

## 直方体容器中の3次元熱対流

同志社大・工 水島 二郎 (Jiro MIZUSHIMA)  
同志社大・工 松田 修 (Osamu MATSUDA)

### 1 はじめに

水平流体層における熱対流の発生とその安定性の研究は、主に無限に広い流体層について行われてきた。また、有限領域での熱対流の発生の研究は主に2次元流れの仮定のもとで行われてきた。無限に広い流体層については、レイリー (Rayleigh) の理論的な研究により、無次元数  $Ra$  がある臨界値  $Ra_c$  より大きくなると流体層が不安定となり対流が発生することが示された。この臨界値は上下面ともに完全熱伝導で粘着条件のとき  $Ra_c = 1707.8$  であることが知られている。また、不安定性の結果発生する熱対流の3次元攪乱による2次不安定性は Clever & Busse<sup>1)</sup> により詳しく調べられた。さらに、カオスの発生および乱流への遷移についても詳しく調べられている。<sup>2)</sup>

2次元性を仮定した有限領域中での熱対流の発生については、Velte<sup>3)</sup> が矩形領域中の熱対流の発生を上下面および側壁が完全熱伝導条件の下で調べ、特に横幅と高さの比すなわちアスペクト比  $A$  が  $A = 1$  のとき臨界レイリー数  $Ra_c$  が  $Ra_c = 5030$  であることを示した。また、2次元矩形容器中でのベナール対流の発生に関するより詳しい研究は最近でも Lee, Schultz & Boyd<sup>4)</sup> や Mizushima<sup>5)</sup> により行われている。

3次元的に有限な直方体容器中での熱対流の発生は、Davis<sup>6)</sup> により調べられた。彼は、熱対流の速度は空間変数には3次元的に依存するが速度ベクトルは鉛直方向と水平一方向のみをもつロール形の熱対流のみを取り扱った。その結果、短い辺に平行な軸を持つロール形の熱対流が最も不安定なモードとして選ばれることを線形安定性理論により見いだした。しかし、その後 Davies-Jones<sup>7)</sup> により Davis の仮定したロール形の熱対流解は線形安定性を支配する攪乱方程式の正しい解とはなっていないことが示された。Gershuni<sup>8)</sup> もまた、直方体容器内の熱対流の発生を調べ、最低次の近似の下でガレルキン法を用いて臨界レイリー数を計算し、立方体容器の場合の臨界レイリー数は  $Ra_c = 8334$  であることを示した。また Kirchartz & Oertel<sup>9)</sup> は水平および水平面より傾いて置かれた直方体容器のロール形の対流の発生を実験的に調べ、数値計算の結果と比較を行った。ただし、Gershuni の計算も Kirchartz & Oertel の計算も臨界レイリー数は Davis と同じ2次元ロール形の解を仮定して求められているため、正しい値ではない。3次元的に有限な直方体容器中での熱対流の非線形発展は Kessler<sup>10)</sup> および Nishikawa & Yahata<sup>11)</sup> により調べられ、熱対流の3次元的な流れの構造や周期流、準周期流、カオス的な解への遷移などが報告されている。

ここでは、水平に置かれた直方体容器を下から加熱したときに容器内に満たされた流体中に熱対流が発生する条件を調べた。容器の上下面および側壁はすべて完全熱伝導物質でできており、流体運動の壁での境界条件は粘着条件を用いる。

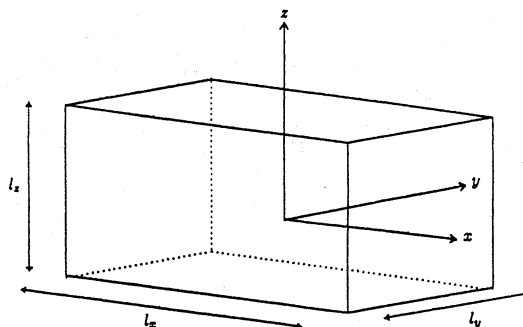


図1. 直方体容器中の熱対流. 座標系.

