

2次元準地衡近似方程式とそのモデル

広島大学総合科学部 大木谷 耕司 (Koji OHKITANI)

東京大学数理科学研究科 山田 道夫 (Michio YAMADA)

I. はじめに

非圧縮性流体が自発的に特異性を生むことがあるかどうか？これは理論流体力学における未解決な基本的問題の1つである。とりわけ3次元オイラー方程式に関する問題は、これまで多くの研究者によっていわゆる発達した乱流のエネルギーカスケード過程の発生に関連して数値解析的、数学的にさかんに研究されてきた。この問題は、近年開発された大型計算機をもってしても、直接数値計算だけでは解決困難である。

最近ある種の2次元流体系がこの問題に関連して注目を集めている ([1-2])。この方程式は地球流体现象に関連して現れるもので準地衡近似方程式と呼ばれ、一見、大域的に解の正則性が知られている2次元オイラー方程式に似ている ([3])。しかし Constantin らの研究によって、この準地衡近似方程式は、多くの解析的性質の点で、むしろ3次元オイラー方程式に類似していることが指摘された。彼らは、さらに直接数値計算を行ない、得られたデータから有限時間で解が爆発すると考えられることを指摘している。この解釈は彼ら自身が証明した解の爆発の判定基準と両立するものであるが、解の爆発そのものが証明されているわけではない。

本稿では、彼らが特異性を生む候補としてあげたものと同じ初期条件を用いて準地衡流を数値解析的に詳しく再検討する。第2章は準地衡近似方程式の説明で、第3章で非粘性問題を取り扱う。ここでは、彼らの報告している数値データを、より高い精度の数値計算で追試する。我々はこの結果について、Constantin らとまったく異なる解釈を与える。すなわち、温度勾配は、時間に関して指数関数の指数関数のように増加するという解釈が可能であることを示す。第3章では、わずかに粘性をもった問題を取り扱い、準地衡流においてカスケード過程が存在するか否か、を検討する。最後の第5章はまとめと議論にあてられる。なお、準地衡近似方程式の解はむしろ正則であるという結果が得られたので、当初本稿で議論する予定であった爆発を示す1次元のモデルについては説明を省略する。

II. 準地衡近似モデル

2次元準地衡近似方程式は次のような基礎方程式に従う：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = \nu \Delta \theta, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = (-\partial_y \psi, \partial_x \psi), \quad (2)$$

$$\theta = -(-\Delta)^{1/2} \psi. \quad (3)$$

ここで \mathbf{u} , θ , ψ はそれぞれ速度、スカラー温度、流れ関数を表す。最後の関係 (3) において指数 $1/2$ のある点が通常の2次元オイラー方程式と異なっている。

この系はもともと地球流体力学的な文脈において導かれたもので、小さなロスビー数と小さなエクマン数をもつ成層流体の運動を記述する (例えば [3-4] を参照)。最近この系が、自発的特異点を生む可能性をもつ非圧縮流体系として注目された。3次元オイラー方程式との類似については、論文 [2] を参照してほしい。ここでは、簡単に従来の研究の動機と結果をまとめておく。

3次元オイラー方程式の場合のエネルギーに対応して、準地衡近似方程式では空間平均 $\langle \theta^2 \rangle$ が非粘性保存量となる。粘性があるときにはこれは

$$\frac{d}{dt} \langle \theta^2 \rangle = -\nu \langle |\nabla \theta|^2 \rangle \quad (4)$$

を満足する。ここでは、粘性率を小さくする極限での流れのふるまいが興味深い。というのは、高レイノルズ数の乱流で期待される、非粘性極限における有限のエネルギー散逸率に関して示唆が得られる可能性があるからである。

以下の2つの疑問を、数値的に取り扱う。

1. 非粘性の場合に、滑らかな初期条件から有限時間で解の爆発が生じるか？
2. 非粘性極限の場合に、積分 $\langle \theta^2 \rangle$ が有限時間で突然減衰をはじめるか？

