-) = \{x \in \partial\Omega; A_b(x) \text{ が正 (負) 定値}\}$$

として $\gamma^\pm$ を $O^\pm$ の境界とするとき, $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$ が滑らかであって, $A_b(x)$ が $\partial\Omega \setminus \gamma$ 上正則行列になっていて, 更に $M(x)$ は $\partial\Omega \setminus \gamma$ の各連結成分上滑らかであ

るという場合を考えることにする. (特に $\gamma^+ = \gamma^-$ のときが [5] で扱われている場合となっている). このとき$M(x)$ は次を満たすことが分かる.

$$M(x) = \begin{cases} \mathbf{C}^N & \text{if} \quad x \in O^+ \\ \{0\} & \text{if} \quad x \in O^-. \end{cases}$$

正確には次のような条件の下で考えることにする. 各 $\bar{x} \in \gamma$ に対して次を満たす $\bar{x}$ の近傍 U が選べる: $\mathrm{Ker} A_b(x)$ が $\gamma \cap U$ 上 rank 一定の滑らか vector bundle になっていて $V(x) = (v_1(x), \dots, v_p(x))$ をその滑らかな基底ベクトルを並べた行列とするとき, $h \in C^\infty(U)$ を $\gamma \cap U$ の定義関数として

$$h(x)^{-1} V^*(x) A_b(x) V(x), \quad V^*(x) A_h(x) V(x)$$

は $\gamma \cap U$ 上滑らかな行列関数で同じ definiteness をもつとする. ここで

$$A_h(x) = \sum_{j=1}^{n} (\partial_j h)(x) A_j(x)$$

とする. 注意として, 上の条件は $V(x), h(x)$ の選び方には依ってはいない. (特に $\gamma^+ = \gamma^-$ のときは [5] と同じ条件となっている).

さて次のような関数を導入する.

$$m_\pm(x) = \{r(x)^2 + h_\pm(x)^2\}^{1/2}, \quad \phi_\pm(x) = m(x) - h_\pm(x).$$

ここで $r(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は $\Omega = \{r(x) > 0\}$ で $\partial\Omega$ 上 $dr(x) \neq 0$ を満たすものとし, $h_\pm(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ を $O^\pm = \partial\Omega \cap \{h_\pm(x) > 0\}$ で $\gamma^\pm$ 上 $dh_\pm(x)$ は $\nu(x)$ と一次独立となるものとする. この関数 $\phi_\pm$ は次を満たしていることに注意しておく.

$$\phi_\pm(x) \begin{cases} > 0 & \text{if} \quad x \in \overline{\Omega} \setminus (O^\pm \cup \gamma^\pm) \\ = 0 & \text{if} \quad x \in O^\pm \cup \gamma^\pm. \end{cases}$$

また $q \in \mathbf{Z}_+$ 及び $s, t \in \mathbf{R}$ に対して次のように関数空間を定める.

$$X^q_{(s,t)}(\Omega; \partial\Omega) = \bigcap_{j=0}^{q} \phi_+^{s+q-j} \phi_-^{t+q-j} H^j(\Omega; \partial\Omega)$$

但し $H^j(\Omega; \partial\Omega)$ は境界 $\partial\Omega$ に conormal な j 次 Sobolev 空間を表わす.

以上の下で次の結果が得られた.

定理 1.1 $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して次を満たす $\sigma(q) > 0$ が選べる: $s,t > \sigma(q)$ に対して $\Lambda(q,s,t) \in \mathbf{R}$ があり, $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,s,t)$, $f \in X^q_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega) \cap \phi_- L^2(\Omega)$ のとき

$$\|u\|^2_{X^q_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|\phi_-^{-1}u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1\{\|f\|^2_{X^q_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|\phi_-^{-1}f\|^2_{L^2(\Omega)}\}$$

を満たす (BVP) の弱解 $u \in X^q_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega) \cap \phi_- L^2(\Omega)$ が存在する. ここで $C_1 = C_1(q,s,t,\lambda) > 0$ は f, u に依らない定数である.

