数理解析研究所講究録
971 巻 1996 年 78-89

ある種の実アーベル体の岩澤 λ -不変量について

横浜市立大・市村文男 (Humio Ichimura)
東大数理科学・隅田浩樹 (Hiroki Sumida)

§1 Introduction

kを有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の有限次拡大体、p を素数、Kを kの $\mathbb{Z}_p$-拡大とする。k_nを K/kの n 番目の中間体、A_nを k_nのイデアル類群の p-part とする。A_nの位数に関して、次の定理が知られている。

定理 (岩澤 [I2]). $\lambda = \lambda_p(K/k)$, $\mu = \mu_p(K/k)$(いずれも 0 以上の整数), $\nu = \nu_p(K/k)$(整数) の 3 つの不変量が存在して、十分大きな n に対し

$$\sharp A_n = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu}$$

が成立する。

最も基本的な $\mathbb{Z}_p$-拡大として、円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大 k_∞がある。簡単のため、$\lambda_p(k)=\lambda_p(k_\infty/k)$ 、$\mu_p(k)=\mu_p(k_\infty/k)=0$ と書くことにする。この時、全ての (k,p) の組に対して、$\mu_p(k)=0$ となることが予想されている。実際、kが $\mathbb{Q}$ 上アーベル拡大であるときには、この予想は Ferrero 氏-Washington 氏によって証明されている ([**FW**]) 。

一方、λ-不変量に関しては、次の予想がある。

<u>Greenberg 予想 (p,k)</u>. kが総実であるとき、全ての素数 p に対し、$\lambda_p(k)=0$ であろう。

この予想は、1973 年 [**I2**,p.316] において岩澤氏により問題として挙げられ、更に、Greenberg 氏 [**Gr**] や Candiotti 氏 [**C**] らにより、各 k, p に対する予想の (必要) 十分条件が与えられ、実際に予想が成立する自明でない例が示された。さらにその後、福田氏、小松氏、和田氏、田谷氏らがこの予想の明確な判定条件を与え、それを用いて判別式の “小さい” 多くの実 2 次体 kで$\lambda_3(k)=0$ であることを確かめられていた。しかし、これらの判定法は k_nの単数群 E_nの言葉で記述されていて、高次の単数群を必要とする場合は、計算上困難であった。例えば、$k=\mathbb{Q}(\sqrt{254})$ 、$\mathbb{Q}(\sqrt{473})$ では、少なくとも $E_5(!)$ のデータが必要 (福田氏による) であり、予想の成立が確かめられていなかった。

小論では、ある種の $\mathbb{Q}$ 上の実アーベル体に対する予想の必

要十分条件を、円単数、p 進 L 関数、更にある条件を満たす素数達を用いて、簡明な形で与える。この条件は、各 k, p に対する予想が成立するかどうかを確かめる上でも有効である。実際、この判定条件を用いて、先に述べた 2 つの例を含め、実 2 次体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ 、$1 < m < 10^4$ に対して、$\lambda_3(k) = 0$ を全て確かめることができた。

なおほぼ同時期に、Kraft 氏-Schoof 氏 [**KS**] 、栗原氏 [**K**] らにより、同様に有効な判定条件が独立に与えられ、それを用いて $\lambda_p(k) = 0$ となる新しい例が得られている。

§2 定理

$k/\mathbb{Q}$:実アーベル体、p:奇素数、k_n:k_∞/kの n 番目の中間体、A_n:k_nのイデアル類群の p-part 、$A_\infty = \varprojlim A_n$(射影極限はノルム写像による) とする。以下、技術的な理由 (有理整数内の計算で済ませられる) により、次の仮定をする。

(仮定)　　$\Delta = \mathrm{Gal}(k/\mathbb{Q})$ の exponent は $p-1$ を割る。

p と kに対する Greenberg 予想をΔ分解により精密に調べることにする。χをΔの 1 次の指標とすると、仮定から p 進体 $\mathbb{Q}_p$-値と見なすことができる。そこでχの巾等元を $e_\chi \in \mathbb{Z}_p[\Delta]$ とし、$A_\infty(\chi) = e_\chi A_\infty$とおく。$f_\chi$を$\chi$の conductor 、$q = l.c.m(f_\chi, p)$ μ_pを 1 の p 乗根のなす群とし、γ_0をGal$(k_\infty(\mu_p)/k(\mu_p))$ の位相生成元で、任意の 1 の p^n乗根ζに対し$\zeta^{\gamma_0} = \zeta^{1+q}$となるも

