数理解析研究所講究録
972巻 1996年 220-232

非等方乱流中の渦構造と乱流統計

阪大基礎工機械　高岡正憲 (Masanori Takaoka)

1　はじめに

大きいスケールの流れの最も簡単なものとして，スケール無限大の流が考えられる．これらの流れは大きく分けて，回転，せん断，引き伸ばし，の三種類となり，それぞれ，渦構造に与える影響としては，順に，回転，回転＋引き伸ばし，引き伸ばし，である．これら三つの場を比較検討することは，大きいスケールからの影響を理解しモデル化する上でも重要なことである．

私は最近，これまであまり詳しく調べられていなかった引き伸ばしを伴う乱流を，数値シミュレーションにより，渦構造のダイナミックスと乱流統計との関連を調べるという立場から研究してきた．渦構造の多くは，球状ではなく「管状」という非等方な形をしており，その軸方向と動径方向とでは乱流統計に与える影響が異なると考えるのが自然である．ところが，一様等方乱流では渦管の向きが等方的に分布しているために，これら各方向からの影響が打ち消し合い，見えなくなっている可能性がある．そこで，乱流中の渦管構造を平均流により操り，できた非等方乱流における乱流統計の特徴から，渦管の各方向からの影響を調べた．

ここでは，平均流として，一様引き伸ばし流と一様回転流を考えました．前者の流れにおいては，渦伸長により引き伸ばしのある方向に，「渦管の方向」を揃えることができ，後者の流れにおいては，Taylor-Proudman の定理により回転軸に垂直な方向に流れは二次元化し，更に，反対回りの渦は不安定化するので，回転軸方向に「渦管の向き」を揃えることができる．

次の章では，簡単に数値計算法などについて説明し，引き続く各章で，得られた計算結果を Gauss 分布からのずれを中心に書く．最後の章で，得られた結果を簡単に箇条書でまとめる．

2 基礎方程式と数値計算法

速度場を平均流の部分と揺らぎの部分とに分けて，次のように書く．

$$v_i = A_{ij}x_j + u_i \tag{1}$$

但し，今は平均流の時間変化，および揺らぎからの跳ね返りの影響は考えないし，非圧縮性を仮定しているので $A_{11}+A_{22}+A_{33}=0$ である．この時，揺らぎの流れ場を支配する方程式（渦度方程式）は，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega_i}{\partial t} &= -A_{jl}x_l\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} - A_{ij}\epsilon_{jkl}A_{kl} + A_{ij}\omega_j - \epsilon_{jkl}A_{kl}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\\ &- u_j\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} + \omega_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_j^2}\end{aligned} \tag{2}$$

$$\omega_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \tag{3}$$

と書け，ここにνは動粘性係数である．これらの基礎方程式には，空間変数が陽に入っているため，そのままでは数値計算が困難である．そこで次のような変数変換を行ない，

$$X_i = \exp(-A_{ij}t)x_j = T_{ij}(t)x_j \tag{4}$$

揺らぎの部分に"X-空間"での周期境界条件を課し，非線形項の計算には擬スペクトル法を用いる．但し，計算精度を保つために非等方グリッドでも計算できるようにしてある．また，時間方向の積分には，粘性項を繰り込んで安定化をはかったRunge-Kutta-Gill 法を用いる．ただし，波数 k_iは時間の関数であり，X_iに対する波数を K_iとして，$k_i(t)=E_i(t)K_i$となることを注意しておく．

この系に現れる特徴的パラメータ（時間）としては，large eddy time scale: $t_{le}(t)=\mathcal{E}(t)/\nu\mathcal{Q}(t)$，small eddy time scale: $t_{se}(t)=1/\sqrt{2\mathcal{Q}(t)}$，mean strain time scale: $t_{A_i}=1/A_i$，がある．但し，$\mathcal{E}(t)=\frac{1}{2}<\|\boldsymbol{u}(t)\|^2>$，$\mathcal{Q}(t)=\frac{1}{2}<\|\boldsymbol{\omega}(t)\|^2>$ であり，Reynolds 数は，$Re_\lambda=\sqrt{\frac{5}{3}\frac{t_{le}}{t_{se}}}$ と書ける．計算に用いたパラメータを表 1にまとめる．

初期条件は，エネルギースペクトル $E(k)$ が

$$E(K) = CK^4\exp(-K^2/K_0^2)$$

表 1: 数値計算に用いたパラメータ

RUN	$N_1 \times N_2 \times N_3$	ゼロでない A_{ij}	ν	t
R96A0	$96 \times 96 \times 96$		0.007	$0 \sim 1$
R96R1	$96 \times 96 \times 96$	$A_{23} = -A_{32} = 1$	0.007	$0 \sim 1$
R96B1	$192 \times 96 \times 96$	$A_{11} = 1, A_{22} = A_{33} = -0.5$	0.007	$0 \sim 1$
R96BR1	$192 \times 96 \times 96$	$A_{11} = 1, A_{22} = A_{33} = -0.5,$ $A_{23} = -A_{32} = 1$	0.007	$0 \sim 1$
R7A0	$128 \times 128 \times 128$		0.005	$0 \sim 1$
R7R1	$128 \times 128 \times 128$	$A_{23} = -A_{32} = 1$	0.005	$0 \sim 1$
R7B1	$256 \times 128 \times 128$	$A_{11} = 1, A_{22} = A_{33} = -0.5$	0.005	$0 \sim 1$
R7BR1	$256 \times 128 \times 128$	$A_{11} = 1, A_{22} = A_{33} = -0.5,$ $A_{23} = -A_{32} = 1$	0.005	$0 \sim 1$

となるようなランダム場で，$C = 2.35 \times 10^{-1}$，$K_0 = 2$ とし，$\nu = 0.01$ の時，$\mathcal{E}(0) = 5.0$，$\mathcal{Q}(0) = 50$，$t_{le}(0) = 10$，$t_{se}(0) = 0.1$，$t_{A_i} \sim 1$ となる．

3 計算結果

3.1 確率密度分布関数

3.1.1 速度場の分布関数

今回報告する結果は，主に表 1中の最も Reynolds 数の高いもの (R7A0-R7BR1) の時刻 1 の時の場のデータについてである．

図 1 に各 RUN における，速度場の確率密度分布関数 (PDF) を示す．図 1(a) は，平均流の無い自由減衰している等方乱流 (R7A0) における速度場の PDF で，良く知られているように Gauss 分布が見られる．図 1(b) は，一様回転が加わった時 (R7R1) の速度の PDF だが，Reynolds 数が低過ぎたためか，非等方性（回転の影響）はほとんど見られず，先の図 1(a) とほとんど同じである．