2. 主な結果の証明の概略

定理 1.1 の証明. まず $f \in C_0^\infty(\Omega)$ とする. [5] と同様にして次の命題が示される.

命題 2.1 ある $\Lambda \in \mathbf{R}$ があり $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda$ のとき, $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対する (BVP) の弱解 $u \in L^2(\Omega)$ で $\mathrm{supp}u \cap (O^- \cup \gamma^-) = \emptyset$ を満たすものが存在する.

ここで次の 2 つの定理を用いることで, $f \in C_0^\infty(\Omega)$ のときには定理 1.1 は従う.

定理 2.2 $q' \in \mathbf{Z}_+$ に対して次を満たす $\sigma(q') > 0$ が選べる: $s,t > \sigma(q')$ に対して $\Lambda(q',s,t) \in \mathbf{R}$ があって $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q',s,t)$ のとき, $\mathrm{supp}u \cap (O^- \cup \gamma^-) = \emptyset$ なる $u \in L^2(\Omega)$ が $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対する (BVP) の弱解とすると, このとき u は $u \in X^{q'}_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega)$ を満たす.

定理 2.3 $q \in \mathbf{Z}_+$ に対して次を満たす $\sigma(q) > 0$ が選べる: $s,t > \sigma(q)$ に対して $\Lambda(q,s,t) \in \mathbf{R}$ があり $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,s,t)$ 及び $q' \in \mathbf{Z}_+$ が $q' > q + n/2 + 1$ を満たすとし, $\mathrm{supp}u \cap (O^- \cup \gamma^-) = \emptyset$ なる $u \in X^{q'}_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega)$ が $f \in C_0^\infty(\Omega)$ に対する (BVP) の弱解とすると, このとき次の評価が満たされる.

$$\|u\|^2_{X^q_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|\phi_-^{-1}u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1\{\|f\|^2_{X^q_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega)} + \|\phi_-^{-1}f\|^2_{L^2(\Omega)}\}.$$

ここで $C_1 = C_1(q,s,t,\lambda) > 0$ は f, u に依らない定数である.

次に $f \in X^q_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega) \cap \phi_- L^2(\Omega)$ のときを考える. ここで $C_0^\infty(\Omega)$ は $X^q_{(-s,t)}(\Omega;\partial\Omega) \cap \phi_- L^2(\Omega)$ で稠密であることから, f を $C_0^\infty(\Omega)$ の元で近似して上の議論を用いることで示される.

Regularity を得る本質は定理 2.2 にある. したがってこの報告では, 定理 2.2 を示すことを中心としたい. 簡単のために問題を局所化して扱うことにする. そのなかでも特に γ^+ の近くの近傍 U で考えることにする. (仮定から $\gamma^+ \cap U$ 上 $\mathrm{dimKer} A_b(x) = p$ とする). 局所座標で考えることで次を仮定してよい.

$$r = x_1, \quad h_+ = x_2, \quad \Omega = \mathbf{R}^n_+, \quad \partial\Omega = \partial\mathbf{R}^n_+,$$
$$\gamma^+ = \{(0,0,x''); x'' \in \mathbf{R}^{n-2}\}, \quad O^+ = \{(0,x'); x_2 > 0\}.$$

ここで $x = (x_1, x') = (x_1, x_2, x'') = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ とする. また $u \in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ は $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ に対する (BVP) の弱解として次を仮定してよい.

$$\mathrm{supp} u \subset \{|x| < 1, x_1 \geq 0, \phi_-(x) > \eta\}.$$

ここで $\eta > 0$ は小さな paramater を表わす. 更に従属変数を適当に変換することで, $(0, x') \in \mathbf{R}^n_+$ に対して次を仮定してよい.

$$A_b(x') = \begin{pmatrix} x_2 I_p & 0 \\ 0 & I_{N-p} \end{pmatrix},$$
$$M(x') = \begin{cases} \mathbf{C}^N & \text{if} \quad x_2 > 0 \\ \{0\} \times \mathbf{C}^{N-p} & \text{if} \quad x_2 < 0. \end{cases}$$

ここで I_p, I_{N-p} はそれぞれ p 次, $N-p$ 次単位行列を表わす.