のとする。$A_\infty(\chi)\otimes\mathbb{Q}_p$は、$\mathbb{Q}_p$上有限次線形空間になることが知られている。そこで$\mathrm{char}\,A_\infty(\chi)$により、$A_\infty(\chi)\otimes\mathbb{Q}_p$における$T=\gamma_0-1$の作用に対する特性多項式を表し、$\lambda_\chi$を$\mathrm{char}\,A_\infty(\chi)$の次数とする。$(p,\chi)$に対するGreenberg予想とは、Ferrero-Washingtonの定理から次を意味する。

<u>Greenberg予想 (p,χ)</u> $\lambda_\chi=0$　即ち、　$\mathrm{char}\,A_\infty(\chi)=1$。

この予想を次の3つの場合に分けて考える。　(A) $\chi(p)\neq 1$ かつ$\chi^{-1}\omega(p)\neq 1$、(B) $\chi^{-1}\omega(p)=1$、(C) $\chi(p)=1$。この場合分けは、それぞれ局所単数群の構造が異なっていることによる。

λ_χ、$\mathrm{char}\,A_\infty(\chi)$には、Mazur氏-Wiles氏[**MW**]により証明された岩澤主予想から得られる上界が存在する。以下、その上界を説明する。$g_\chi(T)$をp進L関数$L_p(s,\chi)$に対応する形式的巾級数$(g_\chi((1+q)^{1-s}-1)=L_p(s,\chi))$とする。Ferrero-Washingtonの定理とp進Weierstrass準備定理から、$g_\chi(T)=P_\chi(T)u_\chi(T)$ ($P_\chi(T)$:distinguished polynomial, $u_\chi(T)$:$\mathbb{Z}_p[[T]]$の単数)と一意的に書ける。(B)の場合、$L_p(s,\chi)$は自明な零点を持つため、$T-q$は$P_\chi(T)$を割る。そこで、(A)(C)の場合、$\tilde{P}_\chi(T)=P_\chi(T)$、(B)の場合、$\tilde{P}_\chi(T)=P_\chi(T)/(T-q)$とおく。Mazur-Wilesの定理(と因子$T-q$に関する議論((B)の場合))から、次の上界が得られる。

(上界)　　$\lambda_\chi\leq\deg\tilde{P}_\chi(T),\quad \mathrm{char}\,A_\infty(\chi)\mid\tilde{P}_\chi(T)$。

ここで、$\tilde{P}_\chi(T) = \prod_{i=1}^{r} P_i(T)^{e_i} (e_i \geq 1)$ と素因子分解し、各 i 、n に対して、自然数 $a_{i,n}$、多項式 $Y_{i,n}(T) \in \mathbb{Z}[T]$ 、円単数 $c_{i,n}$を以下のように定義する。(k_n, p に対する Leopoldt 予想が成立することから、$a_{i,n} < \infty$ となる ([**B**]) 。)

<u>定義1</u>. $\omega_n(T) = (1+T)^{p^n} - 1$, $\nu_n = \omega_n/\omega_0$とおく。

$$p^{a_{i,n}} = \begin{cases} \mathbb{Z}_p[[T]]/(\omega_n, P_i) \text{ の } exponent \cdots (A)(B) \\ \mathbb{Z}_p[[T]]/(\nu_n, P_i) \text{ の } exponent \cdots\cdots (C) \text{ 。} \end{cases}$$

$$P_i(T) Y_{i,n}(T) \equiv p^{a_{i,n}} \bmod \begin{cases} \omega_n \cdots (A)(B) \\ \nu_n \cdots\cdots (C) \text{ 。} \end{cases}$$