図 1(c) は，一様引き伸ばし流が加わった時 (R7B1) の速度の PDF で，前回報告したように，引き伸ばしのある方向 (x_1ー方向) では Gauss 分布より

やや広い裾を持ち，収縮する方向 (x_2, x_3 −方向) ではやや広い裾を持つ．この傾向は，一様回転と一様引き伸ばしを加えた時 (R7BR1) さらに大きくなる (図 1(d))．これは，渦管の「向き」が揃ったためというよりは，この時の Reynolds 数が引き伸ばしだけの時よりも大きいからだと考えられる．

ここでは図を省略するが，渦どの大きさによる条件付き PDF を調べると，この Gauss 分布からのずれは，渦度の大きい領域で起こっていることがわかる．

3.1.2 速度の空間微分場

一様等方乱流において速度場の PDF は Gauss 分布だが，その空間微分した場の PDF は Gauss 分布からずれて広い裾を持つことが知られている．

図 2 に一様等方乱流 (R7A0) における速度の縦微分場 (図 2(a)) と横微分場 (図 2(c)) の PDF を示す．図 2(b)(c) には各々$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$と$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$に対する渦どの大きさによる条件付き PDF が示されている．これらの図から分かるように，非対称性や広い裾といった Gauss 分布からのずれは，高渦度領域で起こっている．

非等方乱流においてもこの傾向はほとんど変わらない．ただし，図3(a)(c) から分かるように，引き伸ばしのある方向 (渦管の軸方向) の速度の縦微分の PDF は対称化している．そしてこの対称化もまた，高渦度領域で起こっている (図 3(b)(d))．

ここでは図を略するが，横微分の PDF においても，非等方性による分離 $((\frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1}), (\frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_3}{\partial x_2}), (\frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3}))$ が，わずかではあるがある事が今回の計算で分かった．

3.2 Skewness と Flatness

先の PDF における Gauss 分布からのずれを定量的にあらわす量として，skewness や flatness が調べられてきた．Skewness はまた，エネルギーフラックスと関係する大事な量であるこも注意しておく．ここでは skewness

と flatness を次のように書くことにする：

$$SK_{\alpha\beta} = \frac{\left\langle\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^3\right\rangle}{\left\langle\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^2\right\rangle^{3/2}}, \quad FL_{\alpha\beta} = \frac{\left\langle\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^4\right\rangle}{\left\langle\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^2\right\rangle^{2}}.$$

全体的な値としては，すでに一様等方乱流において報告されているように，速度の空間縦微分場の skewness は負であり，flatness は Gauss 分布の 3 よりも大きい値をとる．ところが，一様引き伸ばし流が加わると引き伸ばしのある方向では skewness が大きくなりゼロに近づき，flatness も大きくなりより Gauss 分布の値から離れる．横微分の skewness はほぼゼロであるが，flatness は縦微分のそれよりも大きな値をとる．これは非等方乱流においてもそうである．但し，一様引き伸ばし流があると，flatness の値は微分毎に分離する傾向にある．

このGauss 分布からのずれの原因を探るため，渦どの大きさ毎の skewness と flatness を計算した (図 4 ～7)．図 4 から明らかなように，一様等方乱流においては，縦・横微分とも skewness の値は渦度の大きさには関係なくほぼ一定であるが，flatness は渦度が小さいところほど大きい．これまで計算した量においては R7A0 と R7R1 との差はほとんど見られなかったが，図 5(b) にははっきりとした違いが現れている．それは，渦度が大きくなるにつれて SK_{32}が正から負へと，SK_{23}が負から正へと変化していることである．

他方，一様引き伸ばしがあると，縦微分の skewness で引き伸ばしのある方向の (SK_{11}) は，渦度の大きさの増加関数となっているが，他の方向の (SK_{22}, SK_{33}) は減少関数となっている (図 6(a))．また，flatness においても引き伸ばしのある方向の方が少し大きく，その傾向は渦度の小さい領域でより顕著である (図 6(c))．横微分の flatness においては，全領域にわたってわずかではあるが，((FL_{12}, FL_{21}), ($FL23$, FL_{32}), (FL_{31}, $FL13$)) の 3 グループに分離している．さらに，一様回転も加わると，先にも述べたように，SK_{23}, SK_{32}が各々渦度の大きさの減少・増加関数となる．

4 まとめ

一様引き伸ばし流や回転流を外流として与えることにより，乱流中に現れる渦管の向きを整列させ，できた非等方乱流における各種統計量の Gauss 分布からのずれと，渦構造の存在との関係を調べた.

計算結果をまとめると次のようになる.

- 速度の PDF：
  - 軸方向では Gauss 分布よりやや広い裾を持つ.
  - 動径方向では Gauss 分布よりやや狭くなる.
- 速度の空間微分場の PDF：一様等方乱流で知られているように Gauss 分布からずれて，非対称性や広い裾を持っている．これらのずれは，主に高渦度領域で起こっている.
  - 軸方向の縦微分場の PDF は対称化する.
  - 非等方化するとごく僅かではあるが横微分の PDF が 3 グループに別れる.
- Skewness と Flatness：一様等方乱流で知られているように速度の縦微分場の skewness は負であり，速度の縦・横微分場の flatness は 3 よりも大きい.
  - 軸方向の速度の縦微分場の skewness は正の方向にシフトするが，動径方向のは負の方向にシフトする．これには高渦度領域からの寄与が大きく，低渦度領域ではむしろ逆方向にシフトしている.
  - 一様回転があると軸に垂直な面内の skewness は渦度の大きさの増加・減少関数となる.
  - 軸方向の速度の縦微分場の flatness はより大きくなる.
  - 非等方化すると横微分場の flatness は 3 グループに別れる.

これらの結果は，前回報告知た Burgers 渦管から構成した「渦管階層モデル」とコンシステントである.

