数理解析研究所講究録
971 巻 1996 年 125-133

一般の虚アーベル体の Demjanenko matrix について

青山学院高等部　　津村 博文（Hirofumi　Tsumura）

§ 0. Introduction

自然数 n に対し, $A_n=\{a\in\mathbf{Z}\mid 1\leq a<n/2,\ (a,n)=1\}$ とおく. また整数 x に対し, $R(x)=R_n(x)$ を x modulo n の剰余類の代表元で $0\leq R(x)<n$ となるものとし, x' を $xx'\equiv 1 \pmod n$ で $1\leq x'<n$ となる整数とする. このとき Maillet determinant $D(n)$ が次のように定義される.

$$D(n)=\det\Big(R(ab')\Big)_{a,b\in A_n}. \tag{0.1}$$

Carlitz-Olson は 任意の奇素数 p に対し, 次の関係式を証明した（[C-O]）.

$$D(p)=\pm\, p^{(p-3)/2}\, h^{-}(\mathbf{Q}(\zeta_p)). \tag{0.2}$$

ここで $h^{-}(\mathbf{Q}(\zeta_p))$ は $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ の相対類数である. この (0.2) は一般の円分体にまで一般化されたが, 最近になって Girstmair によって虚アーベル体の Maillet determinant が定義され (0.2) が一般化された（[G]）.

Maillet determinant に類するものとして Demjanenko Matrix がある. この行列は以前から Folz や Zimmer によって, ある楕円曲線の torsion point の order の bound を与えるなど（[F-Z]）有効に使われていたものであるが, Hazama によって $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ に付随する Demjanenko matrix Δ_p の determinant が計算され, (0.2) の類似として次の関係式が証明された（[Ha]）.

$$\det\,\Delta_p=\pm\frac{F}{p}\, h^{-}(\mathbf{Q}(\zeta_p)). \tag{0.3}$$

ただし $F=\prod_{\chi}(2-\chi(2))$, ここで χ は $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{\times}$ の奇指標全体を動く. この (0.3) は Sands-Schwarz によって 導手が奇素数巾の虚アーベル体に拡張され（[S-Sch]）, Dohmae によって 導手が奇数の虚アーベル体に拡張された（[D]）. また最近になって, Hirabayashi により導手が偶数のもののうち, ある条件をみたす虚アーベル体についても (0.3) の拡張された結果が示された（[Hi]）.

この小文では，一般の虚アーベル体 K（すなわち導手は任意）について，その導手と互いに素な 2 以上の自然数 ℓ にたいし，generalized Demjanenko matrix $\Delta(K,\ell)$ を構成し，(0.3) の一般化である次の関係式を証明する（§2 参照）．

主定理

$$\det\ \Delta(K,\ell)\ =\frac{(-2)^{[K:Q]/2}}{Q_K w_K}h^-(K)\prod_{\chi\in X^-}(\ell\ \chi(\ell)-1)\ \prod_{p|n}(1-\chi(p)),$$

ここで Q_K はいわゆる K の unit index，w_K は K に属する 1 の巾根の総数，X^- は $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ の奇指標全体とする．

$\ell=2$ のとき，$\Delta(K,2)$ は本質的に Demjanenko matrix と一致することがわかる（§2 参照）．また $\ell=n+1$ のとき，$\Delta(K,n+1)$ は Girstmair の定義した K の Maillet determinant をあらわす行列と一致していることがわかる（§3 参照）．このとき，上記の主定理の結果は［G］の Theorem 1 の結果と完全に一致している．従って この $\Delta(K,\ell)$ は Maillet determinant と Demjanenko matrix の両方の一般化とみなすことができる．