## 2 攪乱方程式と境界条件

水平に置かれた直方体容器の水平方向の一辺に沿って  $x$  軸、他の一辺に沿って  $y$  軸、鉛直方向に  $z$  軸を採る。容器の  $x$  方向の長さを  $l_x$ 、 $y$  方向の長さを  $l_y$ 、 $z$  方向の長さを  $l_z$  とする (図 1)。代表長さを容器の深さ  $l_z$  に採り、座標を無次元化する。すなわち、容器の上下面は  $z = \pm 1/2$ 、側壁は  $x = \pm A_x/2$  および  $y = \pm A_y/2$  に位置する。ここで、 $A_x \equiv l_x/l_z$  および  $A_y \equiv l_y/l_z$  はそれぞれ  $x$  および  $y$  方向のアスペクト比である。容器の上下面および側面は完全熱伝導性をもつ固体壁でできているものとする。浮力項を除いては流体の物質的な性質は変わらないとするブジネスク近似を用い、線形近似を行うことにより、対流の速度  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  および熱伝導状態からの温度のずれ  $\theta$  は次の無次元化された攪乱方程式で支配される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$Pr \Delta u = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad Pr \Delta v = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad Pr \Delta w = \frac{\partial p}{\partial z} - Pr Ra \theta, \quad (2)$$

$$w + \Delta \theta = 0. \quad (3)$$

ただし、 $\Delta$  はラプラシアンであり、 $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  で表される。また、熱対流の発生においては交替性の原理が成り立つので、臨界状態において  $\partial/\partial t = 0$  と置いた。パラメータ  $Ra$  はレイリー数、 $Pr$  はプラントル数であり次式で定義される。

$$Ra = \frac{\gamma g \Delta T d^3}{\kappa \nu}, \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (4)$$

ここで、 $\kappa$  は流体の熱拡散係数、 $\nu$  は動粘性係数、 $\gamma$  は熱膨張係数、 $g$  は重力加速度である。方程式 (1)-(3) から圧力  $p$  を消去すると攪乱方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Delta u - \frac{\partial}{\partial x} \Delta v = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta w - \frac{\partial}{\partial z} \Delta u = -Ra \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (7)$$

$$\Delta \theta + w = 0. \quad (8)$$

壁はすべて完全熱伝導性をもつ固体壁であると仮定しているので境界条件は次のように表される。

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = v = w = \theta = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm \frac{1}{2} A_x, \quad (9)$$

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial y} = w = \theta = 0 \quad \text{at} \quad y = \pm \frac{1}{2} A_y, \quad (10)$$

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial z} = \theta = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm \frac{1}{2}. \quad (11)$$

### 3 数値解析

#### 3.1 数値計算法

方程式(5)-(8)式を(9)-(11)式の境界条件のもとで数値的に解くことにより、臨界レイリー数  $Ra_c$  およびその固有関数を求める。まず、 $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z), \theta(x, y, z)$  を次のように修正チェビシェフ多項式で展開する。

$$u(x, y, z) = \sum_{l=0}^{2L-1} \sum_{m=0}^{2M-1} \sum_{n=0}^{2N-1} a_{lmn} \tilde{T}_l(2x/A_x) \tilde{T}_m(2y/A_y) \tilde{T}_n(2z), \quad (12)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{l=0}^{2L-1} \sum_{m=0}^{2M-1} \sum_{n=0}^{2N-1} b_{lmn} \tilde{T}_l(2x/A_x) \tilde{T}_m(2y/A_y) \tilde{T}_n(2z), \quad (13)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{l=0}^{2L-1} \sum_{m=0}^{2M-1} \sum_{n=0}^{2N-1} c_{lmn} \tilde{T}_l(2x/A_x) \tilde{T}_m(2y/A_y) \tilde{T}_n(2z), \quad (14)$$

$$\theta(x, y, z) = \sum_{l=0}^{2L-1} \sum_{m=0}^{2M-1} \sum_{n=0}^{2N-1} d_{lmn} \tilde{T}_l(2x/A_x) \tilde{T}_m(2y/A_y) \tilde{T}_n(2z), \quad (15)$$

ここで、 $\tilde{T}_n(x)$  および  $\tilde{\tilde{T}}_n(x)$  は

$$\tilde{T}_n(x) = (1 - x^2) T_n(x), \quad \tilde{\tilde{T}}_n(x) = (1 - x^2)^2 T_n(x) \quad (16)$$