図1(a)

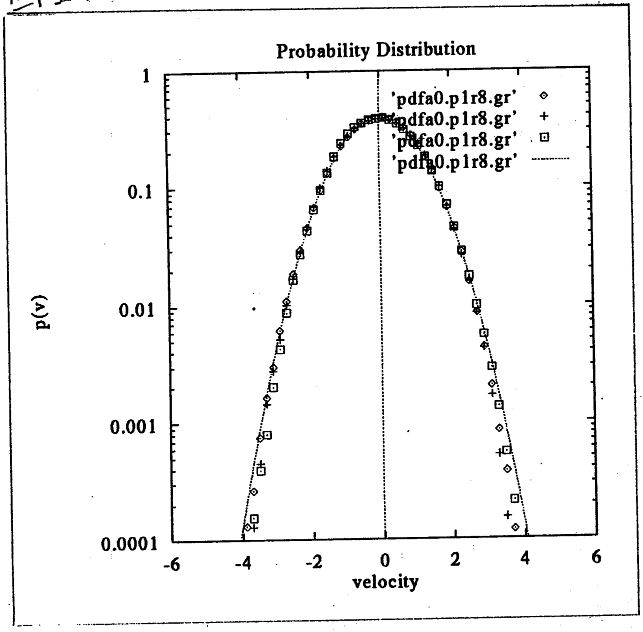

図1(b)

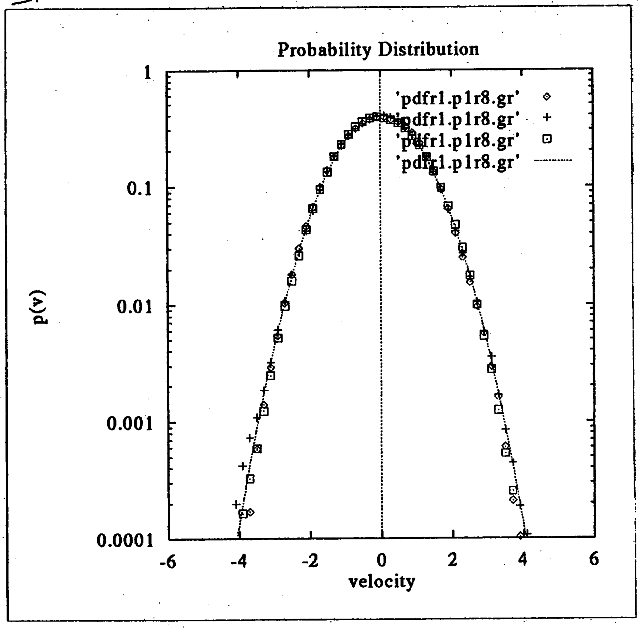

図1(c)

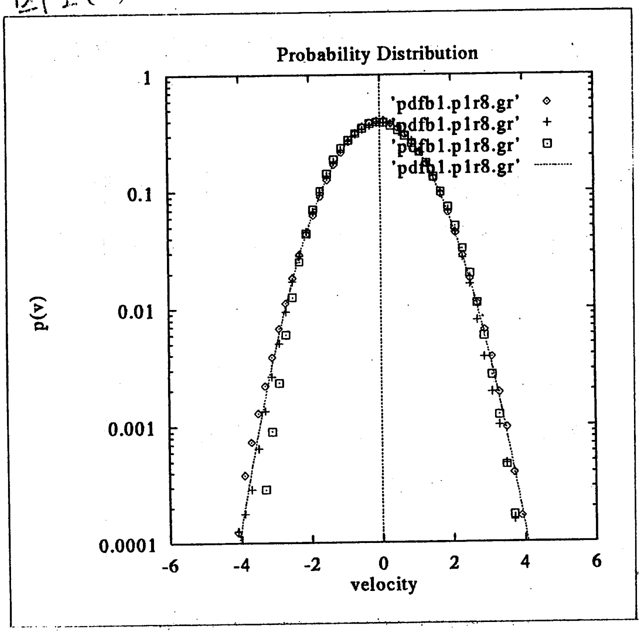

図1(d)

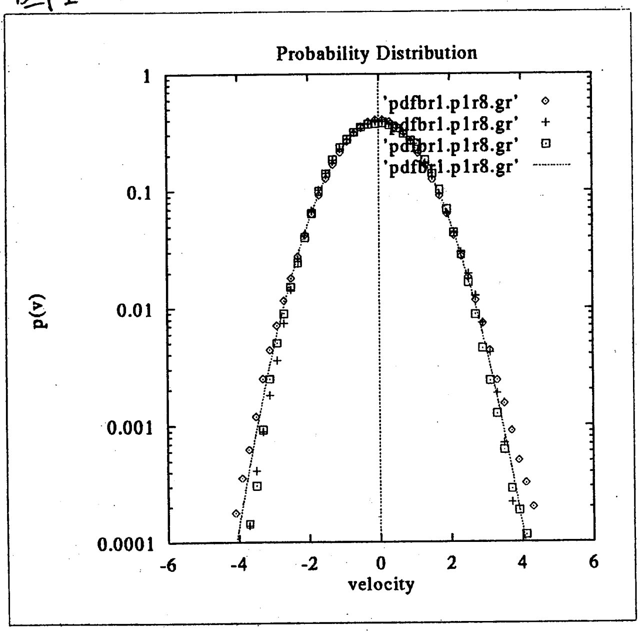

図1. 速度場の確率密度分布関数 (PDF)

◇: u_1, +: u_2, □: u_3, ----: Gauss分布

図2(a)

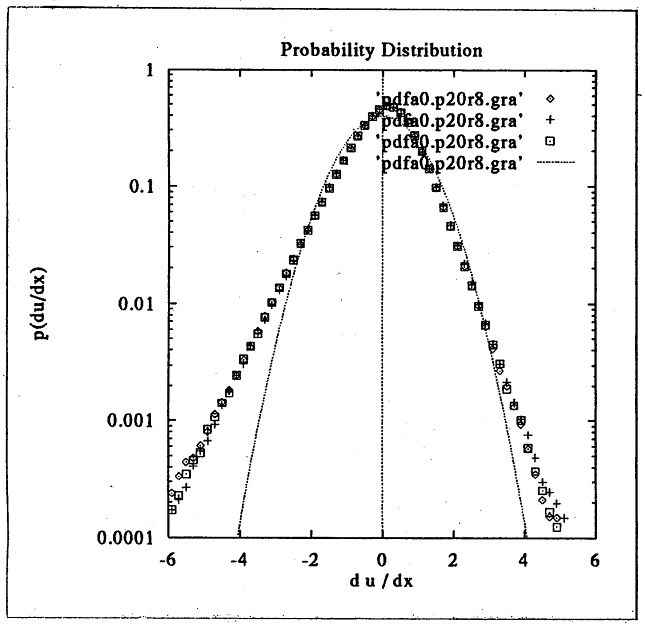

図2(b)

