

2次元乱流における小さなスケールの統計

名工大 高橋 博文 (Hirofumi Takahashi)

名工大 後藤 俊幸 (Toshiyuki Gotoh)

1 Introduction

Batchelor (1969) [1] はエンストロフィー散逸の有限性

$$\eta(t) = -\frac{d\Omega(t)}{dt} > 0, \quad \text{as } \nu \rightarrow 0, \quad (1)$$

$$\Omega(t) = \frac{1}{2} \langle |\omega(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle \quad (2)$$

を二次元乱流の大前提として採用した。 η と ν を独立パラメータとして三次元乱流に対する Kolmogorov 理論と同様の次元解析によって高波数領域 $k \gg k_0$, ($k_0 = L^{-1}$) でのエンストロフィースペクトルのスケージング則

$$\Omega(k) = \nu^{1/2} \eta^{1/2} f(k/k_d), \quad k_d = \eta^{1/6} \nu^{-1/2} \quad (3)$$

を導いた。ここで f はある無次元関数、 L はエネルギーインプットのスケールである。レイノルズ数がきわめて大きい場合、 $k_0 \ll k \ll k_d$ では粘性率 ν の影響を受けない。したがって (3) 式は

$$\Omega(k) = C \nu^{2/3} k^{-1} \quad (4)$$

となる。ここで C は無次元定数である。 $E(k) = k^{-2} \Omega(k)$ より

$$E(k) = C \eta^{2/3} k^{-3} \quad (5)$$

となり、二次元乱流の慣性領域スペクトル $E(k) \propto k^{-3}$ が得られる。これと同じスペクトル形はすでに、 Kraichnan (1967) [2] と Leith (1968) [3] によって、同様の推論に基づいて導かれている。後に Kraichnan (1971) [4] は $[\ln(k/k_0)]^{-1/3}$ の補正を行なった。

しかし、今までの数値計算では $E(k) \propto k^{-(3+\delta)}$, ($\delta > 0$) という結果である。例えば、 Brachet *et al.* (1988) [5] は減衰乱流ではあるが解像度 $N = 2048$ (Symmetric) において時間の経過とともに $\delta = 1 \rightarrow -0.2$ となることを報告している。また Borue (1993) [6] は $N = 4096$ の計算を行なっているが、残念ながら δ は測定されていない。今回、この δ の値と遠散逸領域スペクトル $E(k) \propto \exp\{-c(k/k_d)\}$ の c 、そしてエンストロフィー散逸スペクトル $E_\eta(k) \propto k^{-\alpha}$ の α の値を検証する。

エネルギースペクトルは場の二次モーメントの情報を与えるのみである。空間内に強い散逸領域が集中して存在する場合には、低次モーメントだけではその統計的性質をとらえることは難しい。近年、その散逸のゆらぎと関連して間欠性の問題がクローズアップされてきている。これを調べるのにこれまで、 ω や $\nabla \omega$, $\delta \omega_r$ といった量の分布関数やモーメントが調べられてきた。しかし、乱流の動力学的性質を知るにはこれらの量を作り出すメカニズムとその統計的性質を知ることが必要である。

二次元の渦度方程式は、

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega, \quad \left(\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \quad (6)$$

と表される。また (6) 式の grad をとった渦度勾配の式

$$\frac{D\omega_i}{Dt} = -u_{l,i}\omega_{,l} + \nu\nabla^2\omega_i, \quad \left(u_{l,i} = \frac{\partial u_l}{\partial x_i}, \omega_{,i} = \frac{\partial\omega}{\partial x_i}\right) \quad (7)$$

と、二点での ω の差 $\delta\omega$ の式は

$$\frac{\partial\delta\omega_r}{\partial t} + \left\{ (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla_1) + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla_2) \right\} \delta\omega_r = \nu(\nabla_1^2 + \nabla_2^2)\delta\omega_r, \quad (8)$$

$$\delta\omega_r = \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \omega(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{r}$$

となる。動力学の結果としての場の統計性を $\omega, \nabla\omega, \delta\omega_r$ の pdf により、またこれらを生み出す原因となる場 (すなわち右辺) の統計的性質、条件付平均 $\langle \nabla^2\omega|\omega \rangle$ 等について調べる。これらは、各物理量 (X とする) に対する分布関数 $P(X, t)$ の閉じた方程式を与えるのに必要な量となる。例えば、

$$\frac{\partial P(\omega, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\omega} \left\{ \left(\frac{D\omega}{Dt} \right)_\omega P \right\} = 0 \quad (9)$$

は、

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\omega} \left\{ \nu \langle \nabla^2\omega|\omega \rangle P \right\} = 0 \quad (10)$$

となる。今のところ $\langle \nabla^2\omega|\omega \rangle$ を基礎方程式から導く理論はできていない。そこで $\langle \nabla^2\omega|\omega \rangle$ が数値的にわかれば P の時間発展の様子もわかる。この意味で、(6) 式から (8) 式までの右辺の条件付平均を求めることは重要である。

本研究では二次元一様等方性定常乱流の直接数値計算を行い、二次元乱流におけるスペクトルのスケールリング則を検証し、また Navier-Stokes 方程式等の各項に関する統計を調べる。

