

渦糸近似による渦度場の特異性の研究

東京電機大学理工学部 福湯章夫 (Akio Fukuyu)

1. 本研究の目的は、非粘性流体の流れの場に有限時間内に出現すると予想されている特異性について、渦力学の立場からその出現の流体力学的なメカニズムを検討することである。ここでは強さの異なる渦管の相互作用に注目する。

基本的な考え方を図1に示す。直線状の強い渦管2 (強さ $\Gamma_2$ ) に局所的に反平行な弱い曲線渦管1 (強さ $\Gamma_1$ ) が接近したとする(図1左)。渦管1は自己誘導速度により、さらに渦管2に接近するが、同時に渦管2の誘導速度により、渦管1は渦管2に巻き込まれる(図1中)。2本の渦管の最近接点をそれぞれ $O_1$ 、 $O_2$ とする。非粘性流体では、2本の渦管は渦管としての個性を保ち続け、渦管の再結合は起こらない。時間の経過とともに、 $O_1$ は $O_2$ に接近し続け、同時に渦管1は渦管2に限りなく巻き込むことになる(図1右)。このとき、巻き込まれた渦管1は渦管2の $O_2$ を中心に渦管2を引き伸ばすような変形速度を誘起する。この変形速度は、渦管1が巻き込まれるほど強くなり、したがって、渦管2は点 $O_2$ で爆発的に引き伸ばされることになる。

このような渦管の引き伸ばし過程の3次元 Euler 方程式による精密なシミュレーションは当面困難であるので、ここでは渦度分布に対する Biot-Savart 則を用いたシミュレーションを試みる。

2. 筆者は(1995、以下 I とする)すでに渦糸近似による計算結果を得ている。以下にその結果を要約する。

強さ $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_2$ の2本の渦糸による誘導速度 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^2 \Gamma_i \int \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{\{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + \sigma(\mathbf{r}')^2\}^{3/2}}$$

で与えられる。ここに $\sigma(\mathbf{r})$ は各渦糸の core 半径である。ここで、各曲線渦糸を $N_i$  ( $i=1, 2$ ) 個の要素から成る折れ線で近似すると、誘導速度は、

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^2 \Gamma_i \sum_{k=1}^{N_i} \frac{\mathbf{a}_k^{(i)} \times \delta \mathbf{r}_k^{(i)}}{\{|\mathbf{a}_k^{(i)}|^2 + (\sigma_k^{(i)})^2\}^{3/2}}$$

$$\mathbf{a}_k^{(i)} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{k+1}^{(i)} + \mathbf{r}_k^{(i)}) - \mathbf{r}, \quad \delta \mathbf{r}_k^{(i)} = \mathbf{r}_{k+1}^{(i)} - \mathbf{r}_k^{(i)}$$

となる。これから折れ線の接点 $\mathbf{r}_k^{(i)}$ の運動方程式

$$\frac{dr_k^{(i)}}{dt} = v(r_k^{(i)})$$

を得る。折れ線の各線分上で core 半径  $\sigma_k^{(i)}$  は一定とし、接点の運動に伴って各線分の長さが増減するとき、core 半径も次の core law に従って変化するものとする。

$$(\sigma)^2 |\delta r| = (\sigma')^2 |\delta r'| \quad \text{when} \quad \delta r \rightarrow \delta r'$$

これらをもとにした計算の詳細は I にゆずる。

図2に渦管の強さの比が  $G = \Gamma_1/\Gamma_2 = 0.1$  の計算例を示す。点線は2本の渦管の初位置を表わす。すなわち、渦管2はx軸に一致し、渦管1は  $z = 0.3$  を通り xy 平面に平行な平面上の放物線とする。実線は  $t = 2.7276$  における2本の渦管を表わす。図の左は両渦管の xy 平面への射影、右は zy 平面への射影を表わす。図から強い渦管2はほとんど変形せず、渦管1が渦管2に巻き込んで行くことがわかる。

図3は渦管2に沿った core 半径の変化を示す。  $t = 0$  で core 半径は一様とし、  $\sigma = 1$  に規格化する。横軸  $s$  は最近接点  $O_2$  から渦管に沿った長さである。時間とともに、点  $O_2$  で渦管が急速に引き伸ばされ、それに従ってその点での core 半径が急速に減少していることがわかる。