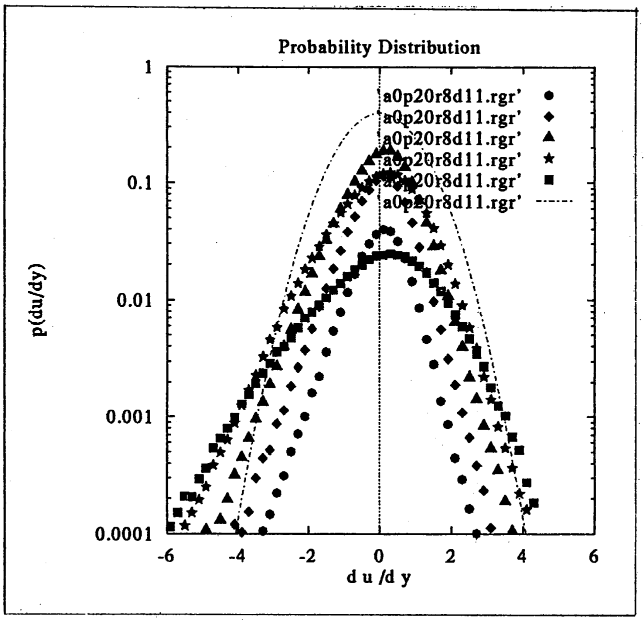

図2(c)

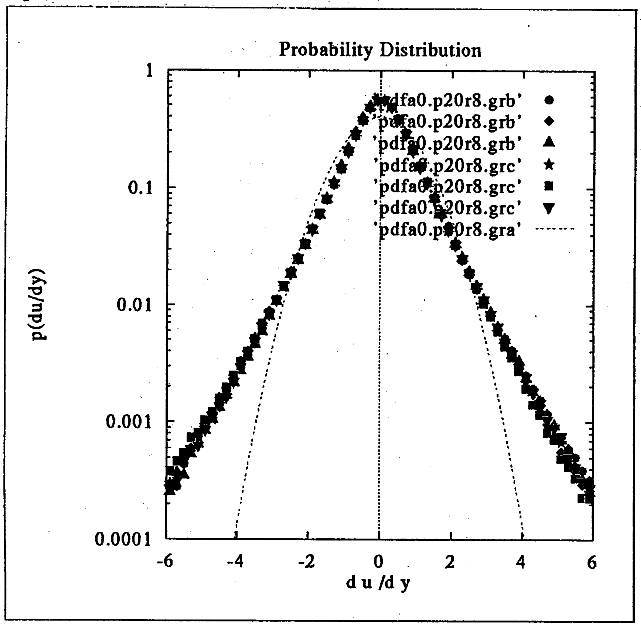

図2(d)

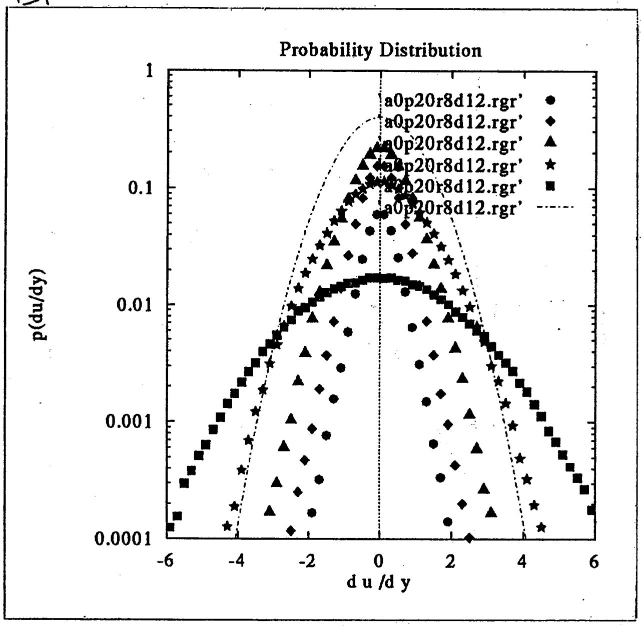

図2. 一様等方乱流における速度の縦微分((a),(b))と横微分((c),(d))の確率密度関数((a),(c))と渦度の大きさによる条件付確率密度関数((b),(d))。

図3(a)

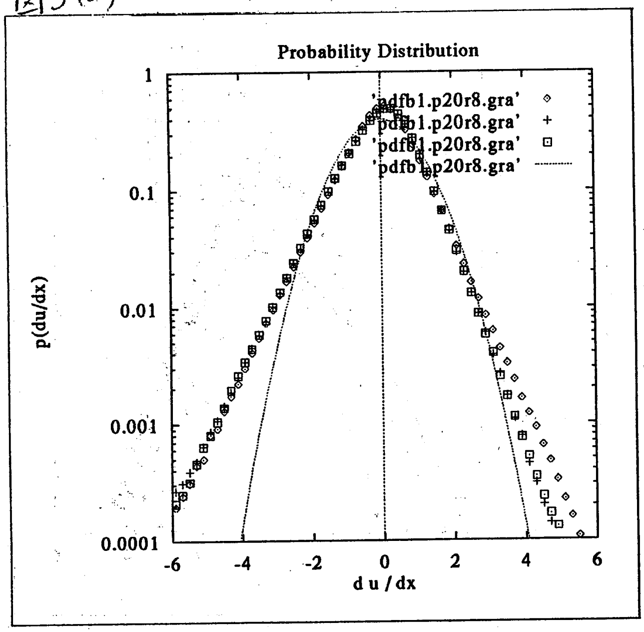

図3(b)

