

非ホロノーム古典スピン系としての完全流体の運動

The Motion of a Perfect Fluid as a Non-holonomic Classical Spin System

東京大学大学院理学系研究科

小野 俊彦

Department of Physics, Graduate School of Science, University of Tokyo

Toshihiko Ono

Abstract

この報告は、流体の運動を従来から知られているのとは全く異なった考え方で捉え、分析する可能性を示すものである。この方法は、自然観察にたいする新しい見方を提供する一方で、自然現象、解析モデル、数値計算などで用いられる離散モデルの三者関係をもたらす。ここで、採用される力学系は、非ホロノームな拘束を受けた古典スピン系で、通常ホロノームなハミルトン力学系ほど良い性質を持たないものの、保存量としてハミルトニアンやカシミールを持っている。

Contents

<u>Section 1</u>	はじめに
<u>Section 2</u>	非ホロノーム拘束とは?
<u>Section 3</u>	コレクティブ・ハミルトニアン
<u>Section 4</u>	仮想仕事の原理
<u>Section 5</u>	アフィン接続
<u>Section 6</u>	ハイゼンベルグ・スピン模型
<u>Section 7</u>	完全流体の運動
<u>Section 8</u>	おわりに
References	

Section 1

はじめに

流体の運動には、オイラー的、ラグランジュ的二つの見方があることが知られている。このうちラグランジュ的な見方で、アーノルド [Ar], [Ar (text)] が完全流体の運動を体積保存微分同相写像の群上の測地線として定式化（厳密化は[EM]）して以来、マースデンら [MW2, MRW] は、力学系の簡約 [MW1] を通して得られるリー・ポアソン力学系の例としてオイラー的な非圧縮性及び圧縮性理想電磁流体の運動を示し、クレプシュ変数の意味を明らかにした。その後、非圧縮性理想電磁流体については [ZKa], [Ha], [O1] が、圧縮性理想電磁流体などを含むより一般の力学系については [O2, 3] が、アーノルドにならってラグランジュ的な視点でリーマン幾何学的な扱いをしている。リー・ポアソン系については、Section 3 で、ギルミン・スタンバーグ [GS] の導入したコレクティブ・ハミルトニアン観点から整理し、リーマン幾何学的な扱いは、Section 5 で、完全流体のような片側不変な速度の自乗の形をしたハミルトニアンをもつ力学系に限定して整理する。

ところで、流体の運動に別の見方は可能であろうか。Section 7 で示すように、完全流体に限って、流体の運動をハイゼンベルグの古典スピン模型に類似したものと見なすことができる。ただし、非ホロノームな拘束を受けているという点で、ハイゼンベルグ模型とは完全に異なっている。このような非ホロノームな（拘束条件を受けた）力学系は、物理学ではあまり注目されてはこなかったが、工学では十分現実的な系で、数学的な取扱いは [NF], [K], [BSn], [ScMa] などで進められてきた。

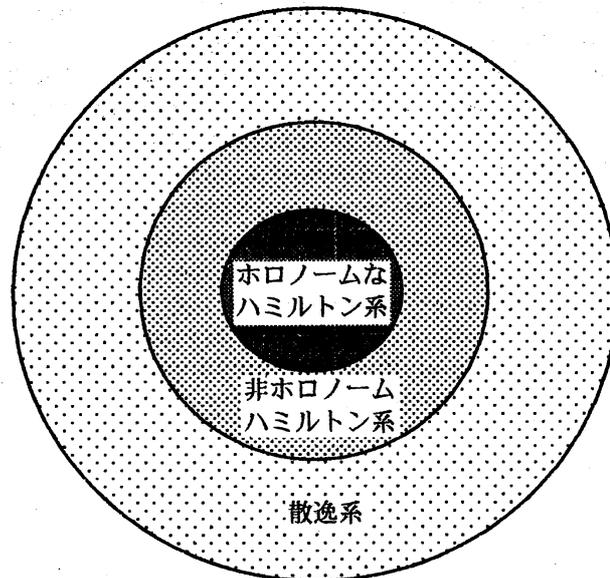


Fig. 1. 古典力学系

ここで、流体の新しい捉え方は、以下の通りである。つまり、流れそのものに実在を求めるのではなく、観察のしかたが流れを（認識をとおして）規定し存在させているという事実に着目する。（これは、あたかも実存主義的である。）そして、流体粒子を追跡せず、空間を固定して考え、純粹にオイラー的な見方をとる。まず、流体を含む領域に、高々加算個の観測点 D を設けよう。観測点には、あくまで仮想的で系に乱れをつくらない小さな歯車があって、その点での渦度を測定することができるとする。この歯車は、常に渦度方向を向き、渦度（またはその $1/2$ 倍）を角速度にもつとする。

