数理解析研究所講究録
969 巻 1996 年 49-57

パンルヴェ IV 型方程式の多変数化

東大 数理科学院生 川向 洋之 (Hiroyuki Kawamuko)

0 Introduction

複素パラメータ $t=(t_1,t_2,\cdots,t_g)$ を持った $\mathbf{P}^1$ 上の線形常微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y+p_1(x,t)\frac{d}{dx}y+p_2(x,t)y=0 \tag{0.1}$$

に対して、方程式系

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}y+p_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x}y+p_2(x,t)y=0 \tag{0.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_j}y=A_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x}y+B_j(x,t)y \quad (j=1,2,\cdots,g) \tag{0.3}$$

が完全積分可能となるような x の有理関数 $A_j(x,t),B_j(x,t)$ が存在する時、方程式 (0.1) はホロノミック変形を許すと言う。

なお、方程式 (0.1) がホロノミック変形を許すことと、(0.2), (0.3) の解の基本系で、そのモノドロミー群 およびストークス係数が $t=(t_1,t_2,\cdots,t_g)$ によらないものが存在することは 同値であることが知られている。([4] 参照)

ホロノミック変形の歴史は 1907 年の R.Fuchs [1] の論文に始まる。彼は $x=0,1,t,\infty$ に確定特異点を持ち、$x=\lambda$ で見かけの特異点を持つ 2 階のフックス型方程式

$$(L_{VI})\quad \frac{d^2}{dx^2}y+p_{VI}^{(1)}(x,t)\frac{d}{dx}y+p_{VI}^{(2)}(x,t)y=0$$

に対してモノドロミー群 が t によらないような解の基本系が存在するための必要十分条件は λ が t の関数として パンルヴェ VI 型方程式

$$\begin{aligned}\frac{d^2\lambda}{dt^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\frac{d\lambda}{dt}\\ &+ \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left[\alpha+\beta\frac{t}{\lambda^2}+\gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}+\delta\frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda-t)^2}\right]\end{aligned}$$

を満たす事である事を示した。ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ はもとのフックス型方程式の特性指数から決まる t によらないパラメータである。

また、I 型 から V 型までのパンルヴェ方程式も (L_{VI}) の確定特異点を適当に合流させた方程式のホロノミック変形から導かれている。([2] 参照)

一方 R.Garnier [3] は、R.Fuchs の結果を $x = 0, 1, \infty, t_1, t_2, \cdots, t_g$ に確定特異点をもつフックス型方程式

$$(L_{VI}^g) \quad \frac{d^2}{dx^2}y + p_G^{(1)}(x,t)\frac{d}{dx}y + p_G^{(2)}(x,t)y = 0$$

の場合に拡張し、$t_1, \cdots, t_g$ の関数 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_g)$ の満たす非線形方程式を導いた。この方程式系は K.Okamoto [8] によると、

$$\mu_k = \operatorname*{Res}_{x=\lambda_k} p_G^{(2)}, \quad H_k = -\operatorname*{Res}_{x=t_k} p_G^{(2)}$$

として、次の Hamiltonian system

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} = \frac{\partial H_k}{\partial \mu_j}, \quad \frac{\partial \mu_j}{\partial t_k} = -\frac{\partial H_k}{\partial \lambda_j}$$

から μ_j を消去したものに等しい。

さらに H.Kimura [5] は、$g = 2$ の場合における線形方程式 (L_{VI}^2) の確定特異点を何回か合流させ、その方程式がホロノミック変形を許すための必要十分条件として、2変数の完全積分可能なハミルトン系を導いている。

この講究録ではリーマン図式

$$\left\{ \begin{array}{cccc} x=0 & x=\lambda_1 & \cdots & x=\lambda_g \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \kappa_0 & 2 & & 2 \end{array} \quad \overbrace{\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & -\kappa_\infty \\ \frac{1}{g+1} & \frac{t_g}{g} & \frac{t_{g-1}}{g-1} & \cdots & t_1 & & \kappa_\infty - \kappa_0 + 1 \end{array}}^{x=\infty} \right\}$$