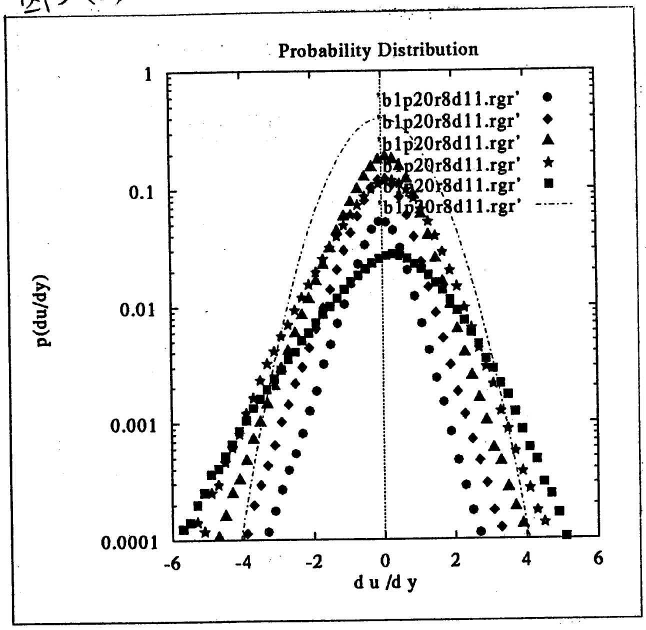

図3(c)

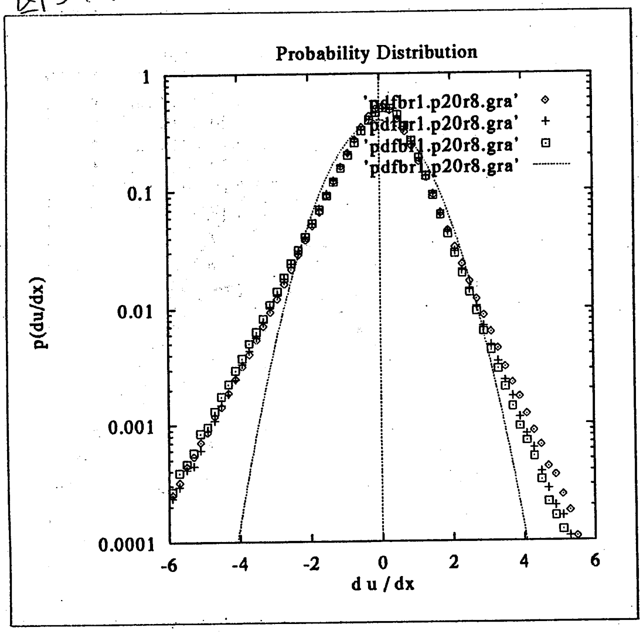

図3(d)

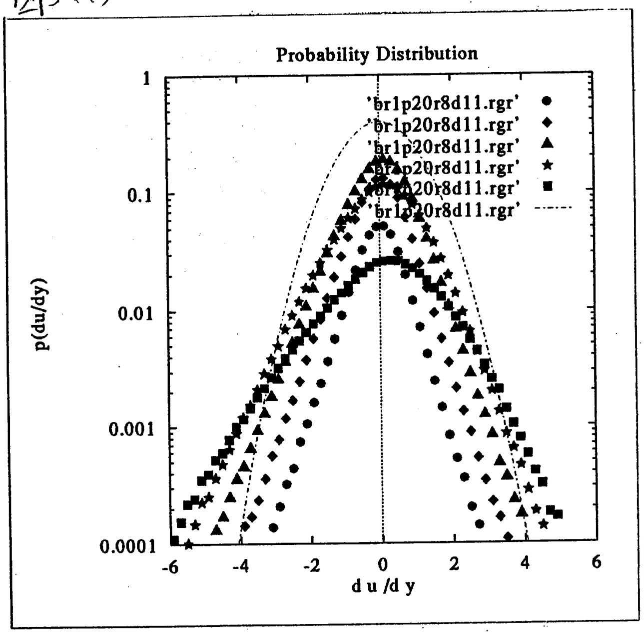

図3. 速度の縦微分場のPDF ((a),(c))と条件付PDF ((b),(d))。
(a),(b) は R7B1, (c)(d) は R7BR1.
◇ : $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$, + : $\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, □ : $\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$

図4(a)

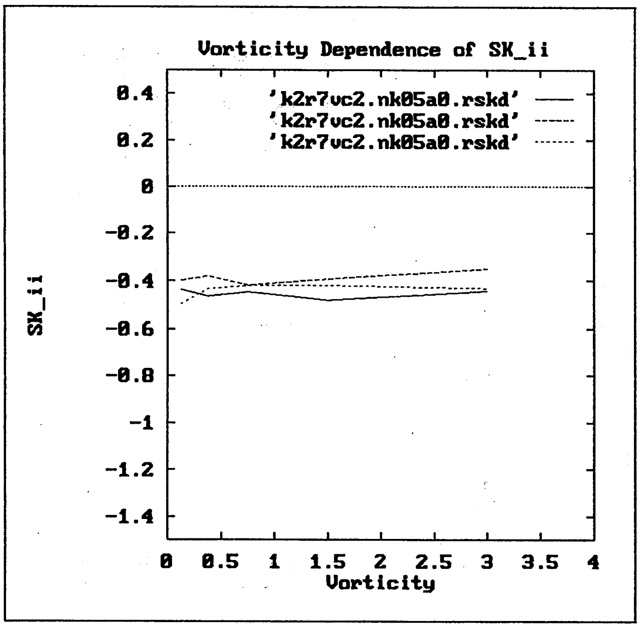

図4(b)

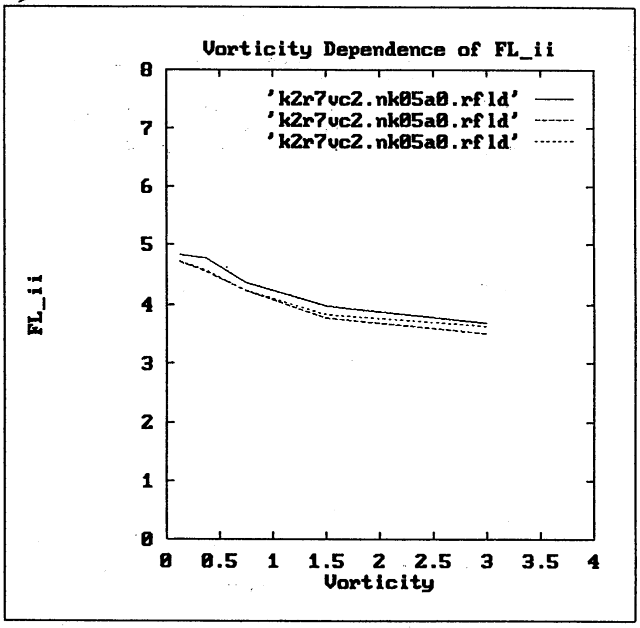

図4(c)