で定義される修正チェビシェフ多項式であり、 $T_n(x)$  はチェビシェフ多項式である。このように展開すると  $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z), \theta(x, y, z)$  は自動的に境界条件(9)-(11)を満たしている。

方程式(5)-(8)式に(12)-(15)式の展開を代入し、ガレルキン法またはコロケーション法を用いることにより展開係数ベクトル  $\mathbf{a} = {}^t(a_{000}, \dots, a_{LMN}, b_{000}, \dots, b_{LMN}, c_{000}, \dots, c_{LMN})$  に対する代数方程式

$$\mathbf{Aa} = \mathbf{RaBa} \quad (17)$$

を得る。方程式(17)を行列の固有値問題としてダブルQR法により数値的に解くことにより、臨界レイリー数  $Ra_c$  とその固有値に対応する固有ベクトルを求める。

ガレルキン法においては、(5)-(8)式の両辺にそれぞれ  $\tilde{T}_i(2x/A_x) \tilde{T}_j(2y/A_y) \tilde{T}_k(2z)$ 、 $\tilde{\tilde{T}}_i(2x/A_x) \tilde{T}_j(2y/A_y) \tilde{T}_k(2z)$ 、 $\tilde{T}_i(2x/A_x) \tilde{\tilde{T}}_j(2y/A_y) \tilde{T}_k(2z)$  をかけて、全領域で積分することにより(17)式を導いた。

また、コロケーション法においては撰点として次の点を用いた。

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi}{(2L+1)} \times i\right), \quad y_j = \cos\left(\frac{\pi}{(2M+1)} \times j\right), \quad z_k = \cos\left(\frac{\pi}{(2N+1)} \times k\right), \\ i = 1, 2, \dots, 2L-1, \quad j = 1, 2, \dots, 2M-1, \quad k = 1, 2, \dots, 2N-1. \quad (18)$$

#### 3.2 対称性

方程式(5)-(8)および境界条件(9)-(11)は  $x, y, z$  の符号の反転に対して不変である。従って、解  $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z), \theta(x, y, z)$  を  $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$  対称性によって、異なるパリティをもつ次の8つのモードに分類でき、それぞれ独立に計算を行うことができる。

$$\text{モード } 1; u(e, e, o), v(o, o, o), w(o, e, e), \theta(o, e, e)$$

モード 2 ;  $u(o, e, o), v(e, o, o), w(e, e, e), \theta(e, e, e)$

モード 3 ;  $u(e, o, o), v(o, e, o), w(o, o, e), \theta(o, o, e)$

モード 4 ;  $u(o, o, o), v(e, e, o), w(e, o, e), \theta(e, o, e)$

モード 5 ;  $u(e, o, e), v(o, e, e), w(o, o, o), \theta(o, o, o)$

モード 6 ;  $u(e, e, e), v(o, o, e), w(o, e, o), \theta(o, e, o)$

モード 7 ;  $u(o, o, e), v(e, e, e), w(e, o, o), \theta(e, o, o)$

モード 8 ;  $u(o, e, e), v(e, o, e), w(e, e, o), \theta(e, e, o)$

ここで、たとえば  $u(e, e, o)$  は  $x, y, z$  方向にそれぞれ偶関数、偶関数、奇関数で表されることを示す。モード 1-4 は、 $z$  方向に渦が奇数個、モード 5-8 は  $z$  方向に渦が偶数個ある流れを表している。対流発生時においては  $z$  方向に渦が 1 個発生するということがわかっている。また、 $x$  と  $y$  を入れ替えても同じであるので、結局モード 1-3 のみ計算を行えばよい。このような対称性を考慮することにより、(12)-(15) 式の展開項数を  $1/4$  に減らすことができる。

## 4 計算結果

### 4.1 計算の精度

まず、ここで行った数値計算の精度について議論を行っておく。(12)-(15) 式における展開の打ち切り項数を大きくしていくときの解の収束性および二つの計算法すなわちガレルキン法とコロケーション法との計算結果の比較を行う。アスペクト比  $A_x = A_y = 1$ 、すなわち立方体容器中での熱対流の発生する臨界レイリー数をモード 1 についていくつかの打ち切り項数  $L, M, N$  に対して表 1 に示す。臨界レイリー数  $Ra_c$  はコロケーション法

表 1: 臨界レイリー数  $Ra_c$ . 解の収束性 ( $A_x = A_y = 1$ , モード 1,  $L = M = N$ ).