III. 非粘性問題

方程式系 (1) の解の特異性とは、無限大の温度勾配が形成されることである。これは 3 次元オイラー方程式の解の特異性が無限大の渦度として現れること（古典的な Beale-Kato-Majda の判定基準）に対応する。Constantin 他による興味深い論文 [2] で温度 θ のレベルセットの幾何学的形状が解の正則性／特異性を制御するのに重要な役割をすることが証明された。とりわけ、彼らは、特異領域には温度場のサドル（鞍部点）が含まれていなければならないことを示している。

数値解析的には、解の特異性を支持するある程度の結果が報告されている。彼らは周期境界条件の下で、次のようなサドルを含む簡単な初期条件

$$\theta = \sin x \sin y + \cos y \quad (5)$$

を用いて流れの時間発展を追った。数値実験によれば、 θ の勾配は有限時間で無限大になるかのように見える。さらに、彼ら自身によって証明された、特異性を検出する数学的な基準をこの流れが満たしていることも示されている。しかしながら、実際に爆発が起きるかどうか、理論的には証明はされていない。

そこで彼らの結果を追試することからはじめる。周期境界条件下で標準的な擬スペクトル法を用い、アライアジング誤差はいわゆる 2/3 則で除去する。時間発展は 4 次のルンゲクッタ法で行なう。 $N = 512, 1024, 2048$ という 3 種類の精度を用いた計算で、最大温度勾配の時間発展を log-linear プロットすることで、確かに成長は指数関数よりも速いことを確かめた（図省略）。また、温度の contour plot については [2] を参照のこと。Constantin らの解釈によれば、最大温度勾配は次のように振舞う：

$$\max |\nabla \theta| \propto (t_* - t)^{-\alpha}, \quad (6)$$

ここで \max は空間的な意味の最大値を表す。精度 $N = 1024$ の計算結果から、定数は $\alpha \approx 1.66$, $t_* \approx 8.25$ と推定されている。この振舞いを確認するため 図 1 に精度 $N = 512, 1024, 2048$ で $\max |\nabla \theta|^{-1/1.66}$ を、 $t_* - t$ を横軸にとってプロットした。2/3 則を考慮しても最後のものの精度は彼らのものより少し大きい。後半の時間帯でこれらの異なる精度の

計算によるカーブは1つに重なり、原点を通る直線に近い。さらに、 N を大きくしたとき直線からずれる時刻についても [2] と傾向は一致している。このようにして、彼らの数値計算結果そのものは検証できる。

しかし、彼ら自身によっても指摘されているように、このことが必ずしも解の爆発を意味しないことは言うまでもない。たとえば、試みに図2に $\log \log \max |\nabla \theta|$ を時間に対してプロットしてみる。するとこのグラフも、代数的に爆発していくように見えたのと同じ時間帯で、きれいな直線にのることがわかる。図2のふるまいがそのまま継続すると仮定すると、全く異なる結論、つまり、有限時間での発散などなしに2重-指数関数（指数関数の指数関数）的な増加が続く、ということになる。

このような解釈の多義性は非粘性の流体力学系で解の爆発の問題を取り扱う際いつも現れる問題である。どちらの（あるいは、さらに他の）解釈が正しいのかを、現在手にある非粘性の数値データから判断することはほとんど不可能である。しかも、全く新しい数値計算法が開発されない限り、近い将来に直接計算によってこの問題を解決することは困難であろう。現段階で結論できるのは、文献 [1-2] で与えられた数値計算データは、たとえ物理的なレベルの厳密性にとどまるにせよ、特異性の存在を結論するには不十分ということである。

次の章で使うため、ここでこの流れに生まれた準特異構造を温度のフーリエスペクトル

$$Q_{\theta}(k) = \sum_{k \leq |k| < k+1} |\tilde{\theta}(k)|^2 \quad (7)$$

を用いて特徴づけておく。ここで $\tilde{\theta}(k)$ は θ のフーリエ係数である。図3に $N = 2048$ の場合の $Q_{\theta}(k)$ を時刻 $t = 3, 4, 5, 6, 7$ （下から）においてプロットした。時間が進むにつれて、スペクトルには指数 -2 の巾則を持つ領域が形成されていくのが見える。この巾指数が $-5/3$ とははっきりと違うことを注意しておく。