を持つ $\mathbf{P}^1$ 上の線形常微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + p_1(x,t)\frac{d}{dx}y + p_2(x,t)y = 0 \tag{0.4}$$

で仮定

(i) $\kappa_0, \kappa_\infty \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$

(ii) $x = \lambda_k \ (k = 1, \cdots, g)$ は、(0.4) の見かけの特異点である。

を満たすものを考え、そのホロノミック変形を許すための必要十分条件としてどのようなハミルトン系が得られるかを述べる。さらにそれがポアソン可換になるようなハミルトン系に変換できる事も紹介する。

なお、方程式 (0.4) で $g=1$ の時は、線形方程式 (L_{VI}) の確定特異点を適当に 2 回合流させたもので、その ホロノミック変形からパンルヴェIV 型方程式と同値な ハミルトン系が得られている。また $g=2$ の場合も (L_{VI}^2) の確定特異点を適当に 2 回合流させたもので、その ホロノミック変形から完全積分可能なハミルトン系が得られている。この意味で 方程式 (0.4) のホロノミック系から導かれる ハミルトン系は、パンルヴェ IV 型方程式を多変数に拡張したものである。

1 Statement of Theorems

$\mathbf{P}^1$ 上で定義された線形常微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y+p_1(x,t)\frac{d}{dx}y+p_2(x,t)y=0 \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} p_1(x,t)&=\frac{1-\kappa_0}{x}-\sum_{k=1}^{g}t_kx^{k-1}-x^g-\sum_{k=1}^{g}\frac{1}{x-\lambda_k}\\ p_2(x,t)&=-\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{g}h_{g+1-k}\cdot x^{k-1}+\kappa_\infty x^{g-1}+\sum_{k=1}^{g}\frac{\lambda_k\mu_k}{x(x-\lambda_k)}\end{aligned}$$

で次の 2 つの仮定

(i) $\kappa_0,\kappa_\infty\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$

(ii) $x=\lambda_k\ (k=1,\cdots,g)$ は見かけの特異点.

を満たすものを考える。この時 $p_2(x,t)$ の $h_k\ (k=1,\cdots,g)$ は仮定 (ii) より

$$h_{g+1-j}=\sum_{r=1}^{g}\sum_{s=1}^{g}E_{r,s}^{(j)}\rho_r\rho_s+\sum_{k=1}^{g}F_k^{(j)}\rho_k+(-1)^{g+j}\sigma_{g-j+1}\cdot\kappa_\infty$$

$$\begin{aligned} E_{r,s}^{(j)}&=(-1)^j\Big[\sum_{\alpha=0}^{g-j}\sigma_\alpha\sigma_{r+s-j-\alpha}-\sum_{\alpha=0}^{s-j}\sigma_\alpha\sigma_{r+s-j-\alpha}-\sum_{\alpha=0}^{r-j}\sigma_\alpha\sigma_{r+s-j-\alpha}\Big]\\ F_k^{(j)}&=(-1)^{g-j+1}\Big[\ \sigma_\kappa\sigma_{g+1-j}+\sum_{r=1}^{g}(-1)^{g+r}c_{k,r}^{(j)}t_r\sigma_{k+r-j}\\ &\qquad -\sigma_{k+g+1-j}+(-1)^{g-1}\{(\kappa_0-1)+g+1-k\}\sigma_{k-j}\Big]\end{aligned}$$

$$c_{k,r}^{(j)}:=\begin{cases}+1 & (g+1\le k+r\le g+j\ \text{かつ}\ r\ge j)\\ -1 & (j\le k+r\le g\ \text{かつ}\ r\le j-1)\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

とかける。ただし σ_k, ρ_k $(k=1,\cdots,g)$ については 定理 1.2 を参照。また $\sigma_k=0$ $(k\leq 0$ または $k>g)$ に関しては

$$\sigma_0=1,\quad \sigma_k=0\,(k<0 \text{ または } k>g)$$

と約束する。

Theorem 1.1 方程式 (1.1) がホロノミック変形を許すための必要十分条件はλ_k,μ_k $(k=1,\cdots,g)$ が t の関数として次のハミルトン系を満たす事である。