$L$	ガレルキン法		コロケーション法	
	倍精度	4倍精度	倍精度	4倍精度
1	7474.08	7474.08		
2	6562.67	6562.67	6642.72	6642.72
3	6760.73	6760.73	6805.54	6805.54
4	6790.46	6790.45	6797.98	6797.98
5	6795.79	6795.74	6797.78	6797.75
6	—	6797.07	6797.75	6797.75
7	—	—	6797.74	6797.74

では  $L = M = N = 4$  で  $Ra_c = 6798$  に収束する。ガレルキン法は収束性が少し悪く、 $L = M = N = 5$  でほぼ収束するが、さらに打ち切り項数を増やし  $L = M = N = 7$  とするとかえって不正確な値となる。この現象は行列の固有値を計算するときに行列が大きくなると精度が落ちるためであると思われる。じっさい、 $L = M = N = 7$  のときは  $343 \times 343$  の行列式の固有値を求めている。このような精度落ちは 4 倍精度の計算を行

うといくぶん改善されている。この表からアスペクト比  $A_x = A_y = 1$  のときの臨界レイリー数は  $Ra_c = 6798$  であると結論できる。今後、計算はコロケーション法を用いるときは  $L = M = N = 7$ 、ガレルキン法を用いるときは  $L = M = N = 6$  で展開を打ち切ることにする。

これまでの他の研究者の結果との比較を行う必要があるが、我々の知る限りでは具体的な数値を示しているのは Gershuni<sup>7)</sup>のみである。ただし、前にも述べたように Gershuni の結果はガレルキン法による最低次の近似である。しかも、Gershuni はモード 1 については速度ベクトル 3 成分の内  $u$  と  $w$  成分のみをゼロでないとし、 $v$  成分がゼロであると仮定するロー解を求めている。したがって、ここでも最低次の近似を行い Gershuni と同じロー解も求め、結果を比較する。その結果を表 2 に示す。表 2 も  $A_x = A_y = 1$  のときの臨界レイリー数を示している。表 2 からわかるように、モード 1 については最低次の近似で  $v = 0$  と置くと Gershuni の結果とほぼ一致するが、これは不正確であり、 $v \neq 0$  の効果を取り入れると約 1 割程度臨界レイリー数が下がることがわかる。

表 2: 臨界レイリー数  $Ra_c$ . Gershuni<sup>7)</sup>の結果との比較 ( $A_x = A_y = 1$ ).

	モード 1	モード 2	モード 3
Gershuni	8224	9184	14032
ガレルキン (最低次近似、 $v = 0$ )	8229.93	—	—
ガレルキン (最低次近似、 $v \neq 0$ )	7474.12	9994.9	14157.3
ガレルキン ( $L = M = N = 6$ )	6797.07	8437.2	11608.8
コロケーション ( $L = M = N = 7$ )	6797.74	8437.4	11608.7

表 3: 臨界レイリー数  $Ra_c$  および臨界アスペクト比 ( $A_y = 1$ ).

$A_x$	$Ra_c$		
	モード 1		モード 2
1.00	6797.74		8437.4
1.43		4854.90	
2.00	4016.89		3694.85
2.59		3464.18	
3.00	3296.75		3371.44
3.54		3220.18	
4.00	3169.84		3138.85
4.47		3111.84	
5.00	3068.59		3082.33
5.28		3060.38	
6.00	3035.21		3026.72

## 4.2 臨界条件と流れ場, 温度場

モード1からモード3までのパリティの異なる3つのモードについて数値計算の結果得られた臨界レイリー数のアスペクト比依存性を図2 (a)に示す。また、図2 (b)は図2 (a)の拡大図である。これらの図では $A_y = 1$ とおいた。すなわち横からみて、正方形の断面を持つ直方体の容器中での熱対流の発生時の臨界レイリー数である。アスペクト比 $A_x$ が小さいときはモード1が臨界レイリー数を与え、 $A_x$ の値が1.43よりも大きくなると臨界モードはモード2となる。さらに $A_x$ の値を大きくするとモード1、モード2が交互に臨界モードとなり、モード3は $A_x$ のどの値においても臨界モードとなることはない。表3には、 $A_x = 1, \dots, 6$ での臨界レイリー数とモード1とモード2の二つのモードが交わる臨界アスペクト比およびそのときの臨界レイリー数の値を示す。この図で、曲線の上または下に書き加えられた数字は $x-z$ 平面からみた渦の数を示す。モード1とモード2が交わる間隔はほぼ一定であり、 $A_x$ が1増加すると $x-z$ 平面からみた渦の数が1増加することを示している。これは2次元熱対流の場合と同じである。モード3は $A_x$ が大きくなるにしたがって2次元熱対流の場合の臨界値 $Ra_c = 5011$ に近づく。