図4、図5には渦管2の  $O_2$  における core 半径  $\sigma$  と  $O_1$ 、 $O_2$  の距離  $d$  の時間変化を示した。図5の  $T$  は計算結果から外挿した値である。これから core 半径  $\sigma$ 、距離  $d$  ともに時間  $t$  とともに  $(T-t)^{-1}$  の形で零になることがわかる。これは渦糸近似の結果であるが、 $d$  の方が  $\sigma$  より速く零になるので、初期にどのように細い渦糸から出発しても  $T$  より前に渦の core の重なりが起こることになってしまう。

3. 2. は渦糸近似の結果である。これは、渦管を一点で爆発的に引き伸ばす要因として弱い渦管の巻きつきを調べたものである。実際の非粘性流体の流れでは、当然、有限の太さの渦管の効果を取り入れなければならない。有限太さの渦管が一点で大きく引き伸ばされたとき、逆向きの圧力勾配が生じ、これは渦管を平滑にする効果を持つ。従って、弱い渦管の巻きつきによって有限時間内に特異性が現われるかどうかは、引き伸ばしの要因とこの平滑化の要因の競合の結果となるはずである。ここでは、論文 I の拡張として、渦管1は I と同様に単独の渦糸とし、渦管2の有限 core の効果を調べるために、渦管2を  $M$  本の渦糸の束で置き換えた計算を試みる。この場合の誘導速度は

$$v(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma_1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\mathbf{a}_k^{(1)} \times \delta \mathbf{r}_k^{(1)}}{\left\{ |\mathbf{a}_k^{(1)}|^2 + (\sigma_k^{(1)})^2 \right\}^{3/2}} - \sum_{i=1}^M \frac{\Gamma_{2,i}}{4\pi} \sum_{k=1}^{N_{2,i}} \frac{\mathbf{a}_k^{(2,i)} \times \delta \mathbf{r}_k^{(2,i)}}{\left\{ |\mathbf{a}_k^{(2,i)}|^2 + (\sigma_k^{(2,i)})^2 \right\}^{3/2}}$$

$$\Gamma_2 = \sum_{i=1}^M \Gamma_{2,i}$$

で与えられる。

計算法は、基本的には論文Iと同じである。ただ、Iでは2本の渦管をともに有限長さの渦糸で置き換え、有限端の処理は行わなかった。それは、渦糸の巻き込みが始まるとがtime scale急速に小さくなり、このtime scaleでは渦糸の両端はほとんど動かないからである。しかし、渦管2を渦糸の束で置き換えた場合には、有限端の処理は必須である。ここでは、次のような有限端処理を行った。即ち、初期に渦管2は直線渦管であるとする。これを、直線渦糸の束で置き換える。そこで、渦管1の巻こむ部分の長さに比べて、初期の直線渦糸を十分長くすれば、巻こみ過程の間、渦管2の両端部分はほとんど直線渦管でとどまると考えられる。このような場合、有限渦糸の両端に半無限直線渦糸を加えることによって、有限端の補正が可能である。例えば、端点 $(x_0, y_0, z_0)$ に右半直線の渦糸を加える場合、

$$v_{2i}(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma_{2,i}}{4\pi} \int_{x_0}^{\infty} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{\{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + \sigma^2\}^{3/2}}, \quad \mathbf{r}' = (x, y_0, z_0), \quad d\mathbf{r}' = (dx, 0, 0)$$

とすればよい。この積分は $\sigma$ が一定ならば初等的に求められる。このような誘導速度の補正を各直線渦糸の両端に加える。

ここでは、 $M=5$ としたときの計算例を示す。まだ、論文Iに対応するような長時間の結果は得られていないが、初期の段階で二つの結果を比較する。

図6a, 6bに100ステップ目における渦糸のxy平面への射影およびzy平面への射影を示した。1~5は渦管2を構成する渦糸を表わす。この時点で渦管2は1回転以上回転していることに注意しよう。

図7はcore半径 $\sigma$ と距離 $d$ の時間変化を論文Iの結果と比較したものである。ただし、 $\sigma$ は渦管2を構成する渦糸のうち渦管の中心に配置した渦糸、即ち1のcore半径であり、 $d$ は渦管1と1の距離である。また、巻き込み過程の初期の段階であるが論文Iとはほぼ同様の傾向を示している。