応用として §4 では導手が 2 巾である虚アーベル体 K について，$h^-(K)$ の upper bound を与える．この評価は，[S-Sch] の Theorem 4 の類似と見ることができる．§5 では $\Delta(K,\ell)$ の行列の直和分解を考察する．すなわち $c|([K:\mathbf{Q}]/2)$ となる c について，$\Delta(K,\ell)$ が c 個の小行列の直和からなる行列と相似であることを証明する．とくに $c=[K:\mathbf{Q}]/2$ のときが $\Delta(K,\ell)$ の対角化であり，各対角成分は本質的に一般ベルヌイ数となる．§6 では K の cyclotomic $\mathbf{Z}_p$-extension $K=K_0\subset K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_m\subset\cdots$ に付随するような generalized Demjanenko matrix $\Delta(K,\ell,m)$ $(m\geq 0)$ を構成する．ただし $\Delta(K,\ell,m)\in \mathrm{M}([K:\mathbf{Q}]/2,\mathbf{Q}(\zeta_{p^m}))$ であり，$m=0$ のとき$\Delta(K,\ell,0)=\Delta(K,\ell)$ である．

なお，この小文の内容について，§2, §3, §4 については［T2］に，§5 については［T3］に，§6 については［T4］にまとめられている．

§ 1. Stickelberger element の類似物

$G=\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_n)/\mathbf{Q})=\{\sigma_a\mid\sigma_a:\zeta_n\to\zeta_n^a,\ \ (a,n)=1\}$，$H=\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_n)/K)$，$G_K=\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})\simeq G/H$ とする．ここで$\sigma_a|_K$ も簡単のため σ_a とかく．$J=\sigma_{-1}$

を複素共役とする．また $\mathbf{Q}$ の代数閉包を $\overline{\mathbf{Q}}$ とかき，群環 $V = \overline{\mathbf{Q}}[G_K]$ を考える．$V^- = \{x \in V \mid Jx = -x\}$ とおくと，$V^- = (1-J)V$ である．

$\mathbf{Q} \subset K \subset \mathbf{Q}(\zeta_n)$ なので，$T_K \subset \{a \in \mathbf{Z} \mid 1 \leq a < n,\ (a,n) = 1\}$ で $H = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_n)/K) = \{\sigma_a \mid a \in T_K\}$ となる T_K がとれる．さらに $J = \sigma_{-1} \notin H$ なので，$S_K \subset A_n = \{c \in \mathbf{Z} \mid 1 \leq c < n/2\}$ で $\{\sigma_c \mid c \in S_K\} \cup \{\sigma_{-c} \mid c \in S_K\}$ が $G/H \simeq G_K$ の完全代表系となる S_K がとれる．

以下［W］§ 6.3, § 6.4 の記号を使う．X を G_K の指標群とし，X^- を G_K の奇指標全体，X^+ を偶指標全体とする．$\chi \in X$ にたいし

$$\varepsilon_\chi = \frac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \sum_{a \in S_K} \chi(a)\ (\sigma_a^{-1} + \chi(-1)\sigma_{-a}^{-1})$$

とするとき，$\{\varepsilon_\chi \mid \chi \in X\}$ は $V = \overline{\mathbf{Q}}[G_K]$ の orthogonal idempotents である．注として $\varepsilon_\chi \sigma_a^{-1} = \overline{\chi}(a)\varepsilon_\chi$ である．$\{\varepsilon_\chi \mid \chi \in X\}$ が V の $\overline{\mathbf{Q}}$-basis で，$\{\varepsilon_\chi \mid \chi \in X^-\}$ が V^- の $\overline{\mathbf{Q}}$-basis であることは容易にわかる．

そこで $\ell > 1$ で $(\ell, n) = 1$ となる $\ell \in \mathbf{Z}$ をとり，次の記号を定義する．

$$A_n(b,\ell) = \sum_{\substack{\zeta^\ell = 1 \\ \zeta \neq 1}} \frac{\zeta^{n-b}}{1-\zeta^n} \in \mathbf{Q}. \tag{1.1}$$

Remark. もし n が奇数ならば，$\ell = 2$ としてよい．このとき $A_n(b,2) = (-1)^{b-1}/2$ となる．

Definition 1.1. $\rho = \rho(K,\ell) = \displaystyle\sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^{n} A_n(R(a),\ell)\sigma_a^{-1} \in \mathbf{Q}[G_K]$.