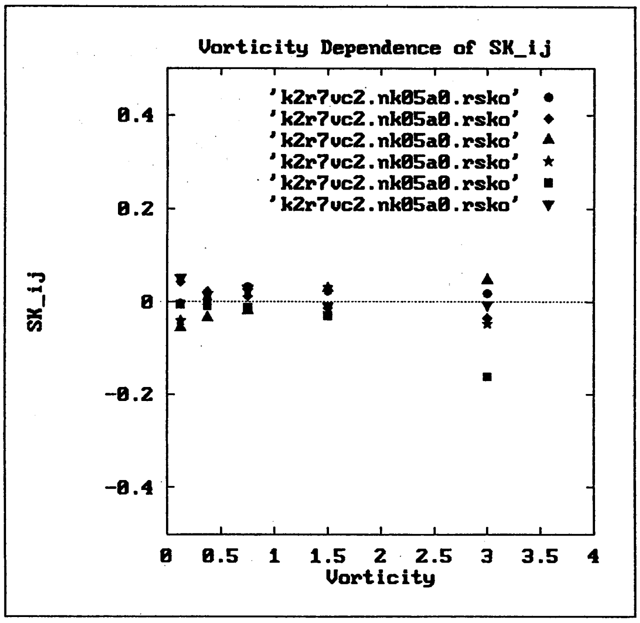

図4(d)

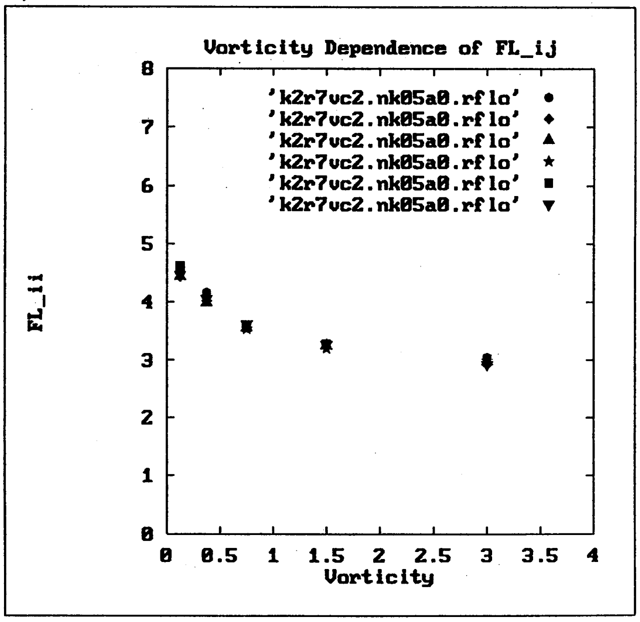

図4、R7AΦ の. 渦度の大きさ毎の skewness ((a),(c)) と flatness ((b),(d)).

図5(a)

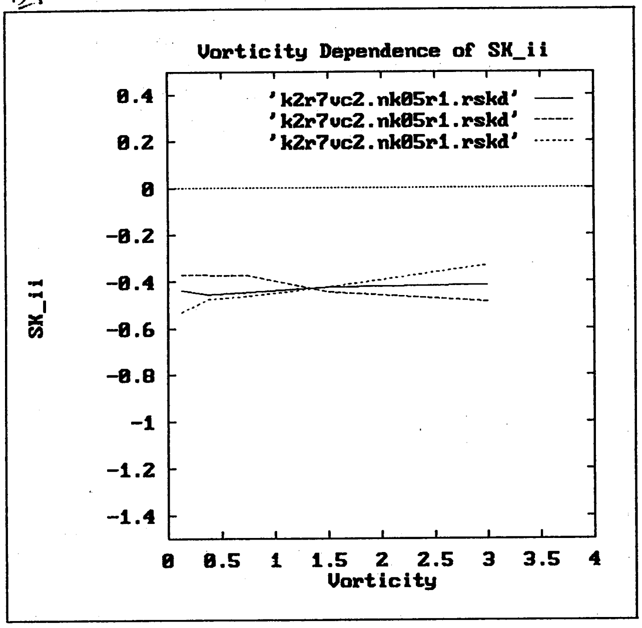

図5(b)

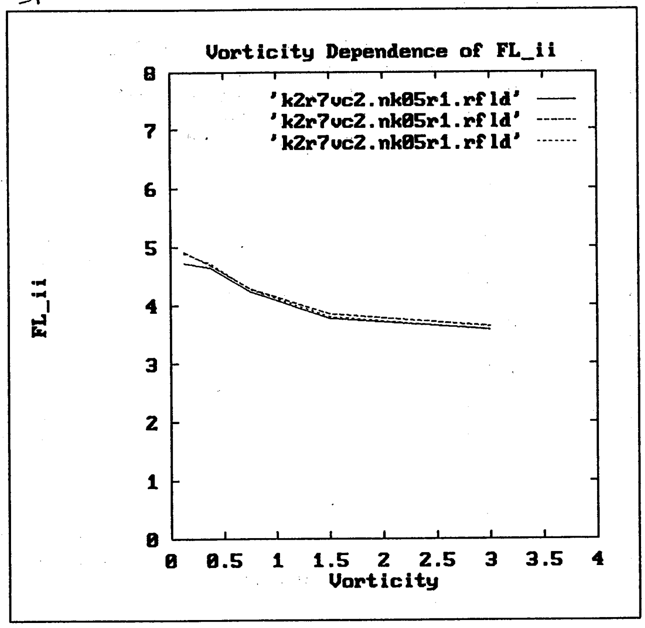

図5(c)

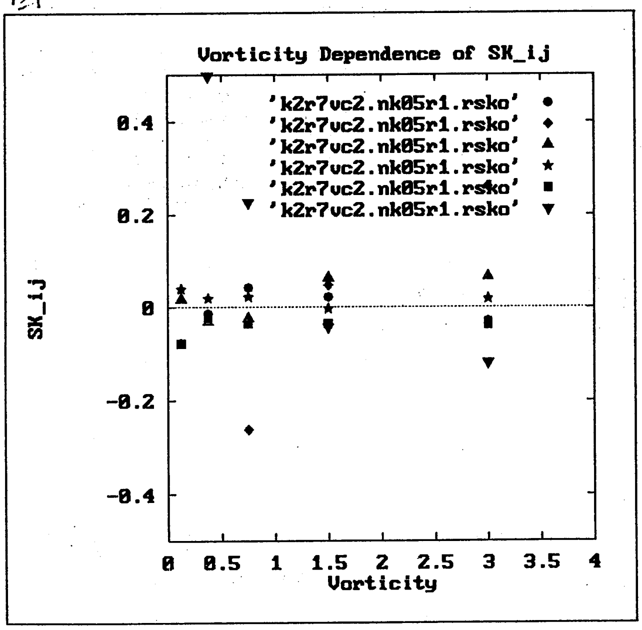

図5(d)