そして、あとで明らかになるが、その角運動量は流体の速度になる。これは一見奇妙だが、渦力積 ([Sa] を参照) が速度場の体積積分と表面項の和で書けることを知っている、うなずける。また、この歯車と流体要素との違いは、歪まないところである。

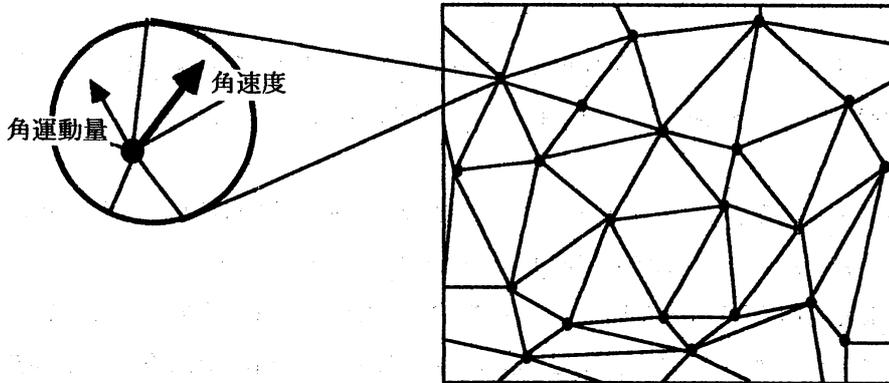


Fig. 2. 流体のスピン模型

この歯車の分布は、あたかもスピン系と考えることができ、全体はファイバーを \mathbf{R}^3 とし底空間を物理空間 M 上の観測点の集合 D とするようなファイバー束と見なすことができる。そして、この系の運動は、このファイバー束のゲージ群、つまり、 D から $SO(3)$ への写像のあつまりによって駆動される。流体の連続体モデルは、このような観測点 D を M で稠密にとれば得られ、それは M から $SO(3)$ への C^∞ 写像によって駆動される。

ここで、流体の運動は、十分小さな領域では連続体のそれとはみなせなくなるので、観測点を有限個にとることは現実的と言える。有限個の観測点を設けた場合、観測点で代表される角運動量としての速度は、各観測点で代表される要素内の気体(液体、ゲル)分子の熱または統計力学的速度の平均値と考えることができる。さらに、この有限個の観測点を設けたスピン・モデルは、数値計算の有限要素法の粗朴なものに近い。そして、観測点を無限個にとる極限によって、従来通りの解析モデルが得られるのである。

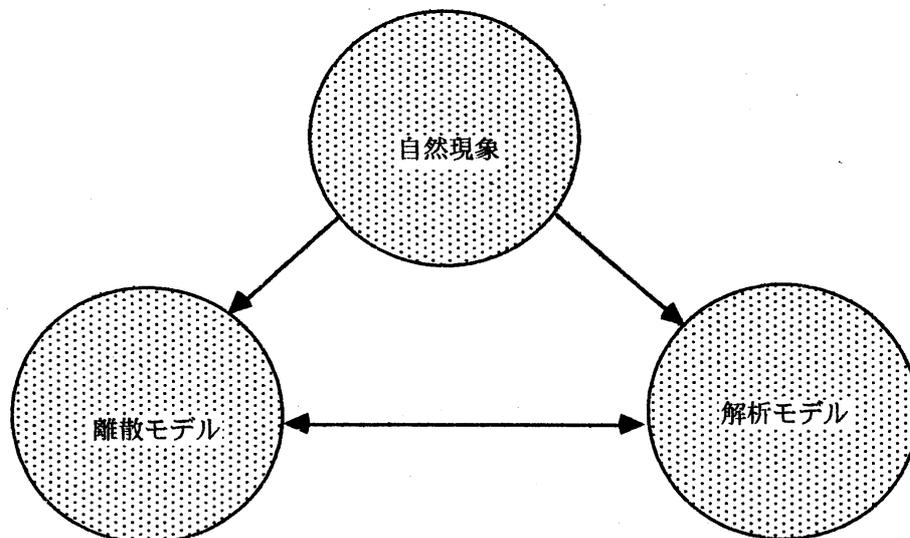


Fig. 3. 自然現象の記述

数値計算の目的は、解析的モデルの正当性の近似的検証とする考え方が支配的だが、離散モデルの方が解析的モデルより劣っている訳ではないはずである。離散モデル、解析的モデルの両方が自然現象の記述として対等になれるのである。そして、今回の研究は、これらのモデルの間関係を明確にする一つの方法を示すことができるのである。