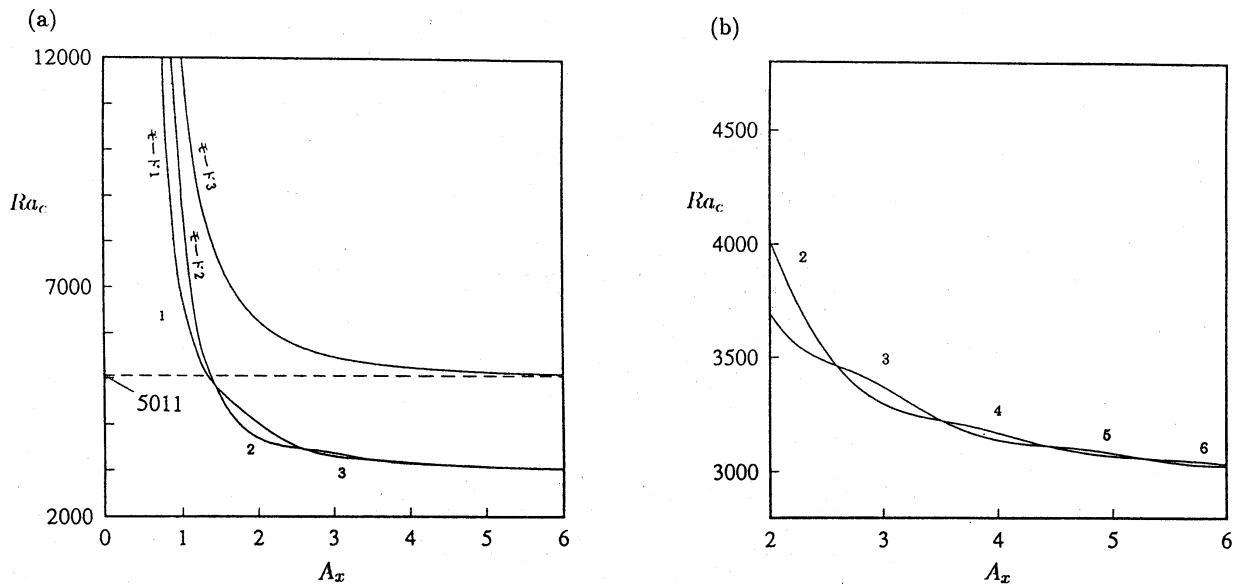


図2. 対流が発生するときの臨界レイリー数  $Ra_c, A_y = 1$ .  
(a) 全体図 ( $A_x = 0 - 6$ ) (b) 拡大図 ( $A_x = 2 - 6$ )

アスペクト比  $A_y = 1$  と固定し、 $A_x \rightarrow 0$  の極限における臨界レイリー数を調べるには、攪乱方程式 (5)-(8) において変数変換  $x' = x/A_x$ 、 $\theta' = \theta/A_x$ 、 $Ra' = RaA_x^4$  を行い、 $1/A_x$  の最低次の項のみを残し、整理をすると

$$\frac{\partial^4 \theta'}{\partial x'^4} = Ra' \theta' \quad (19)$$

となる。これより

$$Ra = 1558.5 A_x^{-4} \quad (20)$$

が得られる。<sup>5)</sup> 図3にこの漸近解と数値解により得られた臨界レイリー数を示した。両者の結果は  $A_x < 0.2$  でよく一致することがわかる。

次に、図4ではアスペクト比が  $A_x = A_y$ 、すなわち上からみて正方形の断面を持つ直方体容器中での熱対流の発生時の臨界レイリー数を示す。また表4には、それぞれのアスペクト比における臨界レイリー数の値を示す。この表でモード2の「—」で示されているアスペ

表 4: 臨界レイリー数  $Ra_c(A_x = A_y)$ .