3. Tangental regularity

以下では単に $\|\cdot\|$ で $L^2(\mathbf{R}^n_+)$ または $L^2(\mathbf{R}^n)$ の norm を表わす.

半空間 $\mathbf{R}^n_+$ で考えたとき, 境界 $\partial\mathbf{R}^n_+$ に conormal な q 次 Sobolev 空間 $H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ は次のように表わすことができる.

$$H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+) = \{w \in L^2(\mathbf{R}^n_+); \mathrm{Z}^\alpha w \in L^2(\mathbf{R}^n_+), |\alpha| \leq q\},$$
$$\|w\|^2_{H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)} = \textstyle\sum_{|\alpha| \leq q} \|\mathrm{Z}^\alpha w\|^2.$$

但し $\mathrm{Z} = (x_1\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ とする. この空間 $H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ について詳しく調べるために, 次のような変数の変換について考察する.

$$w^\sharp(x) = w(e^{x_1}, x')e^{x_1/2}, \quad a^\natural(x) = a(e^{x_1}, x').$$

このとき $\sharp : L^2(\mathbf{R}^n_+) \to L^2(\mathbf{R}^n)$, $\natural : L^\infty(\mathbf{R}^n_+) \to L^\infty(\mathbf{R}^n)$ は norm 不変な全単射であって, $(aw)^\sharp = a^\natural w^\sharp$ が成立する. また微分との関係については次が分かる.

$$\partial_1(w^\sharp) = (\mathrm{Z}_1 w)^\sharp + (w)^\sharp/2, \quad \partial_j(w^\sharp) = (\mathrm{Z}_j w)^\sharp, \quad 2 \leq j \leq n,$$
$$\partial_j(a^\natural) = (\mathrm{Z}_j a)^\natural, \quad 1 \leq j \leq n.$$

これより次の補題が従う.

補題 3.1 $w \in H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ であることと, $w^\sharp \in H^q(\mathbf{R}^n)$ であることは同値である. 更にこのとき, $\|w\|_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}$ と $\|w^\sharp\|_{H^q(\mathbf{R}^n)}$ は同値な norm である.

このことから $w \in H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ に対して, $\|\cdot\|_{H^q(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}$ と同値である次のような norm を導入する. ([3] の 2.4 節も参照のこと).

$$\begin{aligned}
\|w\|^2_{q,tan} &= \|w^\sharp\|^2_q = \int_{\mathbf{R}^n} |(w^\sharp)^\wedge(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2q} d\xi, \\
\|w\|^2_{q,tan,\delta} &= \|w^\sharp\|^2_{q,\delta} = \int_{\mathbf{R}^n} |(w^\sharp)^\wedge(\xi)|^2 \langle\xi\rangle^{2q+2} \langle\delta\xi\rangle^{-2} d\xi, \quad 0 < \delta \le 1.
\end{aligned}$$

ここで $(w^\sharp)^\wedge(\xi)$ は $w^\sharp(x)$ の Fourier 変換を表わす. この norm について次のことが分かる. (同様に [3] を参照のこと).

補題 3.2 $q \in \mathbf{Z}_+$ で $q \ge 1$ とする. このとき次の (i), (ii) は同値である.
(i) $w \in H^q(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ である.
(ii) $w \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ で, $\|w\|_{q,tan,\delta}$ は $0 < \delta \le 1$ について一様に有界である.
更にこのとき, $\|w\|_{q-1,tan,\delta} \nearrow \|w\|_{q,tan}$ $(\delta \searrow 0)$ が成り立つ.

今, 次の命題を認めることにする.