<u>定義2</u>. $\mathbf{e}_{i,n} \in \mathbb{Z}[\Delta]$ $s.t.$ $\mathbf{e}_{i,n} \equiv e_\chi \bmod p^{a_{i,n}}$かつ係数和が零。$f_n : k_n$の *conductor* 、$\zeta_{f_n}$: 1 の原始 f_n乗根、$t : p$ 上の kの素イデアルによる剰余体の位数とおく。

$$c_{i,n} = N_{\mathbb{Q}(\mu_{f_n})/k_n} (1 - \zeta_{f_n})^{(t-1)\mathbf{e}_{i,n}} \text{。}$$

<u>定理</u>. 記号および設定は、以上の通りとする。

$$P_i(T) \nmid \operatorname{char} A_\infty(\chi) \iff (c_{i,n})^{Y_{i,n}(T)} \notin (k_n)^{\times p^{a_{i,n}}} \quad \exists n \geq 0 \text{ 。}$$

特に全ての i で右辺が成立すれば、$\lambda_\chi = 0$ である。

<u>系</u>.

$$P_i(T) \nmid \operatorname{char} A_\infty(\chi) \iff (c_{i,n})^{Y_{i,n}(T)} \bmod \mathfrak{L} \notin (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{\times p^{a_{i,n}}} \quad \exists n \geq 0 \text{ 。}$$

$\mathfrak{L}$ は $\mathbb{Q}(\mu_{f_n})$ の 1 次の素イデアル、$l = \mathfrak{L} \cap \mathbb{Q}$ 。

注意. (A)(B) の場合、$n=0$ では定理の右辺は $v_p(\sharp A_0(\chi)) < v_p(P_i(0))$ と同値である。(C) の場合、$n=0$ では定理の右辺は成立しない。

定理、系の右辺をそれぞれ

$$(\mathrm{H}_{i,n}) \qquad (c_{i,n})^{Y_{i,n}(T)} \notin (k_n^{\times})^{p^{a_{i,n}}},$$

$$(\mathrm{H}_{i,n,l}) \qquad (c_{i,n})^{Y_{i,n}(T)} \bmod \mathfrak{L} \notin ((\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{\times})^{p^{a_{i,n}}} \quad \text{for some } \mathfrak{L} \mid l$$

とおく。$(\mathrm{H}_{i,n})$ が成立するとき、$(\mathrm{H}_{i,n+1})$ も成立することが示される。

円単数 $c_{i,n}$, 多項式 $Y_{i,n}(T)$, 自然数 $a_{i,n}$は、実際に計算可能な明確な元であることに注意する。そのため系の右辺は、素数 l(f_nを法として 1 と合同) と有限体 $\mathbb{F}_l$の原始根を求めることにより各 lごとに整数計算でその正否を確かめられる有効な判定条件となっている。

§3 数値例

定理 (または系) の判定条件を用いて、$p=3$ 、実 2 次体 $k=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ $(1<m<10^4$、m:square-free) の Greenberg 予

想を調べた。個数は、それぞれ (A)3041 (B)762 (C)2279 である。

実2次体 kに対して、それぞれ次のような手順で予想の成立を確かめた。(A)(B) の場合、まず $n=0$ 、各 i に対して、注意で述べた $v_p(\sharp A_0(\chi)) < v_p(P_i(0))$ が成立するかどうかを調べる。ある i で成立しなかった場合、あるいは (C) の場合、$n=1$ で $l \equiv 1 \bmod l.c.m.(p^{a_{i,n}}, f_n)$ となる最初の 7 個の素数 lのいずれかで§2 の $(\mathrm{H}_{i,n,l})$ が成立するかどうかを調べる。成立しなかった場合、さらに $n=2$ 、残った i で$\cdots$ と続けていく。

この手順によって全ての i について定理(または系)の右辺の成立が確認される最小の n を $n_0 = n_0(k)$ とする。(A)(B)(C) それぞれの場合に、$n_0 = 0, 1, 2, 3, \cdots$となる体の m の値を$\tilde{P}_\chi(T)$ が既約であるか可約であるかに分けて表にまとめた。ただし、(A)(B)(resp. (C)) の場合、$\tilde{P}_\chi(T)$ が既約かつ $n_0 = 0$(resp. 1) となるものについては、個数を#の後に記している。また、(λ^*) は $\deg \tilde{P}_\chi(T)$ を表している。

Table A1: Irreducible case.