$A_x$	モード 1	モード 2	モード 3
1.0	6797.65	8437.4	11608.6
2.0	2609.74	2116.	2980.30
3.0	1967.78	—	2024.50
4.0	1848.08	—	1837.36
5.0	1789.69	—	1789.99
6.0	1761.76	—	1761.75

クト比  $A_x$  についてはまだ正確な臨界レイリー数が求められていない。図 4 からわかるように、 $A_x < 1.27$  のときモード 1 が臨界モードとなり、 $1.27 \leq A_x$  のときモード 2 が臨界モードとなる。 $A_x \rightarrow \infty$  の場合には無限に広い流体層における臨界レイリー数  $Ra_c = 1707.8$  に近づいていることがわかる。

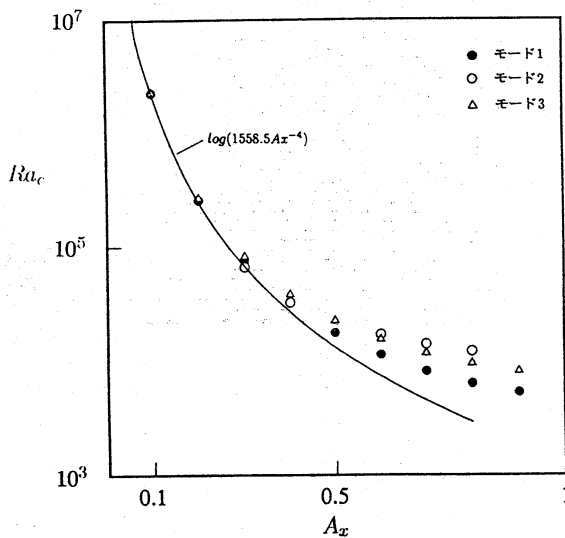
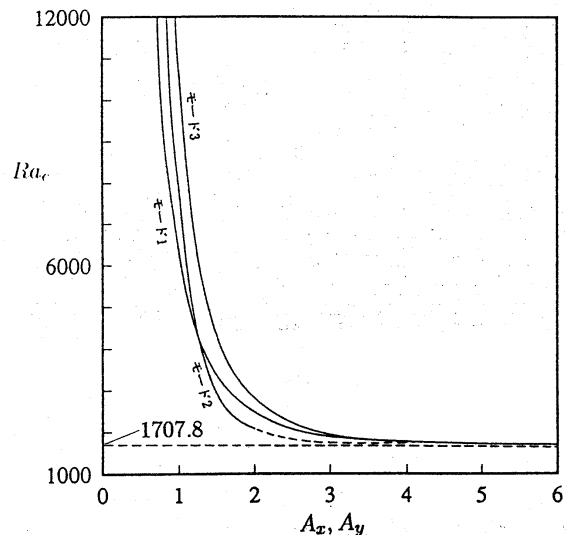
図 3. 低アスペクト比 ( $0 < A_x \leq 1$ ) における臨界レイリー数  $Ra_c, A_y = 1$ .図 4. 対流が発生するときの臨界レイリー数.  $Ra_c, A_x = A_y$ .

図 5 (a)-(e) は、 $A_x = A_y = 1$  のときの臨界状態における各断面における速度の投影ベクトル図である。図 5 (a)-(c) は  $x-z$  平面への速度の投影ベクトル図であり、流れが渦状になっていることがわかる。また、図 5 (d) および (e) は  $y-z$  平面への投影ベクトル図であり、中央 ( $x = 0$ ) 部で速度分布の変化が大きく、流れが 3 次元的であることがわかる。壁近傍 ( $x = 0.49$ ) での速度ベクトルの分布を見ると、容器内では大まかにいって球面に沿ったような流れが形成されている。

次に、図 5 で示した流れ場に対応する攪乱の温度分布を図 6 (a) および図 6 (b) に示す。ここでは、図 6 (a) は  $x-z$  平面 ( $y = 0$ )、図 6 (b) は  $y-z$  平面 ( $x = 0$ ) での断面における温度場を示す。この温度場は熱伝導状態からの温度のずれを等温線で表しており、この図からも流れの様子を推察できる。またそれぞれの断面に関して中央のみを示したが、壁近傍でもほぼ中央における温度分布と大きな違いがないので示さなかった。