## 文献

Fukuyu, A. J. Phys. Soc. Japan 64 (1995) 2000

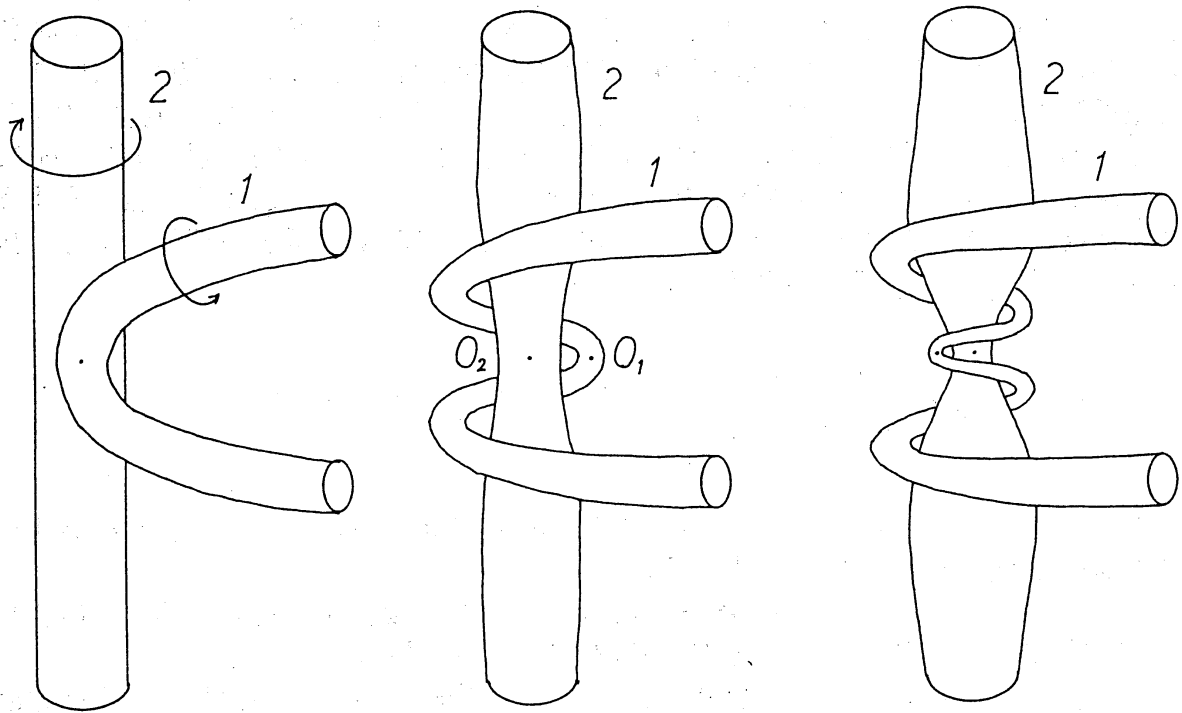