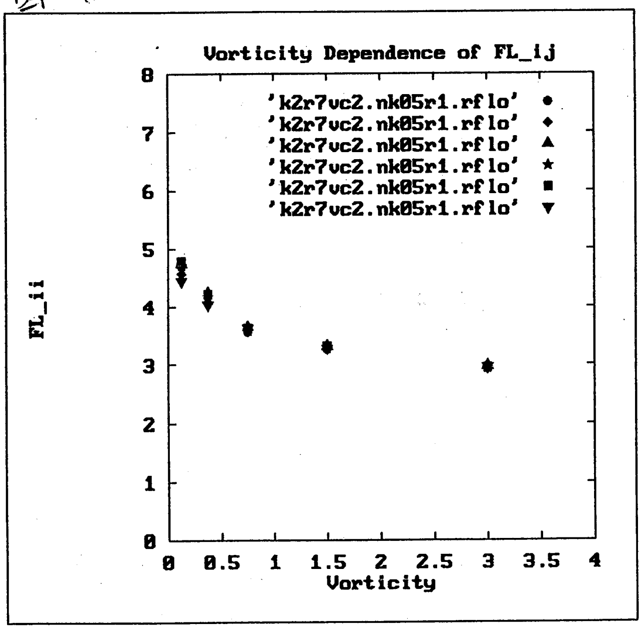

図5. R7R1 の、渦度の大きさ毎の skewness ((a),(c)) と flatness ((b),(d))

図6(a)

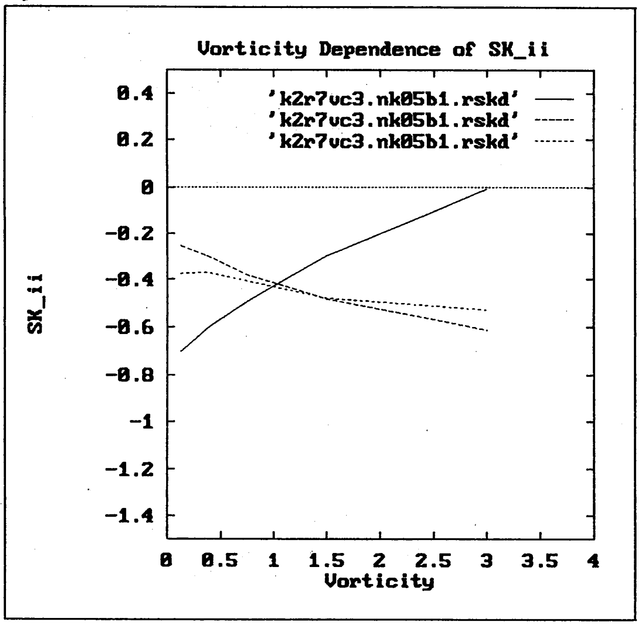

図6(b)

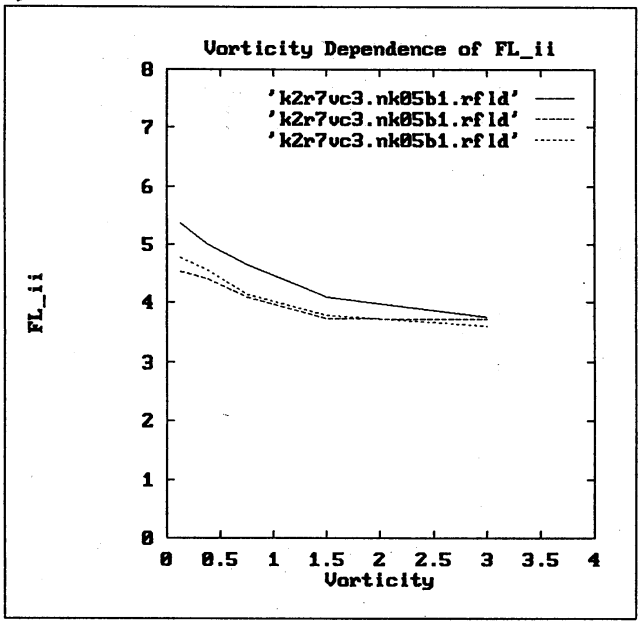

図6(c)

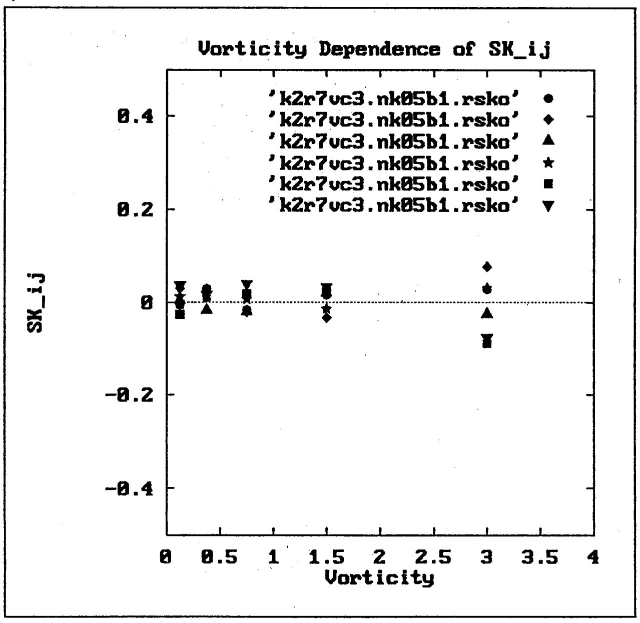

図6(d)

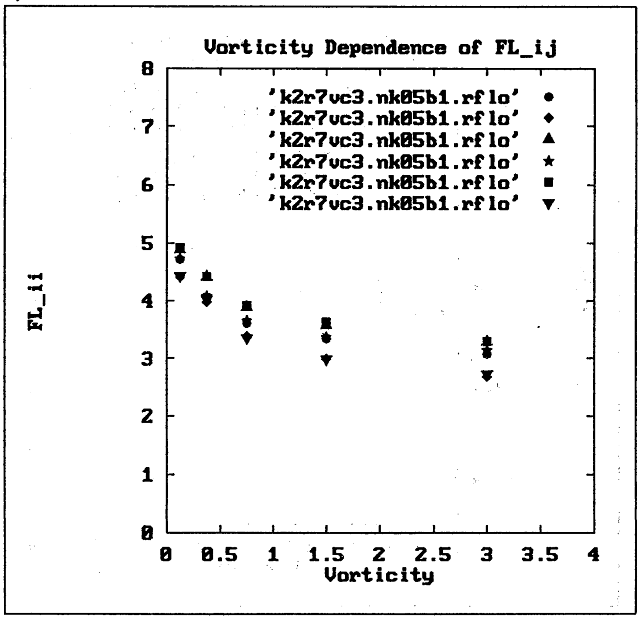

図6、R7B1の、渦度の大きさ毎のskewness ((a), (c)) と flatness ((b), (d)).