最後に、この流体のスピン・モデルは、非圧縮性の流体でしかまだ成功していないことに注意しておく。より、一般の流体に対する理論の拡張はこれからの問題である。

尚、私がこの分野に入る契機を与えて下さった、神部勉教授、東北大学の服部裕司博士に深くお礼申し上げます。また、特に、東京大学の鈴木勝博氏、大阪市立大学の安井幸則博士、そして、吉田恭氏をはじめとする東京大学神部研究室の学生諸氏に、この分野での活発で有益な議論をしていただき、この場をかりて感謝を述べさせていただきます。また、渦線方程式についての議論のために九州を訪問いたしました折には、九州大学の福本助教授に、大変ご迷惑をおかけした上、有益なご助言を賜わりまして、改めてお礼申し上げます。

Section 2

非ホロノーム拘束とは?

あるハミルトン系に、ある拘束条件を課して得られる力学系が再びハミルトン系となれば、その拘束条件はホロノームであるといい、そうでない場合には、非ホロノームであると呼ばれる。ディラクの簡約やマースデン・ワインシュタインの簡約 [MW1] は、ホロノームな拘束条件による力学系の簡約の例であり、特に、その拘束条件にこれらの簡約法（実は、互いに等価と見なせる）が適用できる場合にホロノームと定義することができる。

ここで、非ホロノームな力学系の最も簡単な [BSn] にある例を一般化して示す。まず、次のハミルトニアン $H = \frac{1}{2}(p_1 p_1 + p_2 p_2 + p_3 p_3)$ (for $(p_1, p_2, p_3) \in T_x^* M$) によって規定される三次元物理空間 M の余接空間 $T^* M$ 上のハミルトン力学系を考えよう。勿論、この運動方程式は、 $\dot{p}_j = 0$, $\dot{x}_j = p_j$ (for $j = 1, 2, 3$) となる。これに次の拘束条件を課す。

$$p_3 - f(x_1, x_2)p_1 = 0 \quad (2.1)$$

これによって、運動方程式は次のように修正される。

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 - \lambda f(x_1, x_2) &= 0 \\ \dot{p}_2 &= 0 \\ \dot{p}_3 + \lambda &= 0 \\ \dot{x}_j &= p_j \quad (\text{for } j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (2.2)$$

未定係数 λ は (1.1) によって決まり、ハミルトニアン H は依然保存量である。この場合は、次のように、未定係数 λ を直接に運動方程式から取り除くことができる。

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + h(x_1, x_2)^{-1} \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_1} \dot{x}_1 \dot{x}_1 + h(x_1, x_2)^{-1} \frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_2} \dot{x}_2 \dot{x}_1 &= 0 \\ \ddot{x}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

for $h(x_1, x_2) = 1 + f(x_1, x_2)^2$.

$$\Leftrightarrow \quad \dot{m}_1 = 0, \quad \dot{m}_2 = 0 \quad \text{for} \quad m_1 = h(x_1, x_2)p_1, \quad m_2 = p_2. \quad (2.4)$$

もはや、この系はハミルトン系であるとは限らない。例えば、 $f(x_1, x_2) = x_2$ ならば、(1.3) はハミルトン系とならない。このような場合、(1.1) は非ホロノーム拘束条件である。

ところで、(1.3) は二次元空間上の捻率ゼロのアフィン接続 ∇ による測地線方程式になっている。事実、 ∇ は次のクリストッフェル記号 Γ_{ij}^k によって決まる。

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\partial \ln|h(x_1, x_2)|}{\partial x_1}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{\partial \ln|h(x_1, x_2)|}{2\partial x_2} \\ \text{other } \Gamma_{ij}^k &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

これは何らかの計量を保存するとは限らないが、非ホロノームの力学でも測地線として運動を扱うことができる。しかし、Section 5 で示す方法によって、(2.3) は、ハミルトニアン H による計量を保存する有捻率のアフィン接続 ∇ による測地線方程式ともみなせ、ヤコビ方程式から、この力学系の安定性を評価することができる。

Section 3 コレクティブ・ハミルトニアン

ここでは、ギルミン・スタンバーグ [GS] が導入したコレクティブ・ハミルトニアンの考え方を採用したハミルトン力学系の構成を [O3] に従って行い、その後、非ホロノームの場合への拡張を行う。