图 1

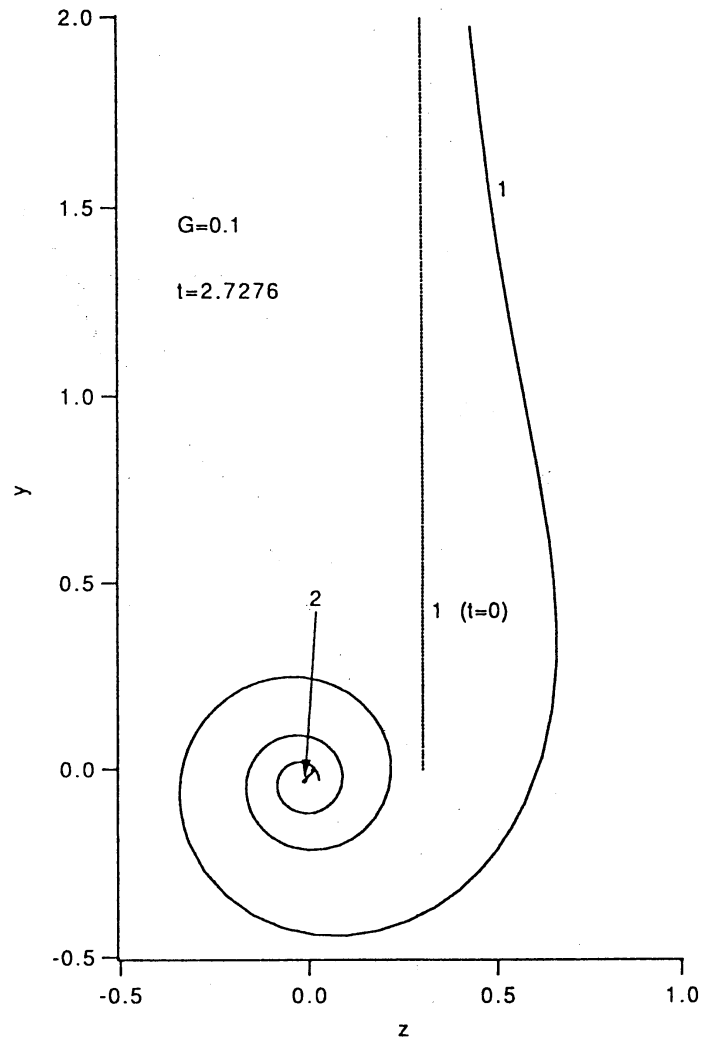
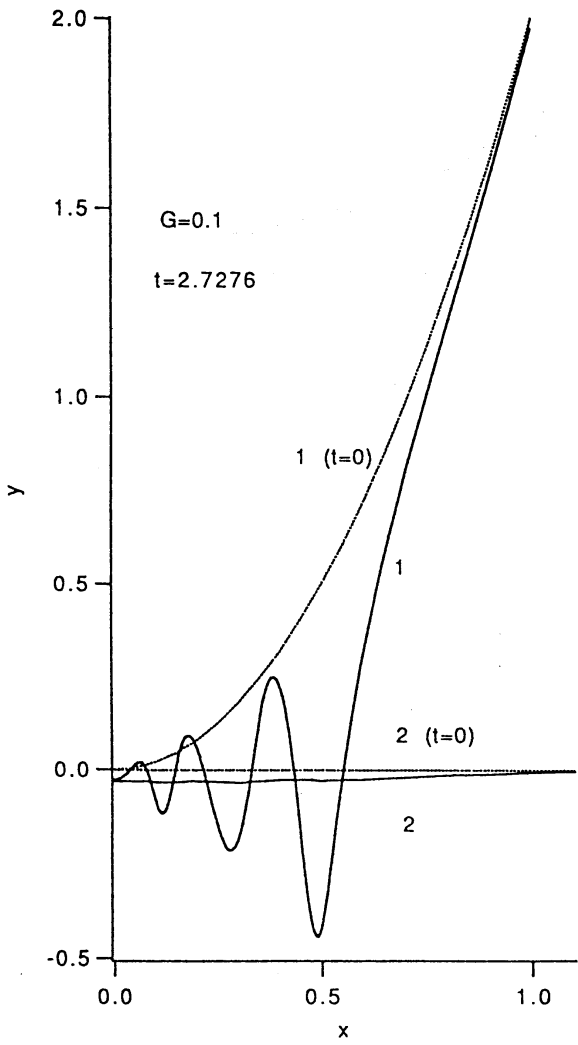