$[n_0]$				(λ^*)	m				
[0]	(0)	#1966	(1)	#587	(2)	#189	(3)	#56	
	(4)	#14							
[1]	(1)	659	761	786	839	894	1091	1101	1191
	1229	1373	1523	1787	1847	1907	1929	2118	2207
	2213	2298	2459	2505	2543	2703	2993	3035	3054
	3062	3221	3261	3281	3602	3719	3873	4106	4193
	4649	4670	4706	4755	4886	4934	4994	5099	5102
	5261	5333	5621	5637	5738	5799	6053	6311	6623
	6686	6782	6807	6809	7058	7226	7259	7262	7319
	7374	7473	7673	7721	7743	7994	8051	8255	8267
	8373	8426	8447	8519	8597	9149	9215	9218	9219
	9278	9293	9413	9419	9467	9551	9902	(2)	1211
	2831	2981	3071	3173	3287	3482	3590	4001	4355
	4367	4853	4982	5042	5255	5798	5918	5930	6401
	6770	6887	7055	7235	7694	8057	8306	8603	8769
	8789	9086	9479	9710	9833	9869	9905	(3)	1406
	3803	4841	8274	8285	9155	(4)	2177	4970	7014
	7019	8999	9830	(6)	5331				
[2]	(1)	443	1758	3594	4098	4215	4238	4481	4511
	4907	5619	5898	6366	7643	7709	7883	8363	8418
	8837	9507	(2)	5529	6995	8742	(3)	3305	5063
	(4)	1937							
[3]	(1)	785	899	2429	2510	3158	3569	4286	7598
	7601	8282	9995	(3)	8711				
[4]	(1)	2666	3047	3846	5081	5297	7658	9590	
[5]	(1)	254	473	1646	6798	6806	7671		
[6]	(1)	9606							

Table A2: Reducible case.

$[n_0]$				(λ^*)	m				
[0]	(2)	2507	3918	3989	4197	5021	5606	6563	8310
	8465	8555	8994	9165	9326	9777	(3)	878	2658
	4241	4427	4526	4661	4737	5690	5993	6141	6254
	7367	9854	(4)	7097	8870				
[1]	(2)	4778	9659	9323	(3)	2099	3023	4409	9998
	(4)	4151							
[2]	(2)	2918	9578	9813	(3)	2021			
[3]	(2)	8339							
[4]	(3)	9926							

Table B1: Irreducible case.

$[n_0]$	(λ^*) m								
[0]	(0)	#497	(1)	#149	(2)	#48	(3)	#5	
	(4)	#3	(5)	#3	(6)	#1	(7)	#1	
[1]	(1)	321	1086	1509	1527	1806	2139	3579	4011
	4065	4362	5901	6162	6243	6594	6639	6819	6927
	7566	8277	8403	9897	(2)	906	4434	5595	5991
	7107	8655	(3)	3138	7665	8538	8637	(4)	4641
[2]	(1)	3957	7053	8115	9087	9294	9618		
[3]	(1)	4749	5613	6414					

Table B2: Reducible case.

$[n_0]$	(λ^*) m								
[0]	(2)	123	915	1518	4794	5829	7467	(3)	1095
	7197	7719	(4)	7179	8727				
[1]	(2)	8745	(3)	7242	(4)	1599			

Table C1: Irreducible case.