2 Numerical simulation

速度場は低波数での forcing による一様等方性定常乱流であり、Forcing は渦度に対して和の形で F_ω が入っている。また、二次元に特有なエネルギーの逆カスケードを抑えるために drag term $d\nabla^{-2}\omega$ が加わっている。

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial y} = F_\omega + d\nabla^{-2}\omega + \nu\nabla^2\omega, \quad (11)$$

$$\nabla^2\psi = -\omega \quad (12)$$

F_ω : Gaussian force ($4 \leq k \leq 6$, white noise in time),

$$d = \begin{cases} c_d, & \text{for } k \leq 3, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\text{初期条件} : \omega(\mathbf{x}) = 0, \quad (t = 0), \quad (13)$$

$$\text{境界条件} : \omega(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x} + 2\mathbf{n}\pi), \quad (14)$$

$$\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x} + 2\mathbf{n}\pi), \quad (\mathbf{n} : \text{integer vector}). \quad (15)$$

本研究で用いた統計量の定義、数値パラメータは次のとおりである。

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle = \int_0^\infty E(k, t) dk \quad : \quad \text{トータルエネルギー}$$

$$\Omega(t) = \frac{1}{2} \langle |\omega(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle = \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk \quad : \quad \text{エンストロフィー}$$

$$\eta(t) = 2\nu \int_0^\infty k^4 E(k, t) dk \quad : \quad \text{エンストロフィー散逸率}$$

$$R_\lambda(t) = \frac{\{\Omega(t)\}^{3/2}}{\eta(t)} \quad : \quad \text{レイノルズ数}$$

$$k_d = \left(\frac{\eta}{\nu^3} \right)^{1/6} \quad : \quad \text{散逸波数}$$

表 1: 数値パラメータ

N: resolution, ν : kinematic viscosity, k_{max} : maximum wavenumber.				
Labels				
Parameters	run1	run2	run3	run4
N	1024	1024	2048	4096
ν	5×10^{-4}	1×10^{-4}	2×10^{-5}	7×10^{-6}
Δt	5.859×10^{-4}	5.859×10^{-4}	2.930×10^{-4}	7.324×10^{-4}
k_{max}	483	483	965	1931
R_λ	19	23	40	59
η	0.27	0.40	0.25	0.16
k_d	36.0	85.7	177	279

3 Results

3.1 スペクトルのスケーリング則

直接数値計算によって得られた二次元定常乱流のエネルギースペクトルを Fig.1.(a) に示す。波数を η でスケーリングしている。これは 100 ステップ毎に得られたスペクトルを重ねて描いてあり、スペクトルの時間的な変化を見ることができる。この図から定常性は良好であることがわかる。

次に、それぞれの R_λ について時間平均をとったエネルギースペクトルを Fig.1.(b) に示す。独立変数を $\bar{\eta}$ でスケーリングしている。この図を用いてスケーリング則を検証する。

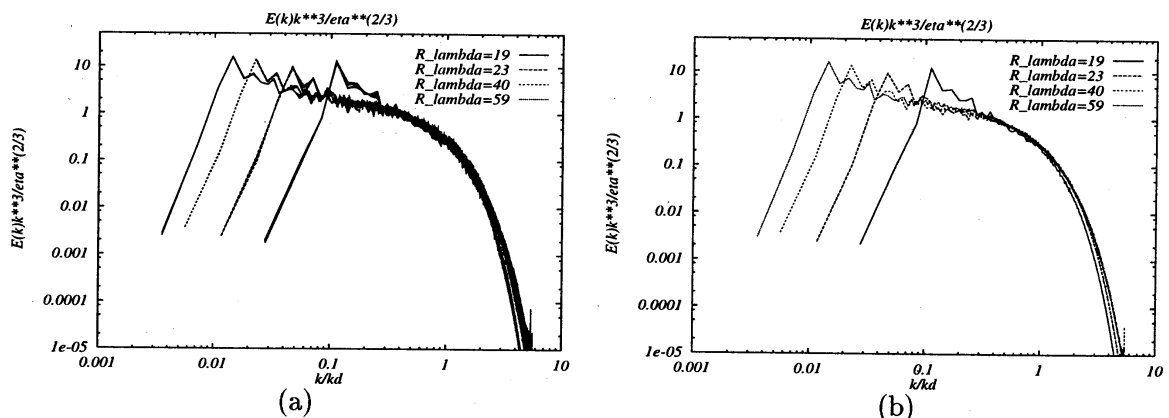


Fig.1.(a) スケーリングされたエネルギースペクトル: $\eta^{-2/3} k^3 E(k)$; 各 R_λ について 100 ステップ毎にプロットした. (b) 時間平均されたエネルギースペクトル: $\bar{\eta}^{-2/3} k^3 E(k)$.