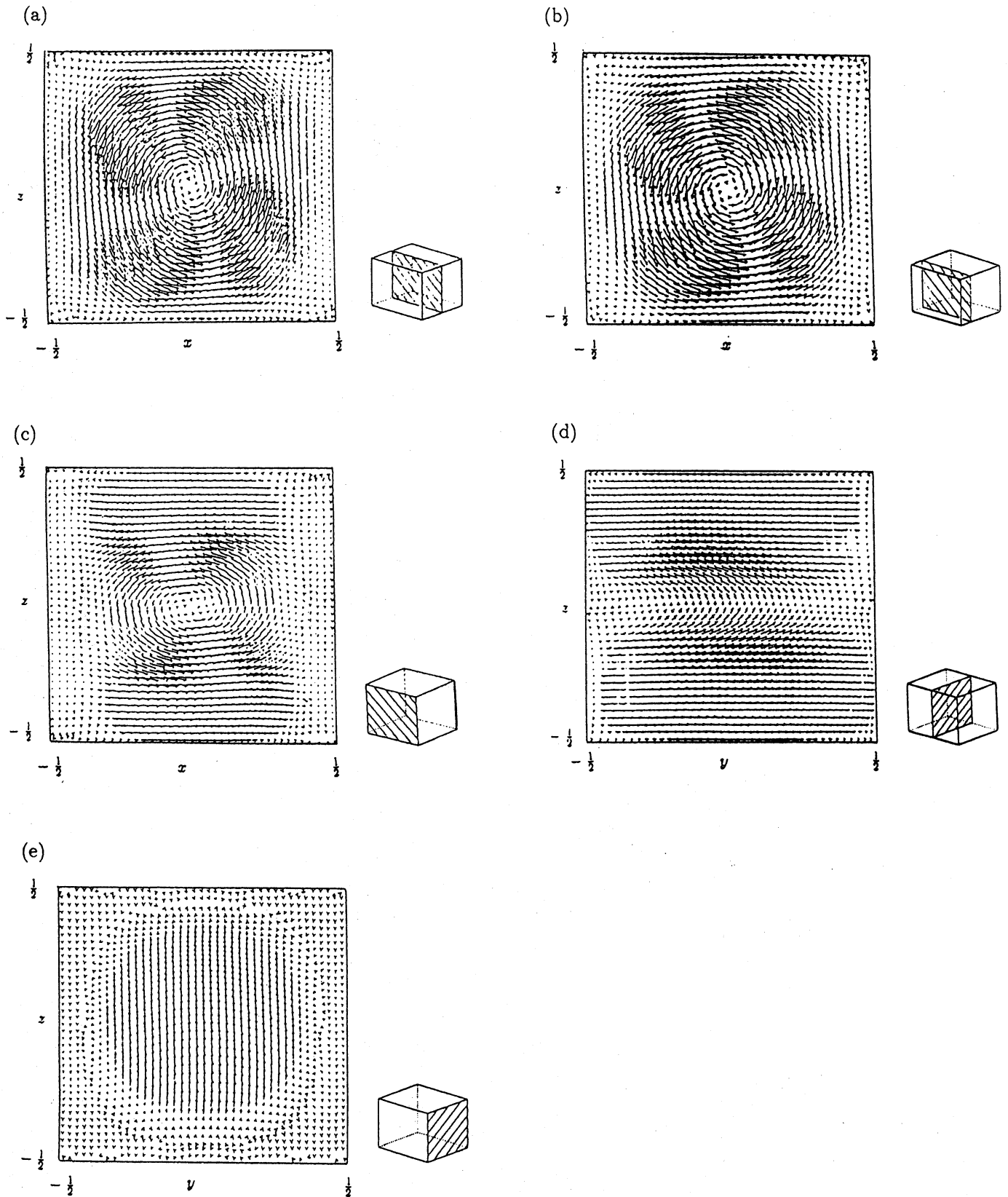


図5. 臨界状態における流れ場.  $A_x = A_y = 1$ .  
 (矢印はそれぞれの断面の投影ベクトルを表す.)  
 $x-z$ 断面 (a)  $y=0$  (b)  $y=-0.25$  (c)  $y=-0.49$   
 $y-z$ 断面 (d)  $x=0$  (e)  $x=0.49$