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial t_j}=\frac{\partial\tilde{K}_j}{\partial\mu_i},\quad \frac{\partial\mu_i}{\partial t_j}=-\frac{\partial\tilde{K}_j}{\partial\lambda_i}$$

ここでハミルトニアン $\tilde{K}_j$ は次で与えられる。

$$\begin{bmatrix}\tilde{K}_1\\ \tilde{K}_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \tilde{K}_g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&\ddots&\\&&&&g\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&&&&\\ t_g&1&&&\\ \vdots&t_g&1&&\\ t_3&&\ddots&\ddots&\\ t_2&t_3&\cdots&t_g&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}h_1\\ h_2\\ \vdots\\ \vdots\\ h_g\end{bmatrix}$$

Theorem 1.2 定理 1.1 のハミルトン系 $(\lambda,\mu,\tilde{K},t)$ に対し、

$$\sigma_k=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_g \text{ の } k \text{ 次基本対称式.}$$

$$\rho_k=(-1)^{k-1}\sum_{(l)}\frac{{\lambda_l}^{g-k}}{\Lambda'(\lambda_l)}\cdot\mu_l$$

とおくと、

$$(\lambda,\mu,\tilde{K},t)\to(\sigma,\rho,\tilde{K},t)$$

は正準変換になり、ハミルトニアン $\tilde{K}_j$ は σ_j,ρ_j の多項式になる。ここで $\Lambda'(\lambda_l)$ は

$$\Lambda'(\lambda_l):=\frac{d}{dx}\prod_{k=1}^{g}(x-\lambda_k)\Big|_{x=\lambda_l}$$

Theorem 1.3 次の変換でハミルトン系 $(\sigma,\rho,\tilde{K},t)$ をハミルトン系 (q,p,H,ξ) に移すとハミルトニアン H_k は正準変数の多項式で書け、

$$\{H_i,H_j\}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\xi_i}H_j=\frac{\partial}{\partial\xi_j}H_i$$

が成立.

$$
\begin{aligned}
\sigma_j &= \sum_{i=0}^{j} \varphi_{j,i} q_i, \quad (q_0 := 1) \\
\rho_j &= \sum_{i=j}^{g} \psi_{i,j} p_i, \\
t_{g+1-d} &= \frac{(-1)^d}{d!} \cdot \det \Phi((-1)^g(g+1-d); \xi_g, \xi_{g-1}, \cdots, \xi_{g+1-d}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & & & \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \psi_{g,1} & \cdots & \psi_{g,g-1} & \psi_{g,g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_1 - \kappa_\infty \varphi_{1,0} \\ \hat{h}_2 - \kappa_\infty \varphi_{2,0} \\ \vdots \\ \hat{h}_g - \kappa_\infty \varphi_{g,0} \end{bmatrix}
$$

ただし、

$$
\Phi(c; x_1, x_2, \cdots, x_k) :=
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 \cdot c \cdot x_1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
2 \cdot c \cdot x_2 & 1 \cdot c \cdot x_1 & -2 & & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\
(k-2) \cdot c \cdot x_{k-2} & & & & -k+2 & 0 \\
(k-1) \cdot c \cdot x_{k-1} & (k-2) \cdot c \cdot x_{k-2} & & & 1 \cdot c \cdot x_1 & -k+1 \\
k \cdot c \cdot x_k & (k-1) \cdot c \cdot x_{k-1} & \cdots & \cdots & 2 \cdot c \cdot x_2 & 1 \cdot c \cdot x_1
\end{bmatrix}
$$