Remark. $A_n(R(n-a),\ell) = -A_n(R(a),\ell)$ なので，$\rho \in V^-$ である．とくに $\ell = n+1$ のとき，$\rho(K, n+1)$ は (K の Stickelberger element - half norm) の n 倍であることが確かめられる．

以下 $\chi \in X^-$ とする．定義より，

$$\rho\varepsilon_\chi = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^{n} A_n(R(a),\ell)\ \overline{\chi}(a)\varepsilon_\chi. \tag{1.2}$$

次の補題が,［W］の Lemma 12.15 と［T］の Lemma 1 よりえられる．

LEMMA 1.2. $\displaystyle\sum_{\substack{a=1\\(a,n)=1}}^{n} A_n(R(a),\ell)\,\chi(a) = (\ell\,\chi(\ell)-1)\;B_{1,\chi}\prod_{p|n}(1-\chi(p))$.

この補題と (1.2) より，次の命題をえる．

PROPOSITION 1.3. $\rho\varepsilon_\chi = \varepsilon_\chi\;(\ell\,\overline{\chi}(\ell)-1)\,B_{1,\overline{\chi}}\displaystyle\prod_{p|n}(1-\overline{\chi}(p))$.

§ 2. 主定理の証明

S_K と T_K の定義から

$$G = \{\sigma_a\sigma_c \mid a \in T_K,\ c \in S_K\} \cup \{\sigma_a\sigma_{-c} \mid a \in T_K,\ c \in S_K\} \tag{2.1}$$

であるが，$a \in T_K$ ならば $\sigma_a|_K = 1$ なので $\sigma_a\sigma_c = \sigma_c$ on K となる．$\rho(K,\ell) \in V^-$ より次をえる．

LEMMA 2.1. $\rho = \displaystyle\sum_{c\in S_K}\left(\sum_{a\in T_K} A_n\left(R(ac),\ell\right)\right)(\sigma_c^{-1}-\sigma_{-c}^{-1})$.

$(c,n)=1$ となる $c \in \mathbf{Z}$ にたいし，$\xi_c = \sigma_c^{-1}-\sigma_{-c}^{-1}$ とおくと，$\{\xi_c \mid c \in S_K\}$ が V^- の $\overline{\mathbf{Q}}$-basis となる．ここで $\xi_a\xi_b = 2\xi_{ab}$, $\xi_{-a} = -\xi_a$ なので，Lemma 2.1 より

$$\rho\xi_d = 2\sum_{c\in S_K}\left(\sum_{a\in T_K} A_n\left(R(ac),\ell\right)\right)\xi_{cd}. \tag{2.2}$$

$(a,n)=1$ となる $a \in \mathbf{Z}$ にたいし $b \in T_K$ と $c \in S_K$ を $\sigma_a = \sigma_b\sigma_c$ または $\sigma_a = \sigma_b\sigma_{-c}$ となるようにとれる．このとき $g(a) = c$,

$$f(a) = \begin{cases} 1 & (if \quad \sigma_a = \sigma_b\sigma_c) \\ \\ -1 & (if \quad \sigma_a = \sigma_b\sigma_{-c}) \end{cases} \tag{2.3}$$

とおく．注として$\sigma_a = \sigma_{f(a)g(a)}$ on K なので，次の 2 つの補題が成り立つ．

LEMMA 2.2. $c \in S_K$ ならば $\{g(cd)|d \in S_K\} = S_K$.

LEMMA 2.3. $b,c,d \in S_K$ について $g(cd) = b$ ならば $c = g(bd')$ かつ $\xi_{cd} = f(bd')\,\xi_b$.