命題 3.3 $q \in \mathbf{Z}_+, q \ge 1$ に対して次を満たす $\sigma(q) > 0, c_0(q) > 0$ が選べる: $s, t > \sigma(q)$ に対して $\Lambda(q,s,t) \in \mathbf{R}$ があり $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(q,s,t)$ 及び $\mathrm{supp} u \subset \{|x| < 1, x_1 \ge 0, \phi_-(x) > \eta\}$, $u \in X^{q-1}_{(-s+1,t+1)}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ なる $u \in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ が $f \in C^\infty_0(\mathbf{R}^n_+)$ に対する (BVP) の弱解とする. このとき $\phi^s_+\phi^{-t}_- u \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ で, $0 < \delta \le 1$ に対して次が満たされる.

$$\begin{aligned}
&(\min(s,t) - \sigma(q))\|\phi^s_+\phi^{-t}_- u\|^2_{q-1,tan,\delta} \\
&\le c_0(q)\{\|\phi^s_+\phi^{-t}_- f\|^2_{q-1,tan,\delta} + \|\phi^s_+\phi^{-t}_- u\|^2_{q-1,tan,\delta}\} \\
&\quad + C_1\{\|f\|^2_{X^{q-1}_{(-s+1,t+1)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)} + \|u\|^2_{X^{q-1}_{(-s+1,t+1)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)} + \|f\|^2 + \|u\|^2\}.
\end{aligned}$$

ここで $C_1 = C_1(q,s,t,\lambda,\eta) > 0$ は定数である.

定理 2.2 の証明. q' に関する induction で示す. $q' = 0$ のときは明らかなので, $q'-1$ まで成り立つとして q' のときを考える. $s' = s-1, t' = t+1$ とおくと induction の仮定から次が分かる.

$$\begin{aligned}
u \in X^{q'-1}_{(-s',t')}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+) &= X^{q'-1}_{(-s+1,t+1)}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+) \\
&= \bigcap_{j=0}^{q'-1} \phi_+^{-s+q'-j}\phi_-^{t+q'-j} H^j(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+).
\end{aligned}$$

これより命題 3.3 が適用できる. ここで $\|\phi^s_+\phi^{-t}_- f\|_{q'-1,tan,\delta} \le \exists C$ に注意することで, $\|\phi^s_+\phi^{-t}_- u\|_{q'-1,tan,\delta}$ は $0 < \delta \le 1$ について一様に有界であることが分かるので, 補題 3.2 より $u \in \phi^{-s}_+\phi^t_- H^{q'}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ つまり $u \in X^{q'}_{(-s,t)}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ が従う.

さて命題 3.3 を示すのに重要な働きをする次のような作用素を導入する.

$$J_\epsilon w(x) = \int_{\mathbf{R}^n} w(x_1 e^{-y_1}, x' - y') e^{-y_1/2} \chi_\epsilon(y) dy, \quad 0 < \epsilon \le 1.$$

ここで $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ は次を満たすもので, $\chi_\epsilon(y) = \epsilon^{-n}\chi(\epsilon^{-1}y)$ とする.

$$\begin{aligned} &\mathrm{supp}\chi \subset \{|y| < 1, y_1 < 0, y_2 > 0\}, \\ &\hat{\chi}(\xi) = O(|\xi|^k), \quad (\xi \to 0), \\ &\hat{\chi}(t\xi) = 0,\ \forall t \in \mathbf{R} \implies \xi = 0. \end{aligned}$$

但し $k > 0$ は十分大きくとっておく. このとき $(J_\epsilon w)^\sharp = w^\sharp * \chi_\epsilon$ や $[\mathrm{Z}_j, J_\epsilon] = 0$ などの関係が分かる. また [3] の Theorem 2.4.1 より, 次の命題が従う.

命題 3.4 $q \in \mathbf{Z}_+, 1 \le q < k$ に対して $c_0 = c_0(q) > 0$ があり, $w \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ 及び $0 < \delta \le 1$ に対して次が満たされる.

$$\begin{aligned} c_0^{-1}\|w\|^2_{q-1,tan,\delta} &\le \int_0^1 \|J_\epsilon w\|^2 \epsilon^{-2q}(1 + \delta^2/\epsilon^2)^{-1} d\epsilon/\epsilon + \|w\|^2_{q-1,tan} \\ &\le c_0\|w\|^2_{q-1,tan,\delta}. \end{aligned}$$

4. 解の tangental regularity を得る評価

さて命題 3.3 の証明の概略を与える. $q \in \mathbf{Z}_+$, $q \ge 1$ とする. また $\mathrm{supp}u \subset \{|x| < 1, x_1 \ge 0, \phi_-(x) > \eta\}$, $u \in X^{q-1}_{(-s+1,t+1)}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ なる $u \in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ が $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n_+)$ に対する (BVP) の弱解とする. このとき $\phi_+^s\phi_-^{-t}u \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ は困難なく得られるので, 以下では評価のみを考える. そのために次の 3 つの命題を準備しておく.