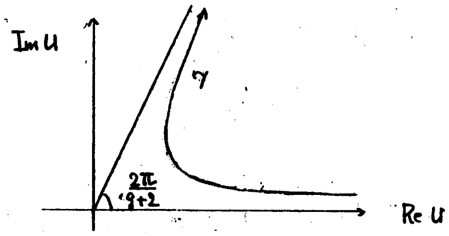
$$
\hat{h}_j := (-1)^{j-1} \Big\{ h_j + (-1)^{g-j} \sum_{k=1}^{g} (g+1-k) \sigma_{k-g-1+j} \cdot \rho_k \Big\}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k,k-d} &= \frac{1}{d!} \cdot \det \Phi((-1)^g(g+1-k); \xi_g, \xi_{g-1}, \cdots, \xi_{g+1-d}), \\
\psi_{k,k-d} &= \frac{(-1)^{g+1}}{d!} \cdot \frac{g+1-k}{g+1-k+d} \cdot \det \Phi((-1)^{g+1}(g+1-k+d); \xi_g, \xi_{g-1}, \cdots, \xi_{g+1-d}).
\end{aligned}
$$

Theorem 1.4 $\kappa_\infty = 0$ の時、定理 1.3 のハミルトン系 (q, p, H, ξ) は次のような線形方程式の解で表される特殊解を持つ。

$$
\begin{aligned}
p_k &= 0 \\
q_k &= \frac{\partial}{\partial \xi_k} \log u \quad (k = 1, \cdots, g)
\end{aligned}
$$

$$u(t_1, \cdots, t_g) = \int_\gamma z^{-\kappa_0} \exp\left(-\sum_{k=1}^{g} \frac{t_k}{k} z^k - \frac{1}{g+1} z^{g+1} \right) dz$$



2 Remarks of Theorem

Remark 1 定理 1.3 のハミルトニアン H_k $(k = 1, \cdots, g)$ を

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & & & \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \psi_{g,1} & \cdots & \psi_{g,g-1} & \psi_{g,g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_1 \\ \hat{h}_2 \\ \vdots \\ \hat{h}_g \end{bmatrix}$$

で定義するとこの変換は正準変換になる。ただし この時

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} H_j \neq \frac{\partial}{\partial \xi_j} H_i$$

Remark 2 φ_k, j と ψ_k, j は次の関係にある。

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{2,1} & \cdots & \varphi_{g,1} \\ & \varphi_{2,2} & \cdots & \varphi_{g,2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \varphi_{g,g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & \psi_{2,1} & \cdots & \psi_{g,1} \\ & \psi_{2,2} & \cdots & \psi_{g,2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \psi_{g,g} \end{bmatrix} = I$$

Remark 3 $g = 1$ の時、定理 1.3 のハミルトン系はパンルヴェ IV 型方程式に同値なものであり、定理 1.4 の積分で表された関数はエルミートの微分方程式を満たす。

Remark 4 $v_1, \cdots, v_g$ の k 次の完全対称式 h_k と k 次の巾和 P_k との関係は

$$n! h_n = \begin{vmatrix} P_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ P_2 & P_1 & -2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ P_{n-1} & P_{n-2} & & \ddots & -n+1 \\ P_n & P_{n-1} & \cdots & \cdots & P_1 \end{vmatrix},$$

$$(-1)^{n-1}P_n = \begin{vmatrix} h_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2h_2 & h_1 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ nh_n & h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & h_1 \end{vmatrix}$$

であるから定理 1.4 の t と ξ、φ と ξ そして ψ と ξ は本質的に完全対称式と巾和の関係である。

Remark 5 東大数理研の劉 徳明 氏 [7] により、$x = \lambda_k$ $(k = 1, \cdots, g)$ に見掛けの特異点を持つ線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x,t)\frac{dy}{dx} + p_2(x,t)y = 0$$

$$p_1(x,t) := -2x^{g+1} - \sum_{k=1}^{g} kt_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{g} \frac{1}{x-\lambda_k}$$
$$p_2(x,t) := -(2\alpha+1)x^g - 2\sum_{k=1}^{g} h_{g+1-k}x^{k-1} + \sum_{k=1}^{g} \frac{\mu_k}{x-\lambda_k}$$

のホロノミック変形から

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \\ \bar{H}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{H}_g \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ gt_g & 0 & 2 & & & & \\ \vdots & gt_g & 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\ 4t_4 & & & & \ddots & \ddots & \\ 3t_3 & 4t_4 & \cdots & \cdots & gt_g & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h_g \end{bmatrix}$$