ところでこのスペクトルは高レイノルズ数の2次元ナビエ-ストークス流に対する Saffman の理論 [5] 思い起こさせる。渦度（アクティブスカラーの一種）が薄い層状に分布しているという仮定の下で、彼はエネルギースペクトルが k^{-4} のように、つまりエンストロフィースペクトルが k^{-2} のように振舞うことを議論した。仮に Saffman の予想が我々の今取り扱っているアクティブスカラー、すなわち、温度 θ についても成り立つとすれば $Q_{\theta}(k) \propto k^{-2}$ という数値結果と一致する巾則が導かれる。

低波数モードだけが励起されている滑らかな初期条件から時間発展する2次元ナビエ-ストークス乱流については、多くの数値的な研究がある ([6-7])。これらの研究から、エネルギースペクトルの巾がごく初期の非粘性の段階では k^{-4} で後の粘性が重要になる段階では k^{-3} と変化する、ということが知られている。いうまでもなく、 k^{-3} はエンストロフィーカスケード理論 ([8-10]) からの予想と一致する。このことはスペクトルの巾指数はカスケード過程が始まると変化することを示唆している。次の章で、準地衡近似方程式のカスケード過程の有無を考察するときこのことがポイントになる。

小さいスケールの形成を監視する1つの確立された手法としていわゆる analyticity distance を見積もることがあげられる ([11])。実際には、analyticity distance はスペクトルのテイルを次の様にフィッティングすることによって評価できる:

$$Q_\theta(k) = A(t)k^{n(t)} \exp(-2\delta(t)k). \quad (8)$$

[10, $N/3$], [20, $N/3$] および [30, $N/3$] という3つの区間をもちいて最小自乗法によって $\delta(t)$ を決定し、この値がこれらの区間の選択にほとんど依存しないことを確かめた。図4に区間 [20, $N/3$] を用いて $N = 2048$ の場合の $\delta(t)$ の時間発展を、縦軸を対数表示で表している。 $N = 512, 1024$ および 2048 の場合の精度の限界: $\Delta = \pi/k_{\max}$ ($k_{\max} = N/3$) をグラフに上から順に書き入れてある。この判定基準によれば数値計算は $N = 2048$ の場合には $t \leq 7$ で $N = 1024$ では $t \leq 6.2$ 、そして $N = 512$ では $t \leq 5.5$ においてそれぞれ信頼できるとみなせる。

注意すべき点は計算が信頼できるとみなせる時間帯で $\delta(t)$ が時間に関して指数関数的に減少することである。このことは、このデータを素直に解釈し後の時間へ外挿すると、有限時間での爆発ではなく、むしろ、すべての時間で解は正則であることを示唆している。

IV. 粘性問題

非粘性の流れの場合に、爆発の有無を議論するため数値計算の精度を単に大きくしていくことは、少なくとも現時点では実際的とは言えない。そこで、この問題を考える動機に立ち帰り、わずかに粘性をもつながれを取り扱い非粘性極限での「乱流」の振舞いについて調べる。

ここではつぎの5種類の値の粘性率 $\nu = 5 \times 10^{-3}$, 2×10^{-3} ($N = 256$), 1×10^{-3} , 4×10^{-4} ($N = 512$), 1×10^{-4} ($N = 1024$) を用いた。レイノルズ数は、簡単に $R = 1/\nu$ と定義する。

重要な量は $\langle \theta^2 \rangle$ の散逸率 $\epsilon_\theta = 2\nu P(t)$ の粘性率についての依存性である。そこで図5に散逸率の時間発展をプロットした(上のグラフから下へと粘性率は小さくなる)。注意すべき点は、粘性率が小さくなるにつれ散逸率が、有限値に収束する気配を見せずどんどん小さくなっていくことである。このことは3次元ナビエ-ストークス乱流におけるエネルギー散逸率のふるまいと大きく性格が異なる。