Fig.1.(b)より直線と見られる範囲を慣性領域とみなす。各 R_λ における範囲は表2のとおりである。 $R_\lambda = 19$ においては R_λ が小さいためか慣性領域は見られなかった。

表 2: 慣性領域

R_λ	waveband (k/k_d)
19	測定不可
23	$0.12 \leq k/k_d \leq 0.37$
40	$0.073 \leq k/k_d \leq 0.30$
59	$0.043 \leq k/k_d \leq 0.25$

エネルギースペクトルを次のように仮定して fitting を行った。

$$E(\tilde{k}) = A\tilde{k}^{-\beta} \exp(-c\tilde{k}), \quad \tilde{k} \equiv \frac{k}{k_d}. \quad (16)$$

両辺の対数を取り、慣性領域では $|\ln \tilde{k}| \gg \tilde{k} (\tilde{k} < 1)$, $c = O(1)$ であることを考慮すると

$$\ln E(\tilde{k}) \simeq \ln A - \beta \ln \tilde{k} \quad (17)$$

となる。この β の値を最小二乗法を用いて近似した。それを Fig.2 に示す。Fig.1.(b) からわかるように k/k_d が小さいところではスペクトルの変動が大きいので、それも考慮してエラーバーをつけてある。 R_λ が大きくなるにつれて β は小さくなる傾向があり、また誤差も小さくなる。今回の計算では

$$\beta \approx 3.37, \quad (R_\lambda = 59)$$

を得た。この結果は Eyink [7] の評価

$$E(k) \propto k^{-(3+\delta)}, \quad \delta \leq 2/3$$

を満足する。

今度は遠散逸領域を考える。上で求めた β を使って (16) 式を補正する。

$$k^\beta E(\tilde{k}) = Ak_d^\beta \exp(-c\tilde{k}). \quad (18)$$

両辺の対数をとると

$$\ln(k^\beta E(\tilde{k})) = B - c\tilde{k}, \quad B = \ln(Ak_d^\beta); \text{ constant}. \quad (19)$$

エネルギースペクトルの片対数のグラフを Fig.3 に示す。ここで注意することは η だけでなく、 k^β を $E(k)$ にかけてスケールリングしている点である。この図より、 $2.5 \leq k/k_d \leq 4$ で最小二乗法を用いて c を近似する。その結果が Fig.4 である。 R_λ が大きくなるにつれ c が小さくなる傾向が見られ、 $c \approx 3.4$ が得られた。しかし c は単調に減少していない。それは今回、エネルギースペクトルを (16) 式で定義したが厳密には Fig.3 のスペクトル曲線が直線ではないことに起因している可能性がある。そこで、本来ならばエネルギースペクトルを

$$E(k) \propto \exp\{-c(k/k_d)^\alpha\}, \quad (\alpha \simeq 1 + \epsilon, \epsilon > 0) \quad (20)$$

とすべきかもしれない。

次に局所的なエンストロフィー散逸率を

$$\eta(\mathbf{x}) \equiv \nu (\nabla \times \omega)^2 \quad (21)$$

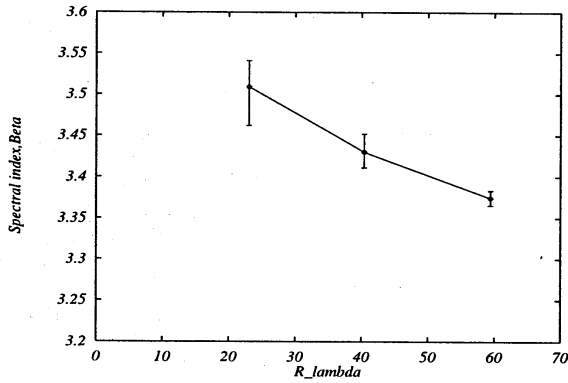


Fig.2 慣性領域スペクトル: $E(k) \propto k^{-\beta}$ のべき指数 β .

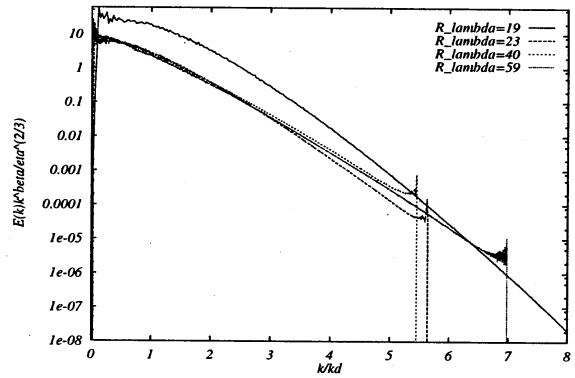


Fig.3 片対数表示されたエネルギースペクトル: $\eta^{-2/3} k^\beta E(k)$.

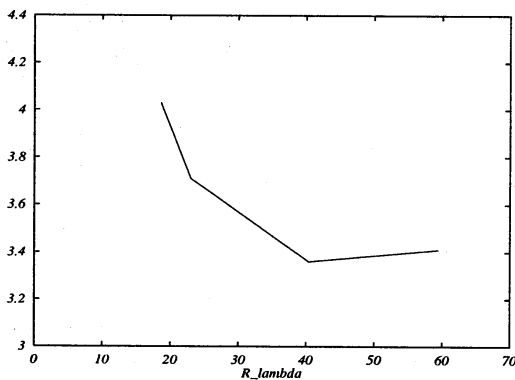


Fig.4 遠散逸領域スペクトル: $E(k) \propto \exp\{-c(k/k_d)\}$ の c .