をハミルトニアンとするハミルトン系 $(\lambda, \mu, \bar{H}, t)$ が導かれている。しかもこのハミルトン系は、定理 1.2 の正準変換で、ハミルトニアンが正準変数の多項式であるハミルトン系 $(\sigma, \rho, \bar{H}, t)$ に移る事も確認されている。

今回は紙面の関係上、定理 1.3 で述べた変換 $(\sigma, \rho, \tilde{K}, t) \to (q, p, H, \xi)$ のみつけ方を省略したが、同様の考察を行うと、この劉氏のみつけたハミルトン系 $(\sigma, \rho, \bar{H}, t)$ も次の変換 $(\sigma, \rho, \bar{H}, t) \to (q, p, H, \xi)$ で、

$$\{H_i, H_j\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_i}H_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}H_i$$

を満たすものに移せそうである。(少なくとも $g \leq 5$ まで正しい。)

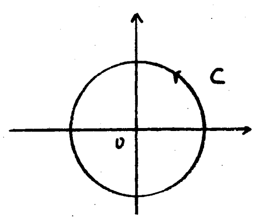
$$\begin{aligned}
\sigma_j &= \sum_{i=0}^{j} \varphi_{j,i} q_i, \quad (q_0 := 1) \\
\rho_j &= \sum_{i=j}^{g} \psi_{i,j} p_i, \\
t_{g+1-k} &= \frac{1}{(g-k+1)! \cdot (k+1)!} \\
&\quad \times \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} u^{g-k} \det \Phi(u; 0, (1/2)\xi_g, (1/2)\xi_{g-1}, \cdots, (1/2)\xi_{g+1-k}) du.
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{1,1} & & & \\ \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \psi_{g,1} & \cdots & \psi_{g,g-1} & \psi_{g,g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{h}_1 - (\alpha + (1/2))\varphi_{1,0} \\ \hat{h}_2 - (\alpha + (1/2))\varphi_{2,0} \\ \vdots \\ \hat{h}_g - (\alpha + (1/2))\varphi_{g,0} \end{bmatrix}$$

ただし、

$$\hat{h}_j := h_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{g} (g+1-i) \sigma_{i+j-g-2} \rho_i$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{k+d,k} &= \frac{1}{(g-k-d)!} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u} u^{g-k-d} \Phi(u; 0, (1/2)\xi_g, (1/2)\xi_{g-1}, \cdots, (1/2)\xi_{g+2-d}) du, \\
\psi_{k+d,k} &= (g+1-k-d) \cdot \frac{(g-k)!}{d!} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \\
&\quad \times \int_C \mathrm{e}^{u} u^{-g-2+k} \Phi(u; 0, -(1/2)\xi_g, -(1/2)\xi_{g-1}, \cdots, -(1/2)\xi_{g+2-d}) du.
\end{aligned}$$



References

[1] Fuchs,R., Über lineare homogene differentialgleichungen zweiter ordnung mit drei im Endlichen gelegene wesentlich sigulären Stellen, Math.Ann.,63(1907), 301 - 321.

[2] Garnier,R., Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale général a ses points critiques fixes, Ann. Sci. Ecole Norm.Sup.,29(1912),1 - 126.

[3] Garnier,R., Solution du probleème de Riemann pour les systèmes différentielles linéaires du second ordre, Ann.sci.Ecole Norm.sup., 43(1926),177 - 307

[4] Jimbo,M.,Miwa,T., Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients,II, Physica 2D (1981), 407 - 448.

[5] Kimura,H., The degeneration of the two dimensional Garniersystem and the polynomial Hamitonian structure, Ann.Math.Pura.Appl.,155(1989),25 - 74.

[6] Kimura,H. and Okamoto,K., On particular solutions of the Garnier systems and the Hypergeometric funtions of several variables, Quart.J.Math.,37(1986),61 - 80.

[7] Liu,D., 劉氏のノート.

[8] Okamoto,K., Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system, J.Fac.Sci.Univ.of Tokyo,Sect.I-A,Math.,33(1986), 575 - 618.

[9] Okamoto,K., On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier systems, J.Math.pures et appl.,63.(1984),129 - 146.