ハミルトニアン $H_p \in C^\infty(P)$ によって決まるポアソン多様体 P 上の質点の運動が、ある有限または無限次元のリー群 G によって駆動されているとする。つまり、 $H_p \in C^\infty(P)$ に対するハミルトニ

アン・ベクトル場 $X_{H_p} \in X(P)$ が、どの $x \in P$ に対しても $X_{H_p}(x) \in T(G \cdot x)$ となっているとする (このようなリー群 G は必ず存在する)。このとき、モーメント写像 $J: P \rightarrow g^*$ ([AbM (text)], [MR (text)], [GS (text)], [M (text)], [GS], [MW1], [MW2]) s.t.

$$X_{(J(x), \xi)} = \xi_p \in X(P) \quad (\xi_p \in X(P) \text{ は } P \text{ 上の } \xi \in g \text{ のリー代数表現}) \quad (3.1)$$

によって、 P 上の力学系はリー群 G のリー代数 g の相対空間 g^* (の部分空間) 上の力学系に簡約できる。その運動方程式は、 $F, H \in C^\infty(g^*)$ s.t. $F_p = F \circ J$, $H_p = H \circ J$ に対して、次のようなリー・ポアソン方程式になる。

$$\frac{d}{dt} F(\mu_t) = \{H, F\}_{LP}(\mu_t) \quad \text{for } \mu_t = J(x_t). \quad (3.2)$$

ここで、 $\{, \}_{LP}: C^\infty(g^*) \times C^\infty(g^*) \rightarrow C^\infty(g^*)$ はリー・ポアソン括弧で、

$$\{A, B\}_{LP}(\mu) = \left\langle \mu, \left[\frac{\partial A}{\partial \mu}, \frac{\partial B}{\partial \mu} \right] \right\rangle. \quad (3.3)$$

(3.2) は、次のような形にも書ける。

$$\frac{d}{dt} \mu_t = ad_{\frac{\partial H}{\partial \mu}}^* \mu_t. \quad (3.4)$$

多くの場合、次の関係を満たすカシミール関数 $C \in C^\infty(g^*)$ が存在する。

$$ad_{\frac{\partial C}{\partial \mu}}^* \mu_t = 0. \quad (3.5)$$

このカシミールによって、ハミルトニアンを $H^C = H + C$ と変形しても、運動方程式 (3.4) は変化しない。

ここで、この力学系に拘束条件を加える為に、リー代数 g が部分多様体 s と s^\perp の直和に分解できるとする。つまり、

$$g = s \oplus s^\perp. \quad (3.6)$$

包含写像 $\iota: s \rightarrow g$, $\iota_\perp: s^\perp \rightarrow g$ が存在し、射影 $\iota^*: g^* \rightarrow s^*$, $\iota_\perp^*: g^* \rightarrow s^{\perp*}$ によって、

$g^* = s \oplus s^{\perp}$ と直和分解が得られる。ただし、 $\mu \in g^*$, $u \in s$, $u_{\perp} \in s^{\perp}$ に対して、

$$\langle \mu, i(u) \rangle = \langle i^*(\mu), u \rangle, \quad \langle \mu, i_{\perp}(u_{\perp}) \rangle = \langle i_{\perp}^*(\mu), u_{\perp} \rangle \quad (3.7)$$

さて、(3.4) で決まる力学系に次のような拘束条件が与えられる場合を考えよう。

$$i^*(\mu_t - \mu_0) = 0 \quad (3.8)$$

この拘束条件によって、運動方程式 (3.4) は次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \mu_t = ad_{\frac{\partial H}{\partial \mu}}^* \mu_t + \eta \quad \text{with} \quad i^*(ad_{\frac{\partial H}{\partial \mu}}^* \mu_t + \eta) = 0. \quad (3.9)$$

$$(\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} i_{\perp}^* \mu_t = i_{\perp}^* ad_{\frac{\partial H}{\partial \mu}}^* \mu_t, \quad \frac{d}{dt} i^* \mu_t = 0.)$$

もし、 $\eta_t = ad_{\frac{\partial h}{\partial \mu}}^* \mu_t$ となる $h \in C^{\infty}(P)$ が存在すれば、(3.7) は、ハミルトニアンを $H + h \in C^{\infty}(P)$ とするホロノームなハミルトン系となる。とくに、 $\eta = ad_{i(\xi)}^* \mu_t \in g^*$ となる $\xi \in s$ が存在すれば、ディラクの簡約の手續きに従って、 s が G の部分リー群 S のリー代数となっているならば、 $i^*: g^* \rightarrow s^*$ はモーメント写像となり、マースデン・ワインシュタインの簡約法に従って、もとのハミルトニアン $H \in C^{\infty}(P)$ に対するホロノームなハミルトン系へと簡約される ([O3])。しかし、その他の場合、(3.9) によって得られる力学系は非ホロノームとなる。