命題 4.1 次を満たす $\sigma_0 > 0, c_0 > 0$ が選べる: $s, t > \sigma_0$ に対して $\Lambda(s,t) \in \mathbf{R}$ があり $\mathrm{Re}\lambda > \Lambda(s,t)$ で $\mathrm{supp}u \subset \{|x| < 1, x_1 \ge 0, \phi_-(x) > \eta\}$ なる $u \in L^2(\mathbf{R}^n_+)$ が (BVP) の弱解とするとき, $0 < \epsilon \le 1$ に対して次が満たされる.

$$(\min(s,t) - \sigma_0)\|\phi_+^s\phi_-^{-t}J_\epsilon u\|^2 \le c_0\|m_+\phi_+^s\phi_-^{-t}(L+\lambda)J_\epsilon u\|^2.$$

命題 4.2 $a(x,y) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ とする. $\alpha \in \mathbf{Z}^n_+$ に対して次を満たす $c = c(\alpha) > 0$ が選べる: $w \in H^{q-1}(\mathbf{R}^n_+; \partial\mathbf{R}^n_+)$ に対して次のようにおく.

$$W_\epsilon(x) = \int_{\mathbf{R}^n} a(x,y) w^\sharp(x-y) y^\alpha \chi_\epsilon(y) dy.$$

このとき $0<\delta\leq 1$ に対して次が満たされる.

$$\int_0^1 \|W_\epsilon\|^2\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon \leq \begin{cases} c\|w\|^2_{q-1-|\alpha|,tan,\delta}, & |\alpha|\leq q-1 \\ c\|w\|^2, & |\alpha|\geq q. \end{cases}$$

命題 **4.3** $\mathrm{supp}w\subset\{|x|<1, x_1\geq 0\}$ なる $w\in X^{q'}_{(s',t')}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)$ に対して, 次の 2 つの norm は同値である.

$$\|w\|_{X^{q'}_{(s',t')}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)},\qquad \sum_{|\alpha|\leq q'}\|\phi_+^{-s'-q'+|\alpha|}\phi_-^{-t'-q'+|\alpha|}\mathrm{Z}^\alpha w\|.$$

これらの証明はここでは与えない. (命題 4.2 については [3] の Theorem 2.4.2 なども参照のこと).

以下で命題 3.3 の評価を示そう. まず命題 3.4 から次が分かる.

$$\begin{aligned}&\|\phi_+^s\phi_-^{-t}u\|^2_{q-1,tan,\delta}\\ &\leq\ c_0\{\int_0^1\|(J_\epsilon\phi_+^s\phi_-^{-t}u)^\sharp\|^2\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon+\|\phi_+^s\phi_-^{-t}u\|^2_{q-1,tan}\}.\end{aligned}$$

ここで Taylor 展開を用いることで次のように表わせることに注意する.

$$\begin{aligned}(J_\epsilon\phi_+^s\phi_-^{-t}u)^\sharp &= \int(\phi_+^s\phi_-^{-t})^\natural(x-y)u^\sharp(x-y)\chi_\epsilon(y)dy\\ &= \sum_{|\beta|\leq q}(\beta!)^{-1}(\mathrm{Z}^\beta(\phi_+^s\phi_-^{-t}))^\natural(x)\int u^\sharp(x-y)(-y)^\beta\chi_\epsilon(y)dy\\ &\quad+\sum_{|\beta|=q+1}(\beta!)^{-1}\int\Phi(x,y)u^\sharp(x-y)(-y)^\beta\chi_\epsilon(y)dy\\ &=: \sum_{|\beta|\leq q}U_\beta(x)+\sum_{|\beta|=q+1}U_\beta(x).\end{aligned}$$