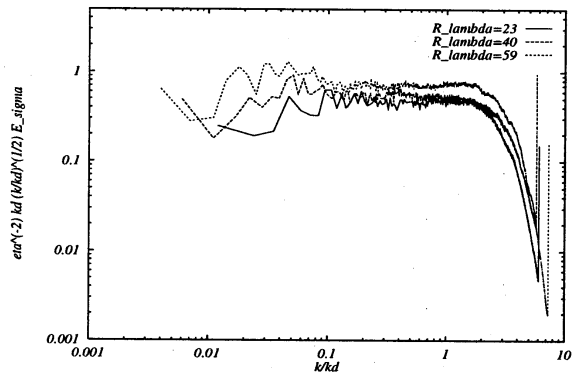


Fig.5 スケーリングされたエントロピー散逸スペクトル: $\eta^{-2} k_d (k/k_d)^{1/2} E_\eta(k)$.

と定義すると、エントロピー散逸スペクトルは

$$E_\eta(k) = \frac{1}{2} \sum_{k-\frac{1}{2} < |\mathbf{k}| < k+\frac{1}{2}} |\eta(\mathbf{k})|^2, \tag{22}$$

$$\eta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \eta(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \tag{23}$$

となる。これを Fig.5 に示す。ここでも R_λ ごとの時間平均をとり、 \bar{k}_d を用いてスケールしてある。エントロピー散逸スペクトルを次のように定義する。

$$E_\eta(k) \propto k^{-\alpha}. \tag{24}$$

Brachet *et al.* [5] は慣性領域で $\alpha \approx 0.5$ としている。今回 $R_\lambda = 59$ において $\alpha \approx 0.5$ は $0.1 \leq k/k_d \leq 1$ で見られたが、それは実際の慣性領域ではない。表 2 における慣性領域では $\alpha > 0.5$ と見受けられる。

3.2 方程式に関する統計

3.2.1 渦度方程式

渦度方程式は次のとおりである。

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega, \quad \left(\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right). \quad (25)$$

渦度 ω の pdf を Fig.6 に示す。渦度は Gauss 分布である。これは、外力が Gaussian であることと二次元の渦度方程式が $\nu \rightarrow 0$ の極限で渦度を保存することによる。また、 R_λ 依存性は見られない。一方、 $\nabla^2 \omega$ の pdf は Fig.7 に示されるとおり、正負対称であるが Gauss 分布から大きく外れる。これは $\nabla^2 \omega$ の乱れの不活発なところがほとんどで、活発なところがごく稀にあるということの意味しており、乱流場の中でスモールスケールが間欠的な分布を持つことを示している。これ以後、間欠性は分布関数の Gaussian からのずれを意味するものとする。そして漸近的に stretched exponential form $P(\nabla^2 \omega) \propto \exp(-c|\omega/\sigma_\omega|^\gamma)$, $0 < \gamma < 1$ と書ける。ここに、 c は無次元定数である。また R_λ が大きくなるにつれて、間欠性が強くなる。

次に ω への射影である条件付平均 $\langle \nabla^2 \omega | \omega \rangle$ を Fig.8 に示す。原点近くでは直線性が良いが、その外側ではサンプル数が少ないためか R_λ 依存性や $|\omega|$ が大きいところでの $\langle \nabla^2 \omega | \omega \rangle$ のふるまいなどは判断できない。一方、乱流場と同じエネルギースペクトルを持つ Gaussian field については ω の pdf (Fig.9)、 $\nabla^2 \omega$ の pdf (Fig.10) とともに期待されるように Gauss 分布に従っている。また ω が結合 Gaussian なので条件付平均 (Fig.11) は $\langle \nabla^2 \omega | \omega \rangle \propto -\omega$ となる。

3.2.2 渦度勾配の方程式

渦度勾配の方程式とは次の式のことである。

$$\frac{D\omega_{,i}}{Dt} = -u_{l,i}\omega_{,l} + \nu \nabla^2 \omega_{,i}, \quad \left(u_{l,i} = \frac{\partial u_l}{\partial x_i}, \omega_{,i} = \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right). \quad (26)$$

二次元乱流では渦度勾配は x, y の 2 成分あるのだが、本数値実験は等方性乱流なので x 成分のみを考える。渦度勾配 $\omega_{,x}$ ($\equiv \frac{\partial \omega}{\partial x}$) の pdf を Fig.12 に示す。正負対称だが、Gauss 分布からのずれが大きく、スカート状に広がっていて間欠性が見られる。Fig.13 の $\nabla^2 \omega_{,x}$ の pdf は、 $P(\omega_{,x})$ より R_λ 依存性が大きく、間欠性もより強い。条件付平均 (Fig.14) は 3 次関数 $-\omega^3$ に近いと見受けられるが定かではない。 $u_{l,i}\omega_{,l}$ の項についても考える。Fig.15 は $R_\lambda = 59$ における条件付平均であるが、これが 2 次関数的なのかはまだわかっていない。

3.2.3 $\delta\omega_r$ の方程式

$\delta\omega_r$ の渦度方程式は次のとおりである。

$$\frac{\partial \delta\omega_r}{\partial t} + \left\{ (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla_1) + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla_2) \right\} \delta\omega_r = \nu (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) \delta\omega_r, \quad (27)$$

$$\delta\omega_r = \omega(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \omega(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{r}.$$