図7(a)

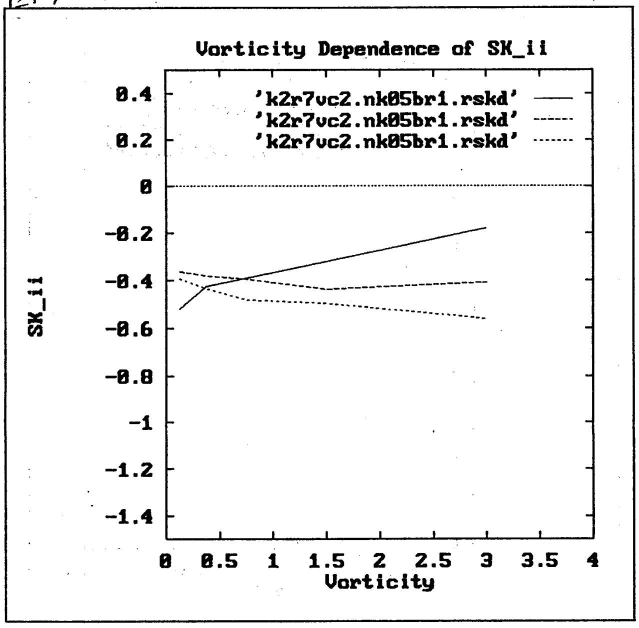

図7(b)

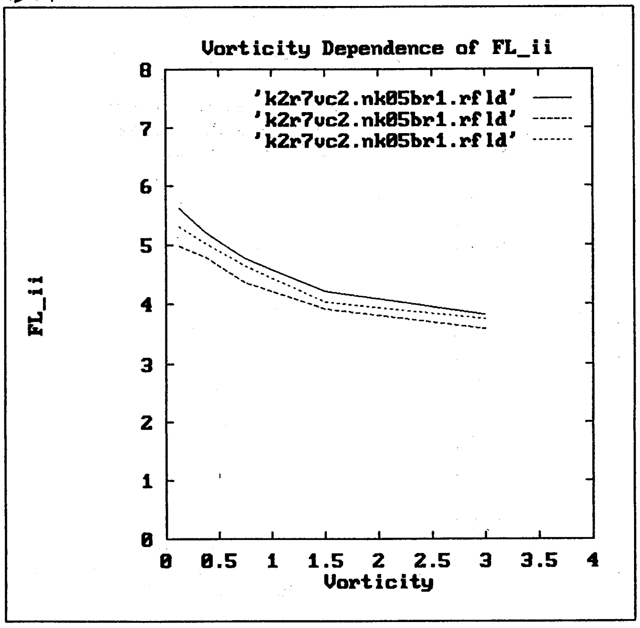

図7(c)

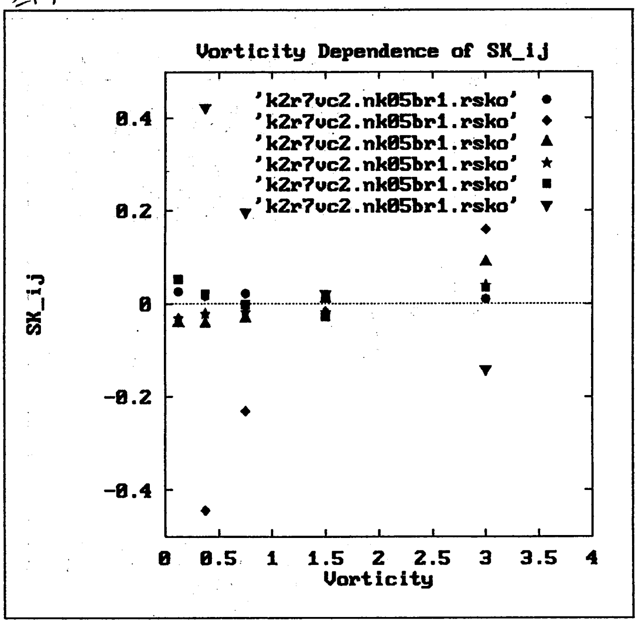

図7(d)

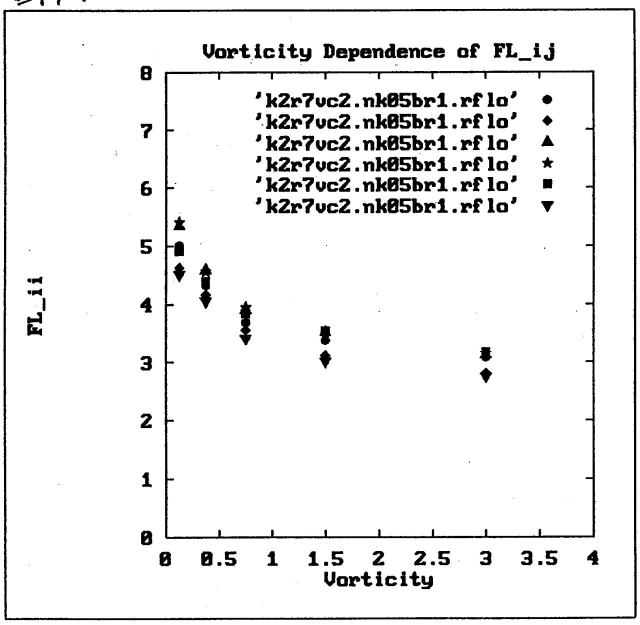

図7. R7BR1の、渦度の大きさ毎のskewness((a),(c))とflatness((b),(d))。