この観察をさらに定量的にするため、図5で各曲線が最大となる点に注目しそこでのレイノルズ数依存性を検討する。まず、散逸率の最大値と粘性率との関係を図6に両対数グラフで示すと、きれいな直線的対応が見られる。より正確には最小2乗法を用いることにより

$$\epsilon_\theta \propto R^{-0.448} \quad (9)$$

と言う関係が導かれる。このことは、高レイノルズ数の極限で散逸率は消滅してしまうことを示唆しており、カスケード理論の大前提が失われる。

次に図5の横軸を考え、散逸率が最大となる時間を(大局的な)臨界時刻と呼び T_c で表す。図7 aに T_c と $\log R$ の関係を、図7 bに $\log \log R$ との関係プロットした。2つのグラフとも直線的な関係がある程度見えるがレイノルズ数の大きな領域で直線的にみえるのは図7 aの方である。このようにして T_c のレイノルズ数依存性の漸近的な公式として

$$T_c \propto \log R \quad (10)$$

が導かれる。これは2次元ナビエ-ストークス乱流においてエンストロフィーが減衰を開始する時間と同じ R -依存性である。また、 $P(t)$ は実は指数関数的に増加する(図省略)ことが分かっているのだが、この振舞いは(10)ともコンシステントになっている。

図8に各粘性率に対する $\langle \theta^2 \rangle$ の時間発展を、非粘性の場合もふくめてプロットした。3次元ナビエ-ストークス乱流の場合のような、エネルギーがある時間から突然減衰をはじめ(数値計算例として[12]を参照)兆候は見られない。このことは、散逸率が非粘性極限で消失するという(9)の結果とコンシステントである。

つぎに温度のフーリエスペクトルを考える。3次元乱流に対するKolmogorov理論や2次元乱流についてのBatchelor-Kraichnan-Leithの理論([8-10])に類似した $\langle \theta^2 \rangle$ のカス

ケード現象論が文献 [4] に述べられている。本質的な仮定は $\langle \theta^2 \rangle$ の散逸率 ϵ_θ が $\nu \rightarrow 0$ の極限でゼロではない有限値にとどまることである。すると次元解析によって

$$Q_\theta(k) = C \epsilon_\theta^{2/3} k^{-5/3} \quad (11)$$

という相似則が「慣性小領域」 $k \ll k_d \equiv (\epsilon_\theta/\nu^3)^{1/4}$ で成立することが期待される。ここで k_d は散逸波数である。図 9 に粘性 $\nu = 1 \times 10^{-4}$ の場合の $t = 4, 10, 15, 20$ の時刻のスペクトルをプロットした。散逸率が最大となる時刻 ($t = 13$) をすぎてもスペクトルは $k^{-5/3}$ よりも k^{-2} に近いことがわかる。

外力をもつ場合の定常流のフーリエスペクトルが文献 [4] において研究されている。それによると、慣性小領域での巾は -1.9 となっていて $-5/3$ よりも急である。この違いの原因として [4] では秩序構造の出現をあげられているが、本研究によれば（減衰乱流と定常乱流では巾は違わないとすれば）観測値は -2 であると解釈することが出来る。

さらに局所的な温度勾配に注目しそれが最大値となる時間なども検討した。この場合の（局所的な）臨界時刻 t_c もやはり R についての対数的な依存性を含んでいるようであり、現在の精度の数値計算結果からは

$$t_c \propto \log \log R \quad (12)$$

のように振舞うように見える（図省略）。以上のことから、高レイノルズ数の極限では $\langle \theta^2 \rangle$ は保存され、 $\langle \theta^2 \rangle$ のカスケードなど起こらないことを示唆している。また、詳しくは省略するが、 $\langle \theta^2 \rangle$ のスペクトルフラックスを調べたところ波数に依存しない一定の領域は観察されなかった。