前節で扱った例も、 G をハイゼンベルグ・リー代数をリー代数にもつリー群 ([So], [M (text)]) やその拡大 ([O3]) ととることで、この節で説明した形式にのる。

Section 4

仮想仕事の原理

前節で扱った力学系は、リー群 G 上での仮想仕事の原理によって導出することができる。とくに、(3.4) はオイラー・ラグランジの変分原理から導くことができる ([Ar], [MR (text)], [O3])。

対応するラグランジアン $L \in C^{\infty}(TG)$ は片側不変で、 G の接空間上の曲線 $\hat{C}: [t_i, t_f] \rightarrow TG$ の集

合 C に対して、作用 $S: C \rightarrow \mathbf{R}$ はつぎのようになる。

$$S(\hat{C}) = \int_{t_0}^{t_f} dt L(v_t^+) \quad (4.1)$$

ただし、 G 上の片側不変ベクトル場 $v_t^+ \in X(G)$ に対して、局所的に $\hat{C}(t) = (\phi_t, v_t^+(\phi_t)) \in TG$ とする。 $\mu_t^+ = \frac{\partial L(v_t^+)}{\partial v_t^+}$ に対して $H(\mu_t) = \langle \mu_t, v_t \rangle - L(v_t^+)$ とおくと、(4.1) の変分が消える条件として運動方程式 (3.4) と等価なオイラー(・ラグランジ)・ポアンカレ方程式が得られる。

ところで、非ホロノームであるかもしれない拘束条件 (3.8) が課せられている場合には、上のような変分原理は成り立たない。その代わりに、ダランベールの仮想仕事の原理が用いられる。同じ作用 (4.1) から出発して、 s^\perp によって生成される変分に限定することで、(3.9) が得られる。

Section 5

アフィン接続

拘束を受けないリー・ポアソン系のハミルトニアン $H \in C^\infty(g^*)$ が、 $\mu_t \in g^*$ について非退化な二次の形をしている場合、つまり、 $h: g \rightarrow g_0^* \subset g^*$ が弱リーマン構造 ([EM], [M1]) を次の内積 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle: TG \times TG \rightarrow \mathbf{R}$ によってきめ、

$$\langle\langle v_1^+(\phi), v_2^+(\phi) \rangle\rangle = \langle h(v_1), v_2 \rangle. \quad (5.1)$$

逆写像 $h^{-1}: g_0^* \rightarrow g$ によってハミルトニアン $H^C = H + C \in C^\infty(g^*)$ が次のように書ける場合、

$$H^C = \frac{1}{2} \langle \mu, h^{-1}(\mu) \rangle. \quad (5.2)$$

運動方程式 (3.4) はリーマン接続 (= レビ・チビタ接続 = 捻率ゼロで計量的アフィン接続) ∇ による測地線方程式になることが知られている ([Ar], [Ar (text)]).

$$\nabla_{v_t^+} v_t^+ = 0. \quad (5.3)$$

そして、より広いハミルトニアンに対しても同様の取り扱いができる ([O2], [O3])。この方法の利

点は、断面曲率の符号によって、解の不安定性を調べることができることで、定常解についてのエネルギー・カシミール法（アーノルドのリアプノフ法）（[Ar], [Ar (text)], [M (text)], [MR (text)]）と深く関係している（これは自然なことで、[O3]を参照。また、これに関しては安井博士との議論からヒントを得た）。

拘束を受ける場合でも、運動方程式(3.8)を測地線方程式とみなすことができる（[K]）。しかし、この場合、接続はリーマン接続とはならず、一意でもない。ここで、一つの自然な接続 ∇^π を導入するために、(5.1)の計量について、 s と s^\perp は直交しているとする。

$$s \perp s^\perp. \quad (5.4)$$

得られる直交射影 $\pi: X(G) \rightarrow i(s)^\perp \subset X(G)$ によって、接続 ∇^π は、もとのリーマン計量(5.1)に対するリーマン接続 ∇ による共変微分を直交射影したものである。