ここでも $\delta\omega_r$ は x 方向のみを考えている。 $R_\lambda = 59$ における $\delta\omega_r, \nabla^2 \delta\omega_r$ の pdf をそれぞれ Fig.16, Fig.17 に示す。共に r 依存性があり、 $P(\delta\omega_r)$ は r が大きくなると Gauss 分布に近くなる。これはある程度遠い二点の $\omega(\mathbf{x})$ は互いに依存性がないことを表し、 $r = \pi/128$, ($l = 9$) で Gauss 分布になっていた。 r の増大とともに $P(\nabla^2 \delta\omega_r)$ は間欠性が弱くなるが、非 Gauss 性は依然として残る。次に Fig.18.(a) に条件付平均を示す。 $r \geq \pi/8$, ($l \geq 4$) では直線性が良い。その中で慣性領域にあたる $l = 7, 8, 9$ のものを Fig.18.(b) に示す。 $|\delta\omega_r|/\sigma_{\delta\omega_r} \leq 5$ のところで、おおよそ $\langle \nabla^2 \delta\omega_r | \delta\omega_r \rangle \propto -\delta\omega_r$ であることがわかる。

次に、 $\delta\omega_r$ の pdf を $P(\tilde{x}) \propto \exp\{-\alpha(r)\tilde{x}^{\beta(r)}\}$, $\tilde{x} \equiv \delta\omega_r/\sigma_{\delta\omega_r}$ として fitting を行い、 r と $\alpha(r), \beta(r)$ の関係を Fig.19 に示す。今度は $\delta\omega_r$ のモーメント

$$f_p(r) \equiv \langle |\delta\omega_r|^p \rangle \quad (28)$$

$$\propto r^{\zeta_p}, \quad (p = 1, 2, \dots, 20), \quad (r \text{ が慣性領域内にある場合}) \quad (29)$$

を考える。 $R_\lambda = 59$ での r と $f_p(r)$ の関係を Fig.20 に示す。 図中の一番下の線が $p = 1$ に対応し、 p が増加するに従い順次増加している。 また線分は fitting 前の pdf による計算値を、 点は fitting した後の pdf による値を表す。 慣性領域に相当する $59 \leq r \leq 341$ での fitting した後の点の傾き ζ_p を求め、 p との関係を図.21 に示す。 ζ_p は p が 16 までは単調に増加するが、 それから減少している。 明らかに ζ_p は p の 1 次関数ではない。 これは Gaussian field とは異なる異常スケーリングである。 しかしそれがどのようにして起きるのか、 まだ説明はついていない。