V. まとめ

周期境界条件下の 2 次元準地平衡近似方程式の解のうち、Constantin ほかによって爆発する解の候補とみなされた流れを詳しく検討した。彼らの提出した数値データそのものは確認することが出来たが、その解釈には疑いが残ることが判明した。すなわち、非粘性のケースでは、温度勾配の成長が時間の 2 重指数関数で良くフィットできること、また analyticity distance が時間的に指数的に減少することがわかった。これらの結果は、解の有限時間の発

散はなく、(この傾向をそのまま外挿すれば)すべての時間で解は正則であることを示唆している。

次に粘性を少し加えた計算を行ない、カスケード過程の有無を検討した。その結果 $\langle \theta^2 \rangle$ の散逸率は粘性が小さくなる極限で消失してしまうことが分かり、この意味で2次元ナビエス-トークス乱流よりも 'おとなしい' 流れであることが判明した。

ここで取り扱った初期条件は1つだけであるが、これは Constantin らによって多くの初期条件を試した結果、選択された最も非線形性が強く現れるケースの1つであることを考えれば、他の初期条件でもやはり爆発は起こりそうもないことが予想される。

非圧縮2次元オイラー方程式の解の大局的な正則性は証明が得られて久しいが、そこでは渦度の保存則が本質的に重要であった。2次元非圧縮流体系で、この保存則がないケースでは一般に解の存在は時間的にローカルにしか分かっていない。特に、2次元では流れ関数が存在するなど、非圧縮性から幾何学的制約が強いと思われる。このような場合に爆発が起こらないことを解析的に示す方法を見つけることも今後の課題の1つであろう。一方、カスケード過程が起こらず、通常現象論的記述が成り立たないことは、地球物理的なモデルとしての2次元準地平衡近似の意味を再検討することが必要になる。

REFERENCES

- [1] P. Constantin, A. J. Majda and E. G. Tabak, 'Singular front formation in a model for quasigeostrophic flow,' *Phys. Fluids* **6** (1994)9.
- [2] P. Constantin, A. J. Majda and E. G. Tabak, 'Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar,' *Nonlinearity* **7**(1994)1495.
- [3] R. T. Pierrehumbert, I. M. Held, and K. L. Swanson, 'Surface quasi-geostrophic dynamics,' *J. Fluid Mech.* **282**(1995)1.
- [4] I. M. Held, R. T. Pierrehumbert, S. T. Garner and K. L. Swanson, 'Spectra of local and nonlocal two-dimensional turbulence,' *Chaos, solitons and fractals* **4**(1994)1111.
- [5] P. G. Saffman, 'On the spectrum and decay of random two-dimensional vorticity distributions at large Reynolds number,' *Stud. Appl. Math.* **50**(1971)377.
- [6] S. Kida, M. Yamada and K. Ohkitani, 'The energy spectrum in the universal range in two-dimensional turbulence,' *Fluid Dyn. Res.* **4**(1988)271.
- [7] M.E. Brachet, M. Meneguzzi, H. Politano and P.L. Sulem, 'The dynamics of freely decaying two-dimensional turbulence,' *J. Fluid Mech.* **194**(1988)333.
- [8] C. Sulem, P. L. Sulem and H. Frisch, 'Tracing complex singularities with spectral methods,' *J. Comp. Phys.* **50**(1983)138.
- [9] S. Kida and Y. Murakami, 'Kolmogorov similarity in freely decaying turbulence,' *Phys. Fluids* **30**(1987)2030.
- [10] G. K. Batchelor, 'Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence,' *Phys. Fluids* **12** Suppl. II (1969)233.
- [11] R. H. Kraichnan, 'Inertial ranges in two-dimensional turbulence,' *Phys. Fluids* **10**(1967)1417.

- [12] C. E. Leith, 'Diffusion approximation for two-dimensional turbulence,' *Phys. Fluids* **11**(1968)671.