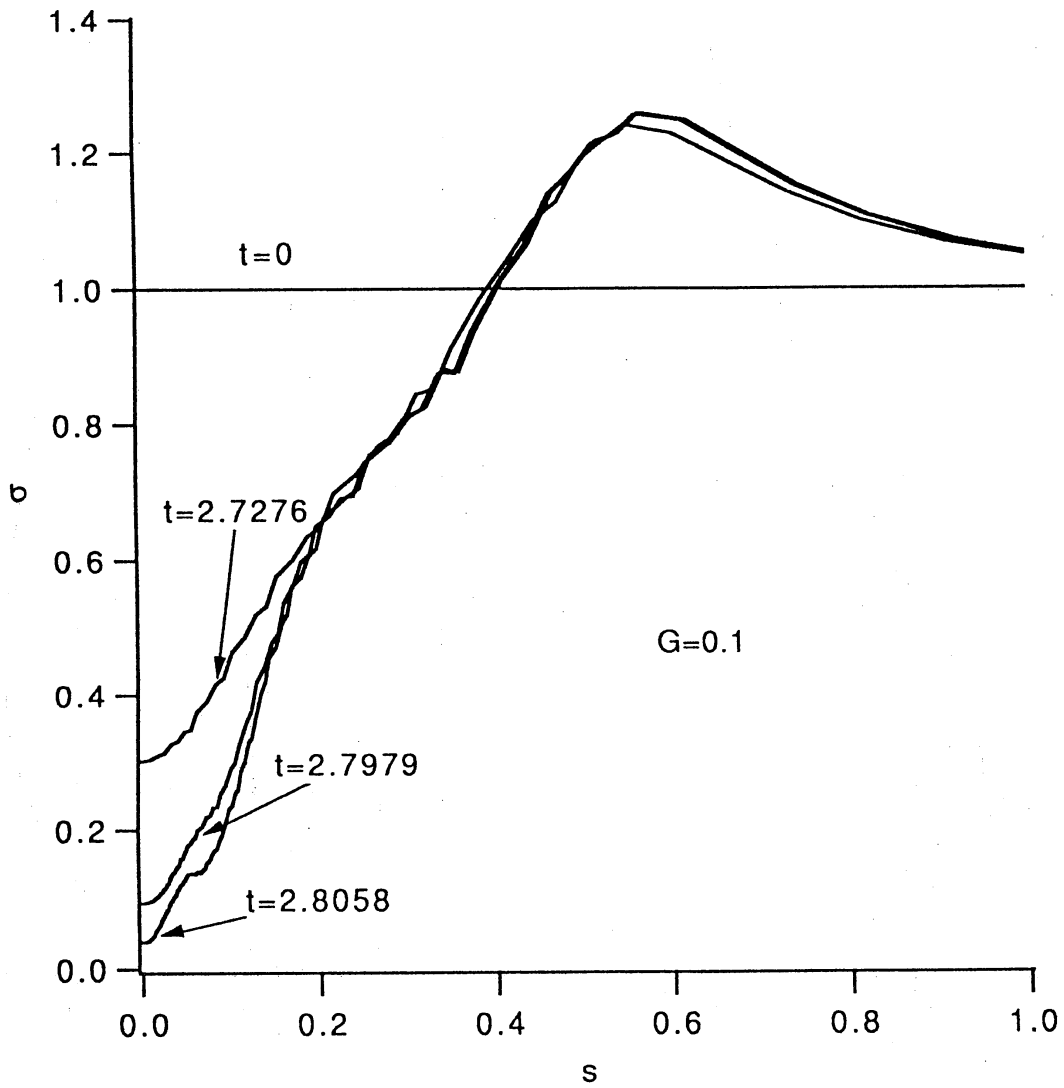
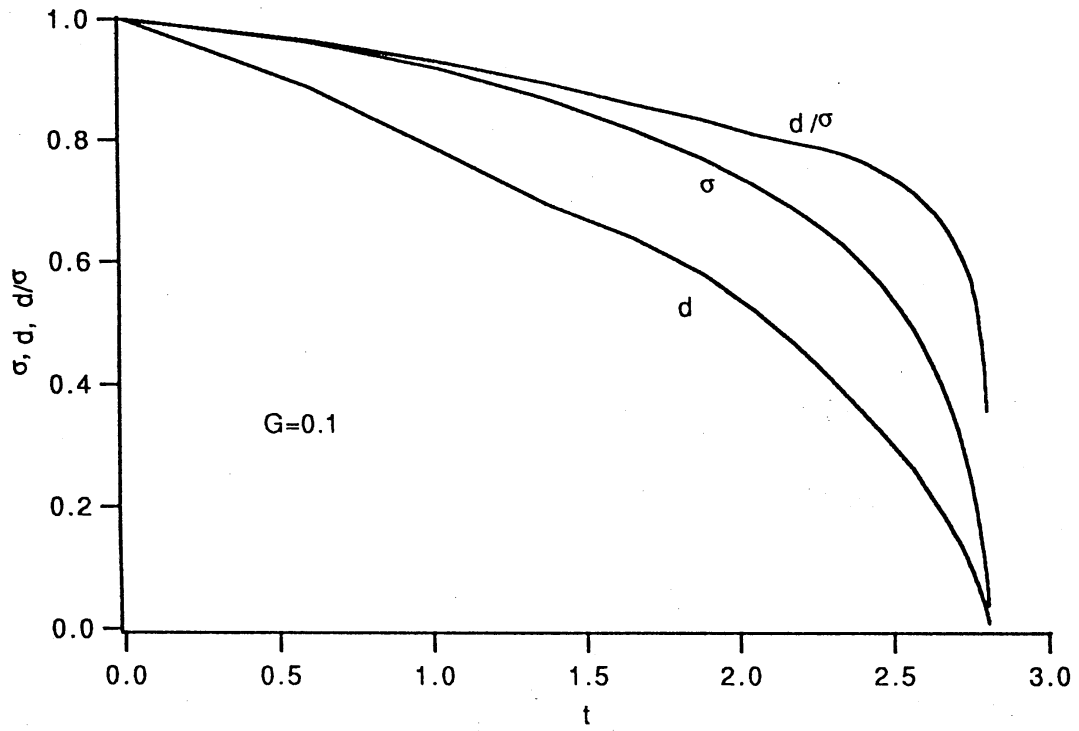