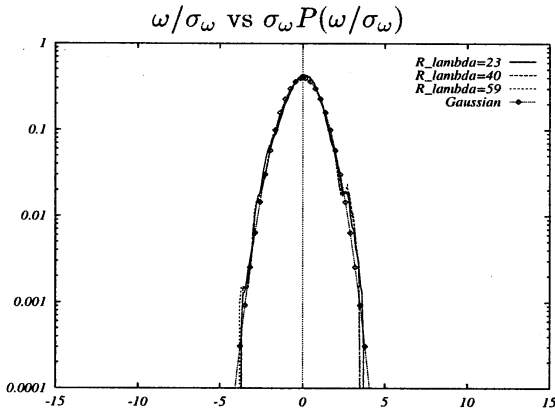


Fig.6 渦度 ω の pdf

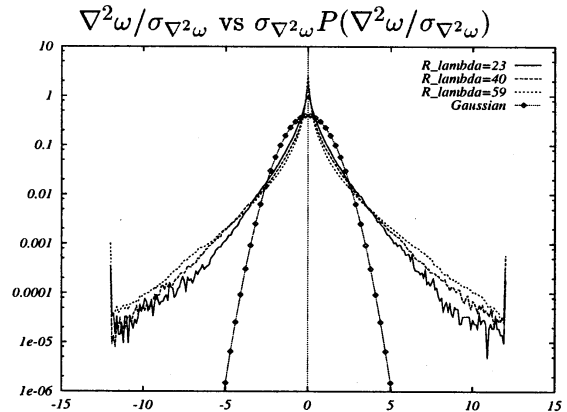


Fig.7 $\nabla^2\omega$ の pdf

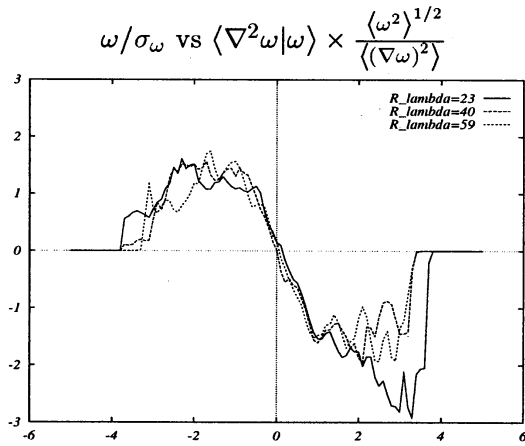


Fig.8 条件付平均: $\langle \nabla^2\omega | \omega \rangle$

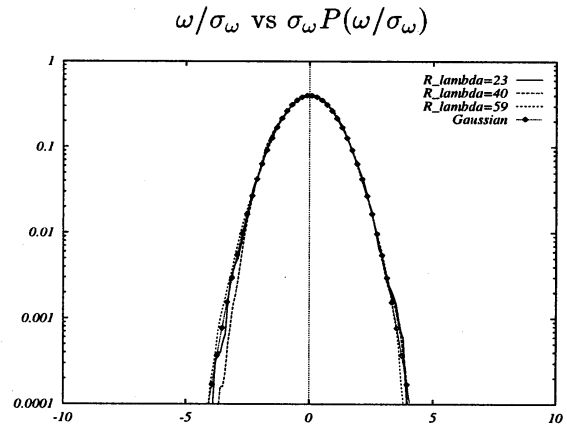


Fig.9 渦度 ω の pdf; Gaussian field

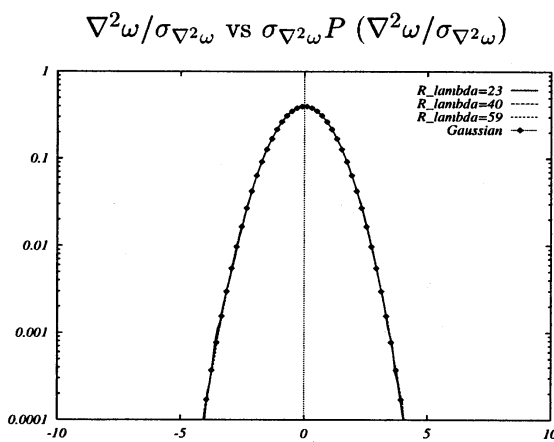


Fig.10 $\nabla^2\omega$ の pdf; Gaussian field

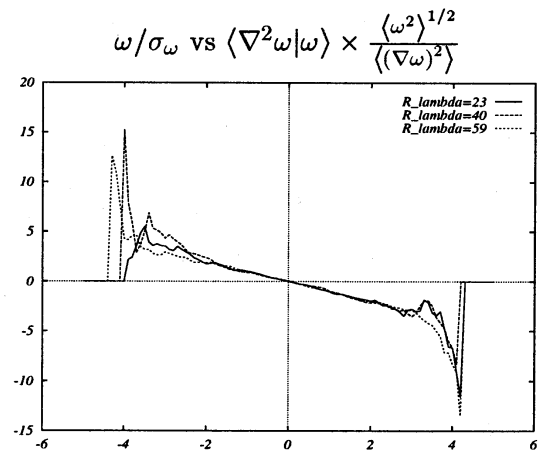


Fig.11 条件付平均: $\langle \nabla^2\omega | \omega \rangle$; Gaussian field

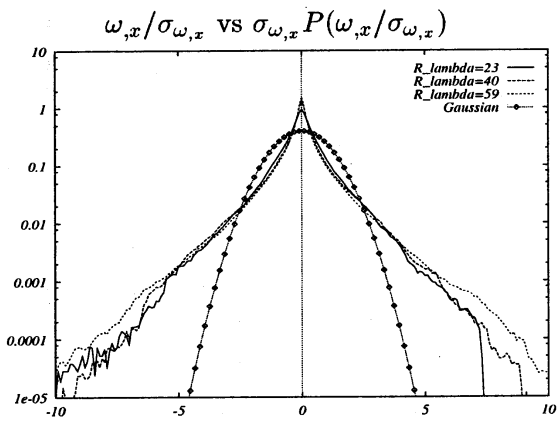


Fig.12 渦度勾配 $\omega_{,x}$ の pdf

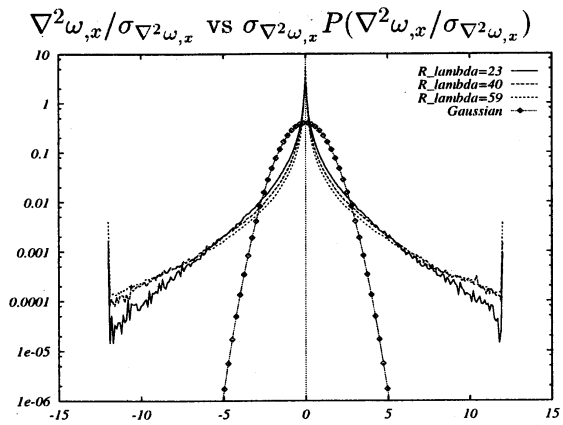


Fig.13 $\nabla^2\omega_{,x}$ の pdf

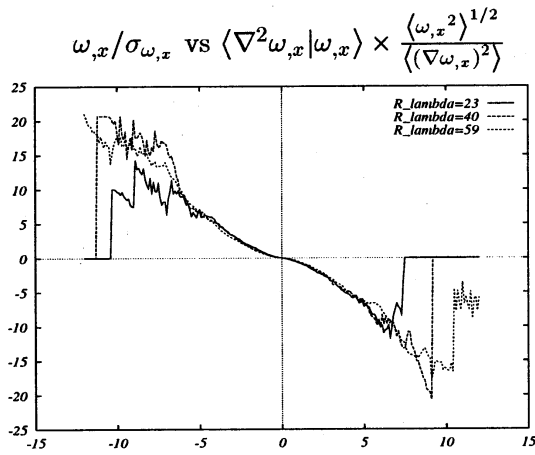


Fig.14 条件付平均: $\langle \nabla^2\omega_{,x} | \omega_{,x} \rangle$