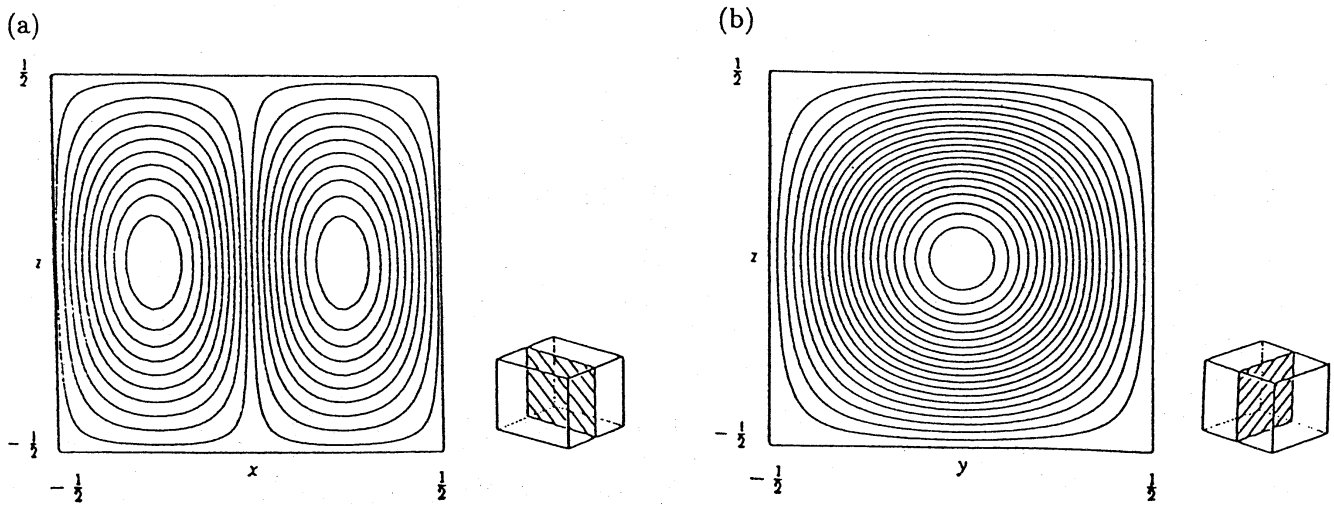


図6. 臨界状態における温度場.  $A_x = A_y = 1$ .  
 (a)  $x-z$ 断面 ( $y=0$ ) (b)  $y-z$ 断面 ( $x=0$ )

## 5 おわりに

直方体容器中の熱対流発生条件の研究は基礎的な研究であり、数多くの研究者により試みられてきたがまだ解決をしていない。ここで示した結果はこの問題をほぼ解決したことを示しているが、まだモード2については2、3のアスペクト比における臨界レイリー数が正しく求められていない。

## 参考文献

- 1) R. M. Clever & F. H. Busse (1974) *J. Fluid Mech.* **65**, 625-645.
- 2) J. B. McLaughlin & S. A. Orszag (1982) *J. Fluid Mech.* **122**, 123-142.
- 3) W. Velte (1964) *Arch. Ration. Mech. Anal.* **16**, 97-124.
- 4) N. Y. Lee, W. W. Schultz & J. P. Boyd (1989) *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 513-520.
- 5) J. Mizushima (1995) *J. Phys. Soc. Japan* **64**, 2420-2432.
- 6) S. H. Davis (1967) *J. Fluid Mech.* **30**, 465-478.
- 7) R. P. Davies-Jones (1970) *J. Fluid Mech.* **44**, 695-704.
- 8) G. Z. Gershuni & E. M. Zhukhovitskii (1972) *Convective stability of incompressible fluids*, pp. 98-103.
- 9) K.R. Kirchartz & H. Oertel Jr. (1988) *J. Fluid Mech.* **192**, 249-286.
- 10) R. Kessler (1987) *J. Fluid Mech.* **174**, 357-379.
- 11) S. Nishikawa & H. Yahata (1996) *J. Phys. Soc. Japan* **65**, 935-944.