この2つの補題より，次の命題をえる．

PROPOSITION 2.4. $d \in S_K$ について，

$$\rho\xi_d = 2 \sum_{b \in S_K} \left(\sum_{a \in T_K} A_n \left(R(abd'), \ell \right) \right) \xi_b.$$

DEFINITION 2.5. $\Delta(K, \ell) = \left(2 \sum_{a \in T_K} A_n \left(R(abc'), \ell \right) \right)_{b,c \in S_K}.$

主定理の証明

$\{\varepsilon_\chi\ ;\ \chi \in X^-\}$ と $\{\xi_d\ ;\ d \in S_K\}$ が V^- の $\overline{\mathbf{Q}}$-basis なので，$L_\rho(v) = \rho v$ で定義される V^- の endmorphism L_ρ のこれらの basis に関する表現行列を考えると，Proposition 1.3, Proposition 2.4, Definition 2.5 と 解析的類数公式（[W] Proposition 4.9 等）より，主定理が証明される．

Remark 1. この $\Delta(K, \ell)$ は ordinary Demjanenko matrix のある種の一般化とみることができる．実際，$|\det \Delta(K, 2)| = 2^{[K:Q]/2-1} |\det D| = |\det \widetilde{D}|$ が成り立つ．ここで D は Sands-Schwarz の Demjanenko matrix, $\widetilde{D}$ は ［S-Sch］において考察されている modified Demjanenko matrix である．

Remark 2. $\prod_{\chi \in X^-} (\ell\, \chi(\ell) - 1)$ と $\prod_{p|n} (1 - \chi(p))$ の値は ［G］,［S-Sch］,［D］等できちんと計算されている．

§ 3. Girstmair's Determinant

この § では $\ell = n + 1$ とする．Proposition 1.3 より

$$\varepsilon_\chi\ \rho(K, n+1) = \varepsilon_\chi\ n\ B_{1,\overline{\chi}} \prod_{p|n} (1 - \overline{\chi}(p)) = \varepsilon_\chi \sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^{n} \overline{\chi}(a)\ a$$

$$= \varepsilon_\chi \sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^{n} n\ B_1 \left(\frac{R(a)}{n} \right) \sigma_a^{-1}$$

が $\chi \in X^-$ について成り立つ．ただし $B_1(x) = x - 1/2$ （ベルヌイ多項式）である．注として $\sum_a B_1(R(a)/n)\sigma_a^{-1} \in V^-$ なので，$\sum_{\chi \in X} \varepsilon_\chi = 1$ より，

$$\rho(K, n+1) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,n)=1}}^{n} n\, B_1\left(\frac{R(a)}{n}\right)\sigma_a^{-1} = n \sum_{c \in S_K} \sum_{a \in T_K} B_1\left(\frac{R(ac)}{n}\right)\xi_c$$

が成り立つ．Lemma 2.1 より

$$\sum_{a \in T_K} A_n\left(R(ac), n+1\right) = \sum_{a \in T_K} n\, B_1\left(\frac{R(ac)}{n}\right)$$

が $c \in S_K$ について成り立つ．よって Definition 2.5 より，次の補題をえる．

Lemma 3.1. $$\Delta(K, n+1) = \left(2n \sum_{a \in T_K} B_1\left(\frac{R(abc')}{n}\right)\right)_{b,c \in S_K}.$$

主定理より，次の命題をえる．これは ［G］の Theorem 1 の結果と一致する．

Proposition 3.2. $$\det \Delta(K, n+1) = \frac{(-2n)^{[K:Q]/2}}{Q_K \omega_K} h^-(K) \prod_{p|n} (1 - \chi(p)).$$

§ 4. Upper Bound for h$^-$(K)

奇素数 p について 導手が p 巾の虚アーベル体 K にたいし，Sands-Schwarz は $h^-(K)$ の upper bound をあたえた（［S-Sch］Theorem 4 ）．ここでは虚アーベル体 K の導手を 2^m と仮定し，$\ell = 3$ として主定理を適用する． $F(\ell, K) = \prod_{\chi \in X^-}(\ell\chi(\ell) - 1)$ とおくと次の命題をえる．