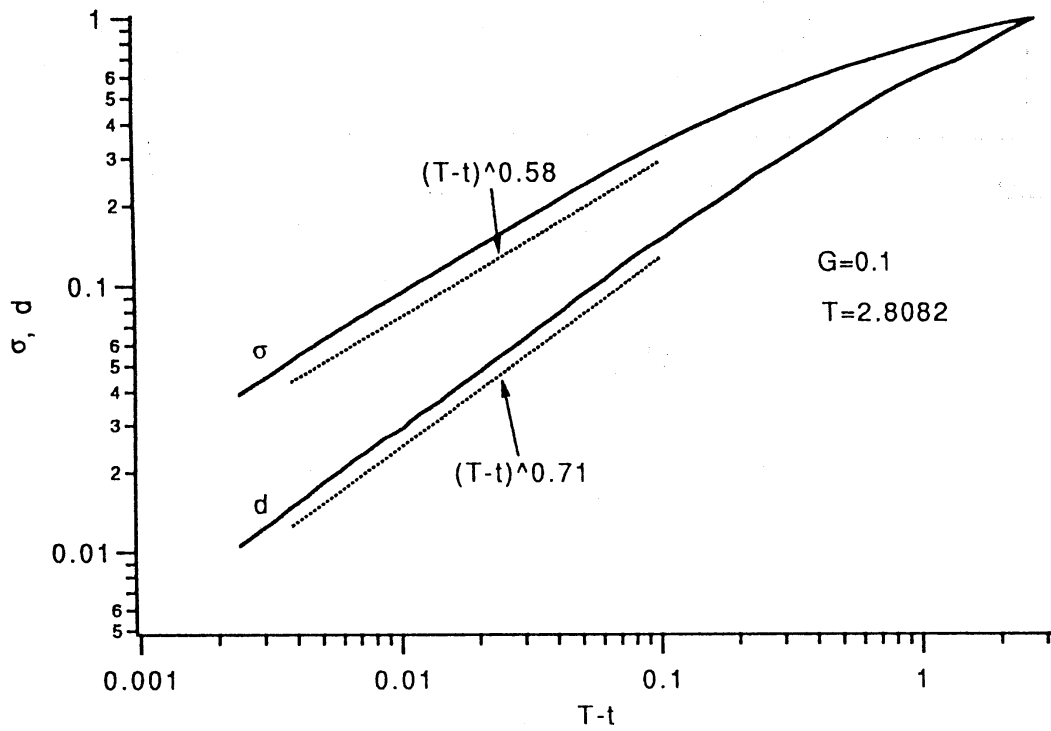
图 2



(2) 3



1274



1275