图 1

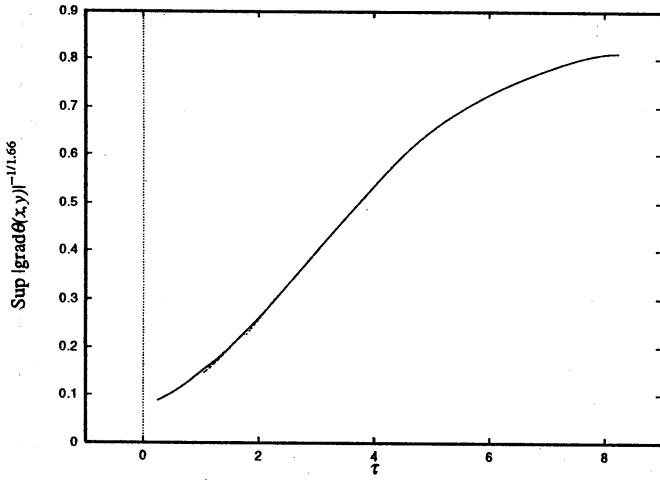


图 2

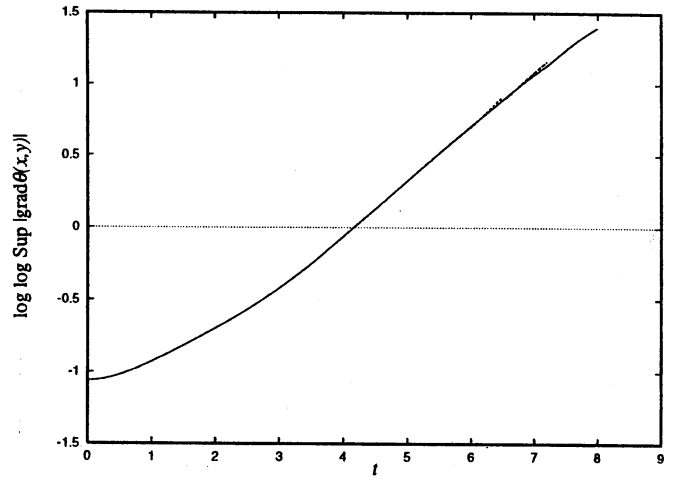


图 3

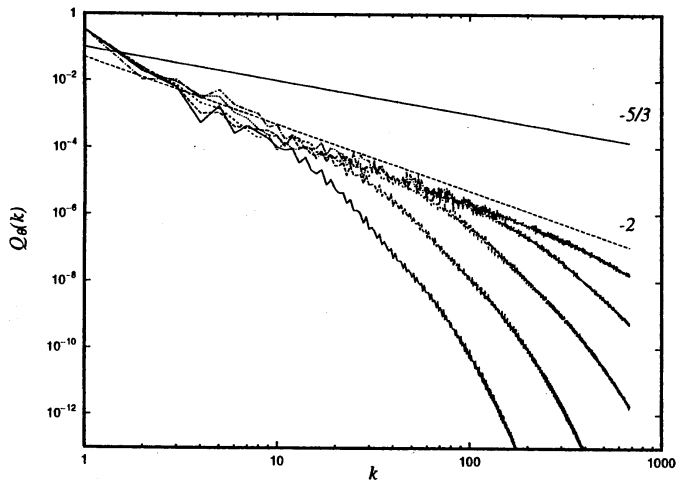


图 4

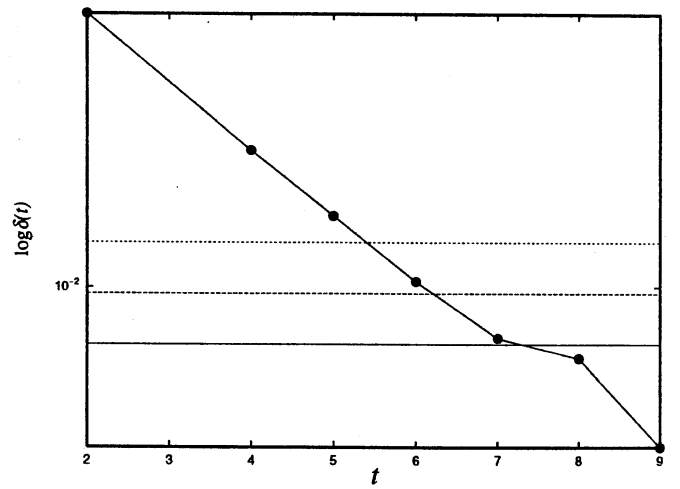