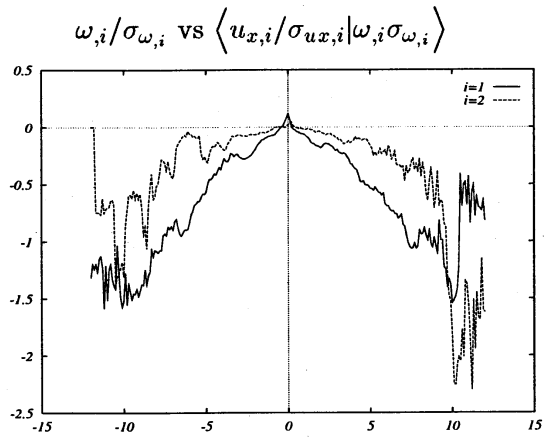


Fig.15 条件付平均: ($R_\lambda = 59$): $\langle u_{x,i} | \omega_{,i} \rangle$
 — ; $i = 1$, - - - ; $i = 2$

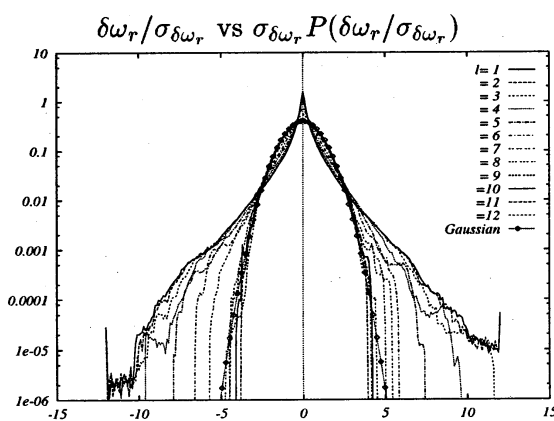


Fig.16 $\delta\omega_r$ pdf ($R_\lambda = 59$); $r = 2^{l-1}$

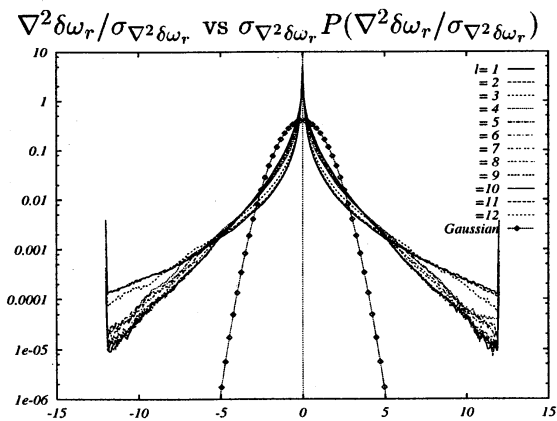


Fig.17 $\nabla^2\delta\omega_r$ の pdf ($R_\lambda = 59$); $r = 2^{l-1}$

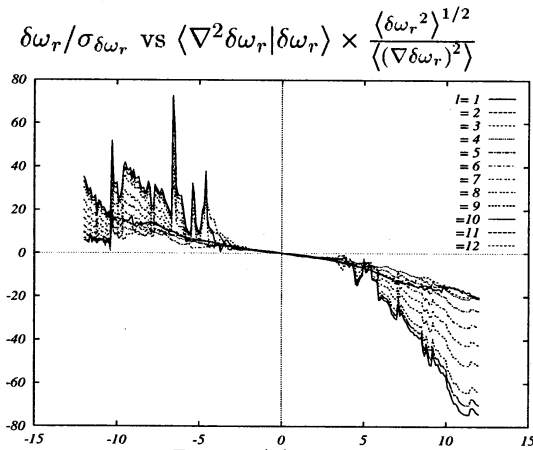


Fig.18.(a)

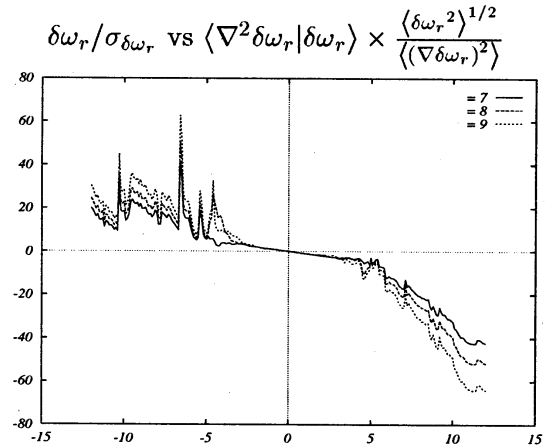


Fig.18.(b)

Fig.18.(a) 条件付平均: $\langle \nabla^2 \delta\omega_r | \delta\omega_r \rangle$ ($R_\lambda = 59$) ; $r = 2^{l-1}$,
 (b) 条件付平均: $\langle \nabla^2 \delta\omega_r | \delta\omega_r \rangle$ ($R_\lambda = 59$) ; $r = 2^{l-1}$ ($l = 7, 8, 9$)