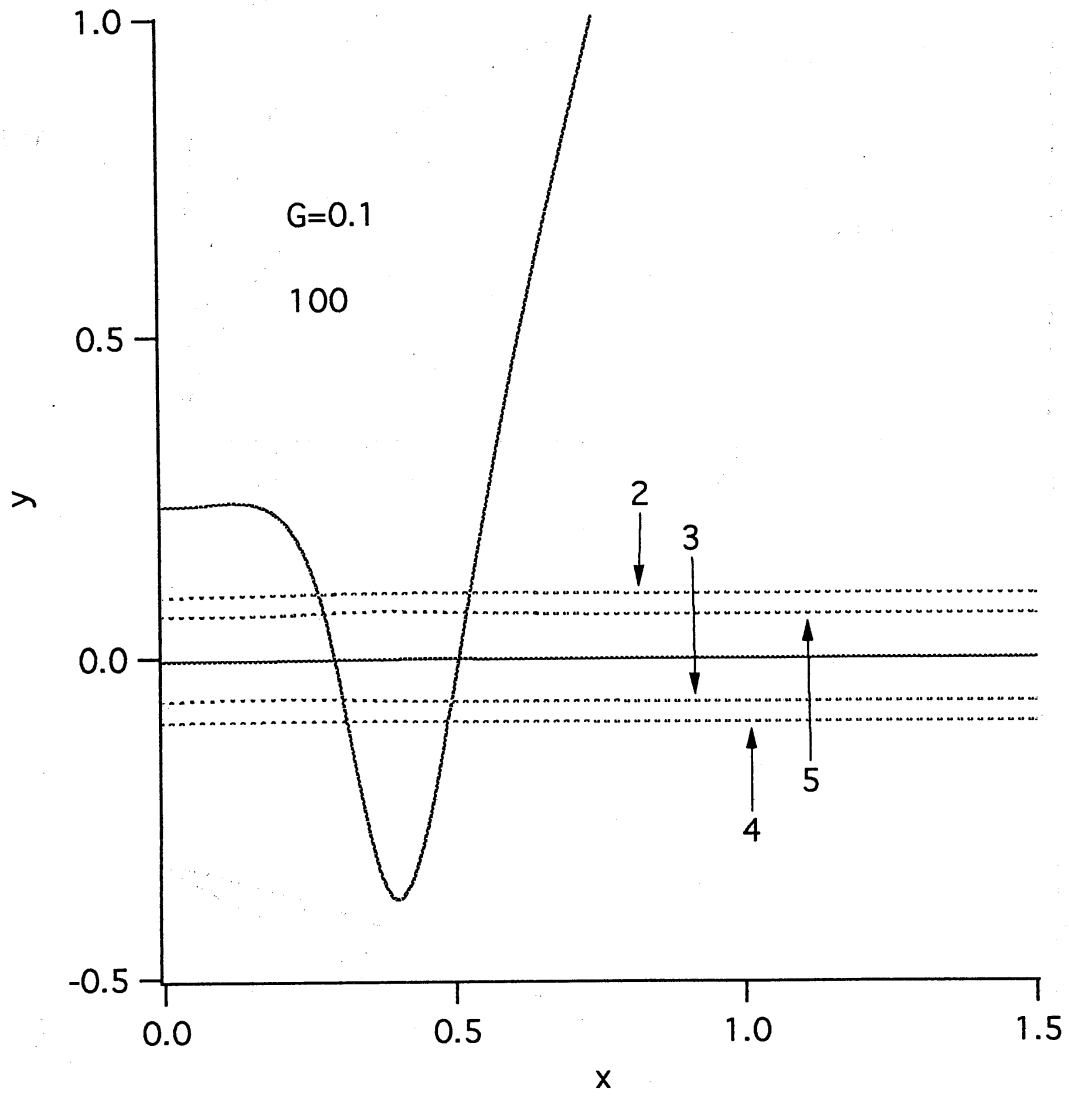


图 6 a



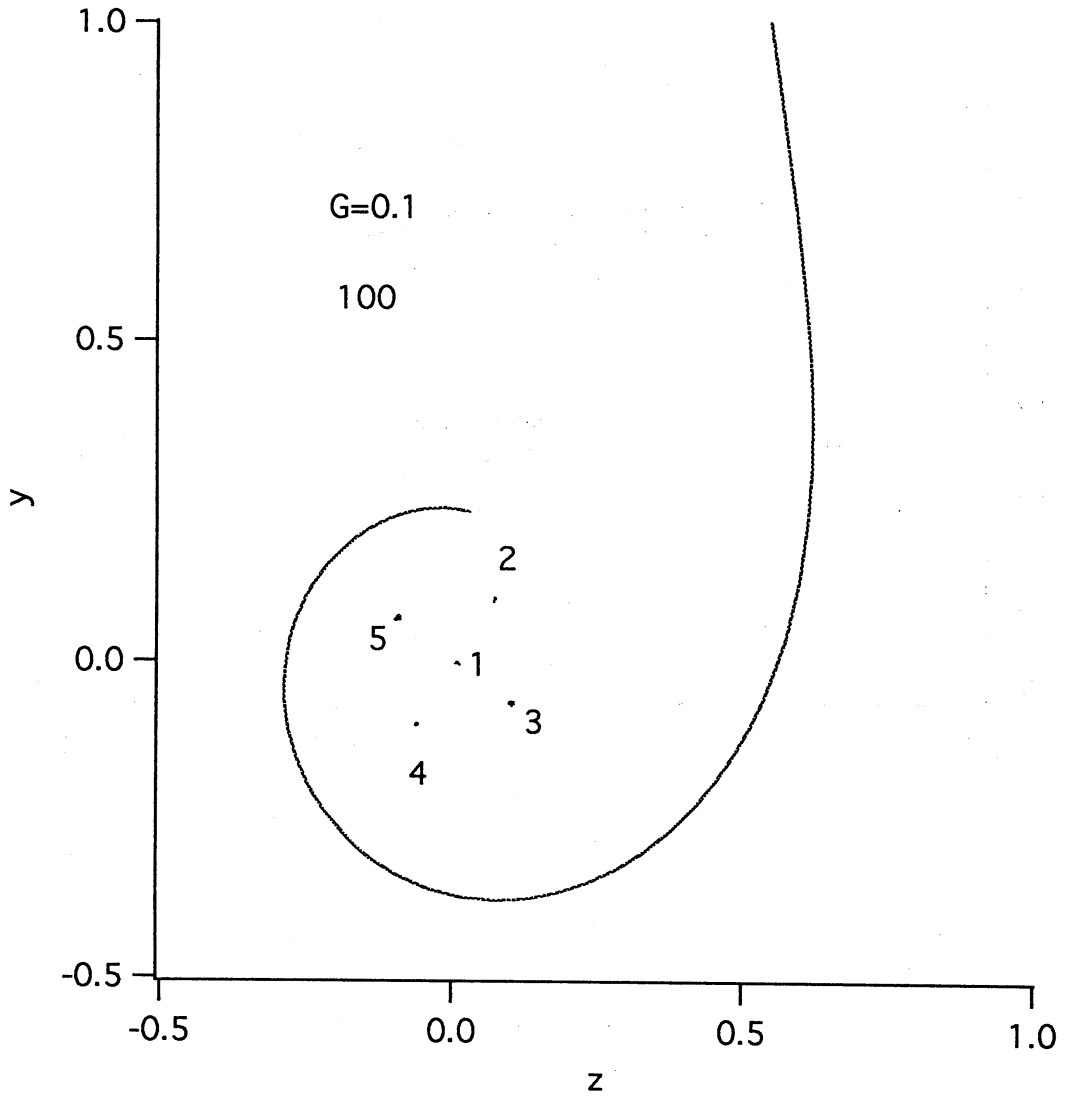