图 5

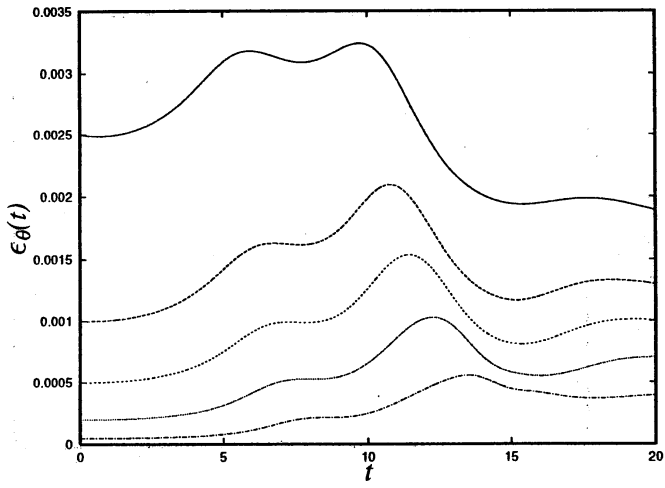


图 6

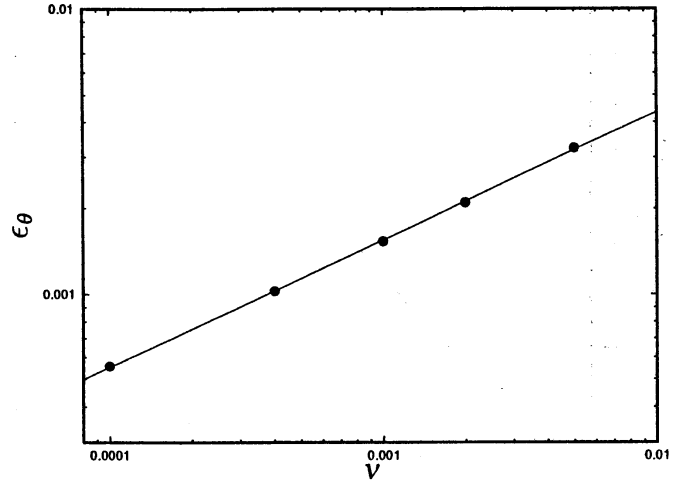


图 7a

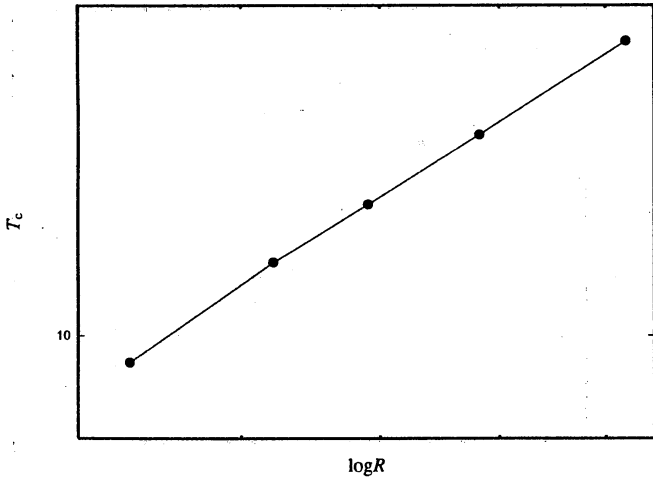


图 7b