$$\nabla_{v_1}^\pi v_2^+ = \pi(\nabla_{v_1} v_2^+) \quad (5.2)$$

この接続 ∇^π の捻率 $\hat{T}(v_1, v_2) = \nabla_{v_2}^\pi v_1 - \nabla_{v_1}^\pi v_2 - [v_1, v_2]$ は、

$$\hat{T}(v_1, v_2) = \pi[v_1, v_2] - [v_1, v_2] \quad (5.3)$$

また、接続 ∇^π は、拘束条件のもとで、計量(5.1)を保存するので、ヤコビ方程式によって、解の安定性が調べられる。

Section 6

古典 ハイゼンベルグ・スピン模型

剛体のオイラー方程式は、リー・ポアソン方程式として解釈され、かつ、片側不変な計量によるリーマン接続で決まる測地線とも解釈される（[Ar], [R1, 2], [FeK]）。この系の最も単純な拡張が、古典ハイゼンベルグ・スピン模型である。

下図のように、 n ($n \geq 1$)次元空間内の各格子点上に、ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 （または \mathbf{C}^2 ）の内部空間を考える。格子点の集合は $D = \{1, \dots, N\}^n$ ($N \geq 1$) に等しく、 n 次元トーラス上の格子点の集

まりと見なせ、この上のファイバー束を考えていることになる。

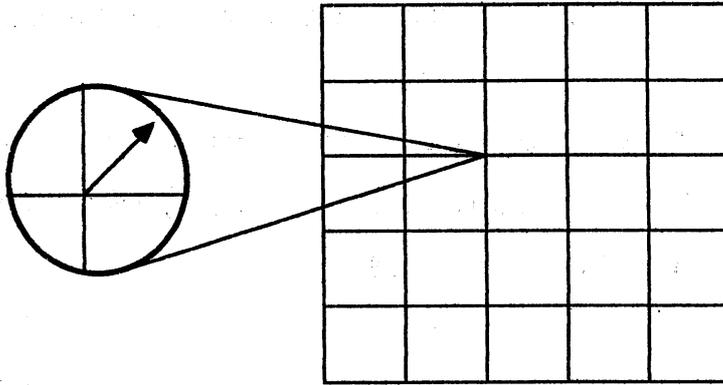


Fig.3. ハイゼンベルグ模型

この系の運動は、ゲージ群 $G = D \times SO(3)$ (または、 $D \times SU(2)$) に従うので、対応するモーメント写像によって g^* 上の運動と見なすことができる。

ところで、 $so(3) = su(2)$ の 2×2 の複素行列表現によって、次の行列 σ^j ($j=1,2,3$) は $so(3)$ のこの行列表現による基底となる。

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

キリング内積によって、 $so(3)$ と $so(3)^*$ を同一視することで $so(3)^*$ の行列表現が得られる。以後、 $so(3)$ 、 $so(3)^*$ の元はこの行列表現によって得られるものと同一視する。

このスピン系のハミルトニアンは、最近接相互作用項のみを含み、対称な双線形作用素 $J_\alpha : so(3)^* \times so(3)^* \rightarrow \mathbf{R}$ ($\alpha \in \{1, \dots, n\}$) によって次のようになる。

$$H = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, N\}^n} \sum_{\alpha \in \{1, \dots, n\}} J_\alpha(u_{(j_1, \dots, j_\alpha, \dots, j_n)}, u_{(j_1, \dots, j_{\alpha+1}, \dots, j_n)}) . \quad (6.1)$$

ここで、 $u_{(j_1, \dots, j_n)} \in so(3)^*$ はモーメント写像の像の元で、角運動量またはスピンとみなせ、運動方程式は、このハミルトニアンに対して (3.4) で与えられる。また、次の運動エネルギー項は、(3.4) でカシミールとなっている。

$$K = \frac{1}{2} \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, N\}^n} \text{tr}(u_{(j_1, \dots, j_n)} u_{(j_1, \dots, j_n)}) . \quad (6.2)$$

従って、ハミルトニアン $H^c = H + cK$ ($c \in \mathbf{R}$) を用いてもよい。この場合、まさにこのハミルトニアンは $c > 0$ に対して (5.2) の形をしているので、運動方程式は測地線と見なすことができる。