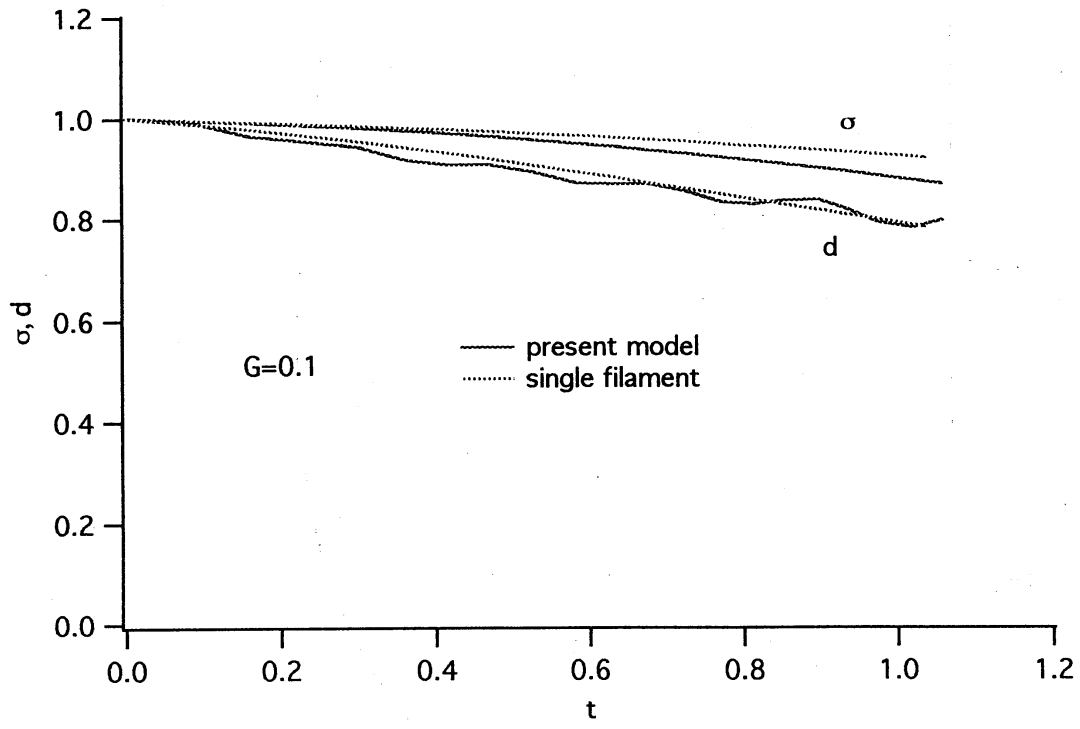


图 6 b



17) 7