但し

$$\Phi(x,y)=(q+1)\int_0^1(1-\theta)^q(\mathrm{Z}^\beta(\phi_+^s\phi_-^{-t}))^\natural(x-\theta y)d\theta.$$

$|\beta|=0$ の項は, $U_\beta=(\phi_+^s\phi_-^{-t}J_\epsilon u)^\sharp$ より 命題 4.1 を適用する. $|\beta|\geq 1$ の項は, $|\mathrm{Z}^\beta(\phi_+^s\phi_-^{-t})|\leq\exists C\phi_+^{s-|\beta|}\phi_-^{-t-|\beta|}$ とできることや次の補題を用いる.

補題 **4.4** 次を満たす $c>0$ が選べる: $x-y\in\mathrm{supp}u^\sharp$, $y\in\mathrm{supp}\chi_\epsilon$ なる (x,y) 及び $0\leq\theta\leq 1$ に対して, 次が満たされる.

$$(\phi_+)^\natural(x-\theta y)\leq c(\phi_+)^\natural(x-y),\quad (\phi_-^{-1})^\natural(x-\theta y)\leq c(\phi_-^{-1})^\natural(x-y).$$

この補題から粗く言って次のようにおさえられる.

$$|U_\beta(x)| \leq \exists C|\int(\phi_+^{s-|\beta|}\phi_-^{-t-|\beta|})^\natural(x-y)u^\sharp(x-y)(-y)^\beta\chi_\epsilon(y)dy|.$$

更に命題 4.2, 命題 4.3 を用いることで次のように評価できる.

$$\begin{aligned}&\int_0^1\|U_\beta\|^2\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon\\ \leq\ &\begin{cases}C_1\|u\|^2_{X^{q-1}_{(-s+1,t+1)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}, & 1\leq|\beta|\leq q\\ C_1\|u\|^2, & |\beta|=q+1.\end{cases}\end{aligned}$$

よってこれらをまとめて次が得られることが分かる.

$$\begin{aligned}&(\min(s,t)-\sigma_0)\|\phi_+^s\phi_-^{-t}u\|^2_{q-1,tan,\delta}\\ \leq\ &c_0\int\|(m_+\phi_+^s\phi_-^{-t})^\natural((L+\lambda)J_\epsilon u)^\sharp\|^2\epsilon^{-2q}(1+\delta^2/\epsilon^2)^{-1}d\epsilon/\epsilon\\ &+C_1\{\|u\|^2_{X^{q-1}_{(-s+1,t+1)}(\mathbf{R}^n_+;\partial\mathbf{R}^n_+)}+\|u\|^2\}.\end{aligned}$$

さてここで右辺について次を用いる.

$$((L+\lambda)J_\epsilon u)^\sharp=(J_\epsilon(L+\lambda)u)^\sharp+([L,J_\epsilon]u)^\sharp.$$

このとき第 1 項については殆ど問題なく処理できる. (実際,

$$(J_\epsilon(L+\lambda)u)^\sharp=\int((L+\lambda)u)^\sharp(x-y)\chi_\epsilon(y)dy$$

とでき, 外にある $(m_+\phi_+^s\phi_-^{-t})^\natural(x)$ を積分の中にいれ ることで同様に議論できる). したがって以下では第 2 項についての考察を行う. 次のように表わせることに注意しておく.

$$L=-A_b(x')\partial_1+\tilde{A}_1(x)\mathrm{Z}_1+\sum_{j=2}^n A_j(x)\mathrm{Z}_j+B(x).$$

まず $([A\mathrm{Z}_j,J_\epsilon]u)^\sharp$ の項から考えてみることにする.

$$\begin{aligned}([A\mathrm{Z}_j,J_\epsilon]u)^\sharp(x)&=([A,J_\epsilon]\mathrm{Z}_ju)^\sharp(x)\\ &=\int\{A^\natural(x)-A^\natural(x-y)\}(\mathrm{Z}_ju)^\sharp(x-y)\chi_\epsilon(y)dy\end{aligned}$$

これよりこの項は次の形の項の和で表わされる.