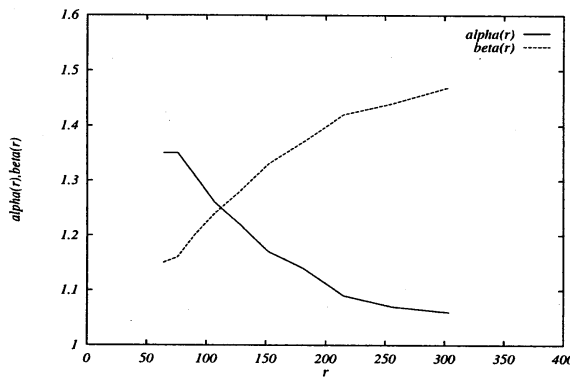


Fig.19 r と $\alpha(r), \beta(r)$ の関係 ($R_\lambda = 59$)

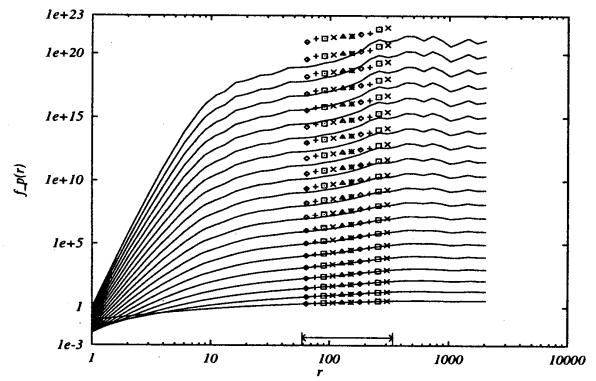


Fig.20 $\delta\omega_r$ のモーメント ($R_\lambda = 59$) :
 $f_p(r) = r^{\zeta_p}$ ($p = 1, 2, \dots, 20$),
 \longleftrightarrow ; 慣性領域

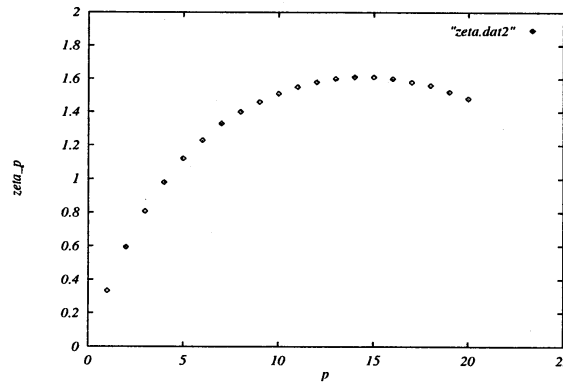


Fig.21 p と ζ_p の関係 ($R_\lambda = 59$)

4 Conclusions

本研究では二次元等方定常乱流を数値計算によって実現し、スペクトルのスケーリング則を検証し、また Navier-Stokes 方程式の各項に関する統計を調べた。

エネルギースペクトルに関しては $R_\lambda = 59$ において慣性領域では $E(k) \sim k^{-(3+\delta)}$, $\delta \approx 0.37$ 、遠散逸領域では $E(k) \sim \exp\{-c(k/k_d)\}$, $c \approx 3.4$ となった。また、エンストロフィー散逸スペクトルのスケーリング則については慣性領域では $E_\eta(k) \sim k^{-\alpha}$, $\alpha > 0.5$ であった。

渦度の統計では $P(\omega)$ は Gaussian に近く今回調べたレイノルズ数では R_λ 依存性は見られなかった。また $P(\nabla^2 \omega)$ は non-Gaussian であり、 R_λ が大きくなるに従い Gaussian からのずれが大きくなった。

渦度勾配の統計については $P(\omega_{,x}), P(\nabla^2 \omega_{,x})$ とともに non-Gaussian であり、 $P(\nabla^2 \omega_{,x})$ は R_λ が大きくなるに従い間欠性が強くなった。

$\delta\omega_r$ の統計では $R_\lambda = 59$ において、 r が大きくなるに従い $P(\delta\omega_r)$ は Gaussian に近くなり、また $P(\delta\omega_r), P(\nabla^2 \omega_r)$ の間欠性は弱くなる。 $\delta\omega_r$ のモーメントにおいては $\langle |\delta\omega_r|^p \rangle = r^{\zeta_p}$, $\zeta_p \neq p$ となる異常スケーリングであるがこれに関しては説明がしていない。これを与える理論を求めることや R_λ がさらに大きくなった時の傾向など今後の課題はまだ多い。

参考文献

- [1] Batchelor, G.K. 1969 *The Physics of Fluids Supplement II*. **12**, 233–239.
- [2] Kraichnan, R.H. 1967 *Phys. Fluids* **10**, 1417–1423.
- [3] Leith, C.E. 1968 *Phys. Fluids* **11**, 671–673
- [4] Kraichnan, R.H. 1971 *J. Fluid Mech.* **47**, 525–535.
- [5] Brachet, M.E., Meneguzzi, M., Politano, H. & Sulem, P.L. 1988 *J. Fluid Mech.* **194**, 333–349.
- [6] Borue, V. 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3967–3970.
- [7] Eyink, G.L. 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3800–3803
- [8] A.N. Kolmogorov, *J. Fluid Mech.* vol 13, pp82, 1962.