ところで、格子点を十分細かくとることで、(うまい極限をとることで) 連続的な模型が得られる。この系の運動は、ゲージ群 $G = C^\infty(D, SO(3))$ (または、 $C^\infty(D, SU(2))$) に従い、対応するモーメント写像によって \mathfrak{g}^* 上の運動と見なすことができる。とくに、 $u_1, u_2 \in \mathfrak{so}(3)^*$ にたいして、 $J_\alpha(u_1, u_2) = \text{tr}(u_1 u_2)$ となる場合、ハミルトニアン $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ は次のようになる。

$$H = \frac{1}{2} \int_M \text{vol}_x(M) \text{tr}(u \Delta u) \quad (6.3)$$

やはり、次の運動エネルギーはカシミールになる。

$$K = \frac{1}{2} \int_M \text{vol}_x(M) \text{tr}(uu) \quad (6.4)$$

従って、この場合も、ハミルトニアン $H^c = H + cK$ ($c \in \mathbf{R}$) を用いることができ、 $c > 0$ に対して、運動方程式は測地線と見なすことができる。

とくに、空間の次元 n が一次元るとき、連続古典ハイゼンベルグ・スピン模型は、渦糸の方程式と深く関係している ([F], [SuOKa])。

Section 7

完全流体の運動

ようやく、この報告の主題である完全流体の運動を考える段階がやってきた。ここでは、前節で扱った連続スピン模型と同様に、ゲージ群 $G = C^\infty(D, SO(3))$ (または、 $C^\infty(D, SU(2))$) に従う運動を考える。流体の運動に関わるハミルトニアン $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ は次のようになる。

$$H = \frac{1}{2} \int_M \text{vol}_x(M) \sum_j \text{tr}(u \sigma^j \partial_j u) \quad (7.1)$$

$\mathfrak{so}(3)$ の基底 σ^j を三次元ベクトル空間の基底とみなすと、これはヘリシティ (の半分) に他ならない。

$$H = \frac{1}{2} \int_M \text{vol}_x(M) u \cdot \omega \quad (\omega_t = \text{rot } u_t) \quad (7.2)$$

また、運動エネルギー (6.4) はカシミールになる。

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_M \text{vol}_x(M) \sum_j \text{tr}(uu) \\ &= \frac{1}{2} \int_M \text{vol}_x(M) u \cdot u \end{aligned} \quad (7.3)$$

これより、ハミルトニアン $H^c = H + cK \in C^\infty(g^*)$ を (7.1) の代わりに用いることができる。そして、運動方程式 (3.5) は次のような形になる。

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = u_t \times \omega_t \quad (7.4)$$

これに次の非圧縮性を意味する非ホロノームな拘束条件を課す。

$$\text{div } u_t = 0 \quad (7.5)$$

これは、次のような (3.8) の形に書ける。

$$\int_M \text{vol}_x(M) \text{tr}(u \sigma^j \partial_j q) = 0 \quad , \quad \text{for } \forall q \in C^\infty(M) \quad (7.6)$$

この拘束条件によって、運動方程式 (7.4) は次の形になる。

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = u_t \times \omega_t - \nabla p \quad (7.7)$$

この系の場合でも、ハミルトニアン $H^c = H + cK \in C^\infty(g^*)$ は、 $c > 0$ に対して、(5.2) の形をしているので、(7.7) は測地線方程式として見なすことができ Section 5 の方法が適用される。

最後に、この流体のスピンのモデルの離散化を考えよう。一つの離散モデルは、次のハミルトニアン（ヘリシティ）で与えられる。

$$H = \int_M \text{vol}_x(M) \text{tr}(u_{(l,m,n)} \omega_{(l,m,n)}) \quad (7.8)$$

ただし、 $\Omega_{(l,m,n)} = \sigma^1(u_{(l+1,m,n)} - u_{(l-1,m,n)}) + \sigma^2(u_{(l,m+1,n)} - u_{(l,m-1,n)}) + \sigma^3(u_{(l,m,n+1)} - u_{(l,m,n-1)})$ に対して、 $\omega_{(l,m,n)}$ は次のように決まる。

$$\omega_{(l,m,n)} = \Omega_{(l,m,n)} - \frac{1}{2} \text{tr}(\Omega_{(l,m,n)}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

また、カシミールである運動エネルギー K は、(6.4) で与えられ、運動方程式は、

$$\frac{d}{dt} u_{(l,m,n)} = u_{(l,m,n)} \times \omega_{(l,m,n)} \quad (7.10)$$

これに課せられる (7.5) に対応する非ホロノームな拘束条件は、

$$\text{tr}(\Omega_{(l,m,n)}) = 0 \quad (7.11)$$

これを (7.6) に対応する形で書くと、

$$\int_M \text{vol}_x(M) \sum_j \text{tr}(q_{(l,m,n)} \Omega_{(l,m,n)}) = 0 \quad \text{for } \forall q_{(l,m,n)} \in \mathbb{R} \quad (7.12)$$