Proposition 4.1. $$h^-(K) \leq \frac{\omega_K}{|F(3,K)|}\left(2^{m-2}[\mathbf{Q}(\zeta_{2^m}) : K]\right)^{[K:Q]/4}.$$

Corollary 4.2. $$h^-\left(\mathbf{Q}(\zeta_{2^m})\right) \leq 2^m \left(\frac{2^{m-2}}{9}\right)^{2^{m-3}}.$$

§ 5. $\mathbf{\Delta(K,\ell)}$ の直和因子

Y を $(X^+ : Y) = c$ となる X^+ の部分群とする．そこで X/Y の代表系のうちで，奇指標が代表元となるものの全体を $\{\psi_1, \cdots, \psi_c\}$ とする．

$$\lambda_s = \sum_{\chi \in Y} \varepsilon_{\psi_s \chi} \quad (s = 1, \cdots, c)$$

にたいして $V_s = \lambda_s V$ とおく．ψ_s は奇指標なので $V_s \subset V^-$ である．そこで

$$\ker Y = \{\sigma_a \in G_K \mid \chi(a) = 1 \text{ for any } \chi \in Y\}$$

とおく．$|\ker Y| = (X : Y) = 2c$ なので（[W] Chap.3 参照），$(G_K : \ker Y) = d/c$ となる．$J \in \ker Y$ より $\Gamma \subset S_K$ で $\{\sigma_y^{-1} \mid y \in \Gamma\}$ が $G_K/\ker Y$ の完全代表系となるものがとれ，次の補題が成り立つ．

Lemma 5.1. $\{\lambda_s \sigma_y^{-1} \mid y \in \Gamma\}$ は V_s の $\overline{\mathbf{Q}}$-basis となる．$(s = 1, \cdots, c)$．

そこで $L_\rho|_{V_s}$ の $\{\lambda_s \sigma_y^{-1} \mid y \in \Gamma\}$ に関しての表現行列を$\Delta_s(K,\ell,Y)$ とする．以下 $\Delta_s(K,\ell,Y)$ の成分を具体的にかこう．$J \in \ker Y$ なので，$\Omega \subset \{x \in \mathbf{Z} \mid 1 \le x < n/2\}$ であって $\ker Y = \{\sigma_x^{-1} \mid x \in \Omega\} \cup \{\sigma_{-x}^{-1} \mid x \in \Omega\}$ となるものがとれる．よって

$$\rho = 2 \sum_{y \in \Gamma} \sum_{x \in \Omega} \sum_{a \in T_K} A(R(axy), \ell)\, \xi_{xy}$$

となる．§2 と同様に，$z \in \Omega$ ならば $\{g(yz) \mid y \in \Omega\} = \Omega$ であること，また $y, z, w \in \Omega$ が $g(yz) = w$ ならば $y = g(wz')$ かつ $\xi_{yz} = f(wz')\,\xi_w$ であることが示せるので，次の命題をえる．

Proposition 5.2. $z \in \Gamma$ にたいして

$$\rho(\lambda_s \sigma_z^{-1}) = 2 \sum_{y \in \Gamma} \sum_{x \in \Omega} \sum_{a \in T_K} A(R(axyz'), \ell)\, \psi_s(x)\, \lambda_s \sigma_y^{-1}$$

が成り立つ．

Definition 5.3. $1 \le s \le c$ となる s について

$$\Delta_s(K,\ell,Y) = \left(2 \sum_{x \in \Omega} \sum_{a \in T_K} A(R(axyz'), \ell)\, \psi_s(x) \right)_{y,z \in \Gamma}.$$

これらと Proposition 2.4 をあわせて次の命題をえる.