$[n_0]$	(λ^*) m								
[1]	(0)	#1444	(1)	#393	(2)	#178	(3)	#36	
	(4)	#15	(5)	#4	(8)	#1			
[2]	(1)	67	106	238	253	454	505	607	610
	787	886	994	1102	1129	1294	1318	1333	1462
	1654	1669	1753	1810	1867	1894	1954	2158	2221
	2371	2410	2419	2515	2521	2593	2737	2743	2971
	3190	3199	3226	3235	3277	3571	3673	3781	3895
	3979	3997	4207	4210	4237	4471	4498	4519	4603
	4615	4618	4651	4681	4711	4867	4870	4954	4963
	5083	5113	5149	5182	5494	5617	5647	5749	5902
	6001	6238	6355	6403	6502	6691	6730	6907	7051
	7078	7294	7387	7522	7603	7621	7633	7639	7711
	7906	7951	8011	8095	8203	8245	8365	8422	8545
	8599	8626	8755	8785	8809	8821	8863	9019	9034
	9103	9115	9145	9202	9463	9754	9766	(2)	2122
	3469	4099	4447	7246	7315	7753	8137	5530	(3)
	6187	9427							
[3]	(1)	295	397	745	1390	2029	2701	2713	3133
	4654	5062	5185	6169	6202	6271	6286	6871	6934
	6955	7957	7969	8017	8155	8569	8782	8965	9058
	9895								
[4]	(1)	3490	4081	7309	7321	7582	9274	9679	
[5]	(1)	1738	2149	3739	4789	5938	8101		
[6]	(1)	2059							
[8]	(1)	9814							

Table C2: Reducible case.

$[n_0]$	(λ^*) m								
[1]	(2)	634	1546	3934	6421	6565	6922	7858	8443
	8665	8761	8974	9745	9811	9982	(3)	733	1951
	2914	3958	3973	4729	6751	7438	8413	8581	9799
	(4)	4162	6817	7630	(6)	4855	(8)	5098	
[2]	(2)	2659	(3)	5611	5971	8374	(4)	9790	
[3]	(2)	6559	9634	(3)	7006	(4)	1714		
[4]	(3)	2917							
[6]	(3)	7726							

§4 定理の説明

簡単のため、(A) の場合に限って説明する。k_∞の最大 p-分岐アーベル p-拡大を Mとすると、岩澤主予想によって、$\mathrm{Gal}(M/k_\infty)$ のχ-part の特性多項式は $P_\chi(T)$ となる。ここで、類体論から、この拡大における惰性群の合成と (p 上の素点の局所単数群)/(単数群の閉包) の構造が結び付けられる。一方、岩澤 ([**I1**]) 、Gillard([**Gi**]) によって、(局所単数群)/(円単数群) の $\mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(k_\infty/k)]]$- 加群の構造が岩澤多項式を用いて表されている。この結果を用いて、円単数 $c_{i,n}$と多項式 $Y_{i,n}(T)$ により、(局所単数群)/(単数群) のχ-part の特性多項式が $P_i(T)^{e_i}$ できっかり割れる条件を表したのが§2 の $(\mathrm{H}_{i,n})$ たちである。なお系は、Chebotarev の密度定理を用いて得られる。

(B)(C) の場合にも同様な方針で、判定条件を得ることができる。

References

[B] A. Brumer, *On the units of algebraic number fields*, Mathematika **14** (1967), 121–124.

[C] A. Candiotti, *Computations of Iwasawa invariants and* K_2, Compositio Math. **29** (1974), 89–111.

[FW] B. Ferrero and L. Washington, *The Iwasawa invariant* μ_p *vanishes for abelian number fields*, Ann. of Math. **109** (1979), 377–395.

[Gi] R. Gillard, *Unités cyclotomiques, unités semi locales et* $\mathbb{Z}_l$*-extensions II*, Ann. Inst. Fourier **29** (1979), 1–15.

[Gr] R. Greenberg, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. **98** (1976), 263–284.

[I1] K. Iwasawa, *On some modules in the theory of cyclotomic fields*, J. Math. Soc. Japan **16** (1964), 42–82.

[I2] K. Iwasawa, *On* $\mathbb{Z}_l$*-extensions of algebraic number fields* Ann. of Math. **98** (1973), 246–326.

[KS] J.S.Kraft and R. Schoof, *Computing Iwasawa modules of real quadratic number fields*, Compositio Math. **97** (1995), 135–155.

[K] M. Kurihara, *The Iwasawa* λ *invariants of real abelian fields and the cyclotomic elements*, preprint (1995).

[MW] B. Mazur and A. Wiles, *Class fields of abelian extensions of* $\mathbb{Q}$, Invent. Math. **76** (1984), 179–330.