$$\int a(x,y)u^\sharp(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy,\quad |\alpha|=1,$$

$$\int a(x,y)\partial_{x_j}u^\sharp(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy,\quad |\alpha|=1.$$

但し $a(x,y) \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ は適当なものとする. 上の項については, 外にある $(m_+\phi_+^s\phi_-^{-t})^\natural(x)$ を積分の中にいれることで上の議論と同様にできる. 下の項については, $\partial_{x_j}u^\sharp(x-y) = -\partial_{y_j}u^\sharp(x-y)$ を用いることで

$$\int \partial_{y_j}\{a(x,y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)\}\cdot u^\sharp(x-y)dy$$

と表わされるので, この項もまた同様にして処理できる. $([B,J_\epsilon]u)^\sharp$ の項も同じくして扱うことができる.

したがって残っているのは $([A_b\partial_1, J_\epsilon]u)^\sharp$ の項だけである. ここで

$$\begin{aligned}&([A_b\partial_1, J_\epsilon]u)^\sharp(x)\\ &= A_b(x)\int(\partial_1 u)^\sharp(x-y)e^{-y_1}\chi_\epsilon(y)dy - \int A_b(x-y)(\partial_1 u)^\sharp(x-y)\chi_\epsilon(y)dy\end{aligned}$$

とできるので, この項は結局次の形の項の和で表わすことができる.

$$\int a(x,y)(\partial_1 u)^\sharp(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy, \quad |\alpha| = 1.$$

ところで $m_+^2 = x_1^2 + x_2^2$ であったことを思い出そう. これより

$$\partial_1 = m_+^{-2}x_1\mathrm{Z}_1 + m_+^{-2}x_2\cdot x_2\partial_1$$

とでき, また $\tilde{A}(x)$ を適当な行列として

$$\begin{aligned}x_2\partial_1 &= \tilde{A}(x)A_b\partial_1\\ &= \tilde{A}(x)\{-L + \tilde{A}_1(x)\mathrm{Z}_1 + \sum_{j=2}^n A_j(x)\mathrm{Z}_j + B(x)\}\end{aligned}$$

とできることから, $([A_b\partial_1, J_\epsilon]u)^\sharp$ は次の形の項の和で表わされることが分かる.

$$\begin{aligned}&\int a(x,y)(m_+^{-2}x_i)^\natural(x-y)u^\sharp(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy,\\ &\int a(x,y)(m_+^{-2}x_i)^\natural(x-y)\partial_{x_j}u^\sharp(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy,\\ &\int a(x,y)(m_+^{-2}x_i)^\natural(x-y)((L+\lambda)u)^\sharp(x-y)y^\alpha\chi_\epsilon(y)dy.\end{aligned}$$

但し $i = 1,2, \quad 1 \le j \le n, \quad |\alpha| = 1$ を表わすとする. ここで $(m_+^{-2}x_i)^\natural(x-y)$ が問題となる. 細かい議論はここではしないが, 粗く言って m_+^{-2} のうち 1 つを x_i でキャンセルさせて, 残った 1 つを外に出ている $(m_+\phi_+^s\phi_-^{-t})^\natural(x)$ の m_+ を用いてキャンセルさせるということを行う. これによってこれらの項も, 今まで扱ってきた項と同じように扱うことができ, うまく処理される.

これらのことから評価において右辺を望むものでおさえることができ, これによって命題 3.3 を示すことができる.

References

[1] K.O.Friedrichs, *The identity of weak and strong extensions of differential operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), 132–151.

[2] K.O.Friedrichs, *Symmetric positive linear differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. **11** (1958), 333–418.

[3] L.Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, 1963.

[4] P.D.Lax and R.S.Phillips, *Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators*, Comm. Pure Apple. Math. **13** (1960), 427–455.

[5] T.Nishitani and M.Takayama, *A characteristic initial boundary value problem for a symmetric positive systems*, Hokkaido Math. J. **25** (1996), 167–182.

[6] J.Rauch, *Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, Trans. Ammer. Math. Soc. **291** (1985), 167–187.

[7] D.Tartakoff, *Regularity of solutions to boundary value problems for first order systems*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 1113–1129.