Proposition 5.4. $\Delta(K,\ell)$ は次の行列と相似である.

$$\begin{pmatrix} \Delta_1(K,\ell,Y) & & & 0 \\ & \Delta_2(K,\ell,Y) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta_c(K,\ell,Y) \end{pmatrix}.$$

Corollary 5.5. $1 \leq s \leq c$ となる s について

$$\det \Delta_s(K,\ell,Y) = \prod_{\chi \in Y} (\ell\psi_s\chi(\ell) - 1)\ B_{1,\psi_s\chi} \prod_{\substack{p:\text{prime} \\ p|n}} (1 - \psi_s\chi(p)).$$

ここで $B_{1,\chi}$ は一般ベルヌイ数（ [W] Chap.4 参照）.

§ 6. 円分 $\mathbf{Z_p}$ − 拡大に付随する Demjanenko matrix

§2 で考察した $\Delta(K,\ell)$ は $([K:\mathbf{Q}]/2) \times ([K:\mathbf{Q}]/2)$-行列なので, $[K:\mathbf{Q}]$ が大きくなると, 行列自身が大きくなってしまう. そこでとくに K の円分 $\mathbf{Z}_p$-拡大

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m \subset \cdots$$

を考察するときに, §2 で考察した ρ を修正することにより, その表現行列として $\Delta(K,\ell,m) \in \mathrm{M}([K:\mathbf{Q}]/2,\ \mathbf{Q}(\zeta_p^m))$ $(m \geq 0)$ が定義されて, 次の命題が成り立つ.

Proposition 6.1. K の導手が d または dp（ただし $(d,p)=1$）であるとき,

$$\det \Delta(K,\ell,m) = \frac{(-2)^{[K_m:Q]/2}}{Q_{K_m}\ w_{K_m}} h^-(K_m) \prod_{\chi \in X^-(K_m)} (\ell\ \chi(\ell) - 1) \prod_{q|dp} (1 - \chi(q)).$$

Remark. とくに $\Delta(K,\ell,0) = \Delta(K,\ell)$. 従って $\Delta(K,\ell,m)$ は $\Delta(K,\ell)$ を $\mathbf{Z}_p$-拡大の方向へ, 大きさを変えずに持ち上げていったものとみなせる.（詳細は ［T4］ 参照）

References

[C-O] L.Carlitz and F.R.Olson, Maillet's determinant, Proc. Amer. Math. Soc., **6** (1955), 265-269.

[D] K.Dohmae, Demjanenko's matrix for imaginary abelian fields of odd conductors, Proc. Japan Acad. **70**(A) (1994), 292-294.

[F-Z] H.G.Folz and H.G.Zimmer, What is the rank of the Demjanenko matrix?, J. Symb. Comp., **4** (1987), 53-67.

[Ha] F.Hazama, Demjanenko matrix, class number, and Hodge group, J. Number Thoery, **34** (1990), 174-177.

[Hi] M.Hirabayashi, Relative class number formulae of an imaginary cyclic field by means of Maillet determinant and Demjanenko matrix, preprint.

[G] K.Girstmair, The relative class numbers of imaginary cyclotomic fields of degrees 4,6,8,and 10, Math. Comp., **61** (1993), 881-887.

[S-Sch] J.W.Sands and W.Schwarz, A Demjanenko matrix for abelian fields of prime power conductor, J. Number Theory **52** (1995), 85-97.

[T1] H.Tsumura, On p-adic interpolation of the generalized Euler numbers and its applications, Tokyo J. Math., **10** (1987), 281-293.

[T2] H.Tsumura, On Demjanenko's matrix and Maillet's determinant for imaginary abelian number fields, J. Number Theory, to appear.

[T3] H.Tsumura, On a direct sum decomposition of the Demjanenko matrix, preprint, in submitting.

[T4] H.Tsumura, On the Demjanenko matrix associated to the cyclotomic $\mathbf{Z}_p$-extension, preprint.

[W] L.C.Washington, Introduction to cyclotomic fields, Springer-Verlag, New-York (1982).