この拘束条件によって、運動方程式 (7.10) は次の (7.7) に対応する形になる。

$$\frac{d}{dt} u_{(l,m,n)} = u_{(l,m,n)} \times \omega_{(l,m,n)} - \nabla p_{(l,m,n)} \quad (7.13)$$

for

$$\nabla p_{(l,m,n)} = \sigma^1(p_{(l+1,m,n)} - p_{(l-1,m,n)}) + \sigma^2(p_{(l,m+1,n)} - p_{(l,m-1,n)}) + \sigma^3(p_{(l,m,n+1)} - p_{(l,m,n-1)})$$

この離散系でも、ハミルトニアン $H^c = H + cK \in C^\infty(g^*)$ は、 $c > 0$ に対して、(5.2) の形をしているので、(7.13) は測地線方程式として見なすことができ Section 5 の方法が適用される。

Section 8

おわりに

著者は、離散モデルの方が解析モデルより自然記述の方法として劣っている訳ではないと思っている。また、もとの解析モデルを検証する為に離散化する場合でも、離散化する前後で、なんらかの同じ幾何学的または代数的構造を保持させるべきだと思う。

さらに、今回新しく示された流体のモデルに散逸をいれることも可能であることも付しておく。しかし、この離散モデルは、依然として連続な時間に依存している。当然、数値計算の場合は、時間も離散化されねばならないので、この点についても研究されねばならない。

References

- [AbM (text)] R. Abraham and J.E. Marsden, 1978, "Foundation of Mechanics", 2nd edn. (Addison-Wesley).
- [Ar] V.I. Arnold, 1966, Ann. Inst. Fourier, **16** 319.
- [Ar (text)] V.I. Arnold, 1978, "Mathematical Methods of Classical Mechanics", (Springer: New York).
- [BSn] L. Bates and J. Sniatycki, 1993, Rep. on Math. Phys. **32** 99-115.
- [EM] D. Ebin and J.E. Marsden, 1970, Ann. Math. **90** 102-163.
- [F] L. Faddeev and L. Takhtajan, 1980, "Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons", (Springer-Verlag: Berlin).
- [FeK] YU.N. Fedorov and V.V. Kozlov, 1993, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **168** 141-171.
- [GS] V. Guillemin and S. Sternberg, 1980, Ann. Phys. **127**, 220-253.
- [GS (text)] V. Guillemin and S. Sternberg, 1984, "Symplectic Techniques in Physics", (Cambridge Univ. Press).
- [Ha] Y. Hattori, 1994, J. Phys. A **27** L21-25.
- [HK] D. Holm and B. Kupersmidt, Physica D **6** 347-363.
- [K] J. Koiller, 1992, Arch. Rational Mech. Anal. **118** 133-148.
- [M1 (text)] J.E. Marsden, 1981, "Lecture on Geometric Methods in Mathematical Physics", (Society for Industrial and Applied Mathematics : Philadelphia, Pennsylvania).
- [M2 (text)] J.E. Marsden, 1992, "Lectures on Mechanics", (Cambridge Univ. Press).
- [MR (text)] J.E. Marsden and T.S. Ratiu, 1994, "Introduction to Mechanics and Symmetry", (Springer-Verlag: Berlin).
- [MRW] J.E. Marsden, T. Ratiu and A. Weinstein, 1984, Trans. Am. Math. Soc. **281** 147-177.
- [MW2] J.E. Marsden and A. Weinstein, 1974, Rep. on Math. Phys. **5** 121-130.
- [MW2] J.E. Marsden and A. Weinstein, 1983, Physica D **7** 305-323.
- [O1] T. Ono, 1995, Physica D **81** 207-220.
- [O2] T. Ono, 1995, J. Phys. A **28** 1737-1751.
- [O3] T. Ono, 1996, Geom. and Phys. (submitted).
- [O4] T. Ono, 1995, 数理解析研究所講究録, 922 82-98.
- [R1] T. Ratiu, 1981, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **78** 1327-1328.
- [R2] T. Ratiu, 1982, Amer. J. Math. **104** 409-448.
- [ScMa] A.J. van der Schaft and B.M. Maschke, 1994, Rep. on Math. Phys. **34** 225-233.
- [Sa (text)] P.G. Saffman, 1992, "Vortex Dynamics", (Cambridge Univ. Press).
- [SuOKa] K. Suzuki, T. Ono, and T. Kambe, in preparation.
- [ZKa] V. Zeitlin and T. Kambe, 1994, J. Phys. A **26** 5025-5031.