

## 曲がり管内流の Görtler 型攪乱に対する非線形安定性

同志社大学・工 水島 二郎 ( Jiro MIZUSHIMA )

岡山大学・工 柳瀬眞一郎 ( Shinichiro YANASE )

同志社大学・工 吉澤 卓 ( Taku YOSHIZAWA )

### 1 はじめに

矩形断面の曲がり管内を流れる流れの定常解を得ることは、工学的応用の関心からだけでなく、分岐理論の観点からも流体力学の重要なテーマである。曲がった矩形管の中の流れの層流解の分岐については古くから研究されてきた。Winters (1987)<sup>1)</sup> は有限要素法を用いて正方形に近い断面を持つ矩形管の解の分岐を初めて詳しく調べ、複数の定常解が存在するが安定なものはほとんどないことを明らかにした。矩形管の縦横比を変化させることによる効果は Yanase & Nishiyama (1988)<sup>2)</sup>, Finlay & Nandakumar (1990)<sup>3)</sup>, Thangam & Hur (1990)<sup>4)</sup> により研究された。縦横比を無限に大きくした極限は無限曲板間の流れとなり、特に板に曲率のない場合は平面 Poiseuille 流として流体力学の中心的な研究課題である。無限曲板間流れの解析的な取り扱いは、有限アスペクト比をもつ長方形管内流に関する問題よりも、かなり容易になる。この問題の一次元的流れの線形安定性解析は、Gibson & Cook(1974)<sup>5)</sup> によって行われた。流れの支配パラメータであるディーン数がある臨界値を越える場合、定常な二次流が生じ、Görtler 型渦を形成する。本論文では、これを単に Görtler 渦と呼ぶ。両壁が曲率を持つ場合は工学的応用において非常に重要であるだけでなく流れ方向に渦度を持つ Görtler 型の二次流を含む流れとして理論的にも大変興味深い。最近、この流れの非線形発展を数値的に計算する試みも盛んになりつつある。Finlay, Keller & Ferziger(1988)<sup>6)</sup> は、スペクトル法を用いて数値的に攪乱の時間発展を調べた。Daudpota, Hall & Zang(1988)<sup>7)</sup> は、弱非線形解析を行った。また、Guo & Finlay(1994)<sup>8)</sup> は、空間的安定性解析を行った。

曲がり管内流に関する実験的研究も行われてきた。Ligrani & Niver(1988)<sup>9)</sup> は、Görtler 渦の存在を示すキノコ型パターンが可視化技法によって曲がり管内流で観察されることを示した。Bara, Nandakumar & Masliyah(1992)<sup>10)</sup> は、正方形断面の曲がり管内流に関する実験を行った。

流れが主流方向に一様であることを仮定して、曲率の効果の最低次だけを考慮する近似は最初に行った研究者の名前を冠してディーン近似と呼ばれている (Dean, 1927, 1928).<sup>11), 12)</sup> Yanase, Yamamoto & Yoshida(1994)<sup>13)</sup> は、曲率パラメータが 0.1 より小さい場合、ディーン近似が定常解に関して妥当であることを示した。この近似を用いると方程式が非常に単純化され理論的な取り扱いには便利である。したがって、無限曲板間の Görtler 型の渦を含む流れの非線形解析を行う最初の段階としてこの近似を導入することは大変有意義であると考えられる。この近似を行って得られる方程式は鉛直平板間の熱対流、水平流体層におけるベナール対流を支配する方程式と類似した形となる。Fujimura & Mizushima (1987)<sup>14)</sup> は鉛直平板間の熱対流において攪乱の 1:2 共鳴が起こることを示した。また、Mizushima (1993)<sup>15)</sup> は上面がすべり境界条件、下面が粘着境界条件をもつ水平流体層におけるベナール対流において 1:2:3 共鳴が起こることを示した。それらの流れに共通なことは臨界状態において安定性の交替 (Exchange of Stability) が起こり、第一分岐点 (臨界点) がピッチフォーク分岐で、しかもわずかに臨界状態を越えた点で幅広い波数領域の攪乱に対して流れが不安定になることである。非常に曲率の小さな無限曲板間の流れの安

定性も同様の特徴をもっており、この流れにおいても波数間の共鳴が起こることが期待される。

ここでは、無限に広い曲壁の間を流れる流れをディーン近似に基づいて調べる。まず線形安定性を調べ、次に弱非線形安定性理論を用いて1:2共鳴を含む振幅方程式を導き、平衡振幅(単一モード解, 1:2共鳴解)を計算する。この結果を非線形の大きさを制限しない関数展開打ち切りによる数値計算の結果と比較検討する。また、弱非線形安定性理論を用いて1:2:3共鳴を含む振幅方程式を導き、平衡振幅を求めることも試みた。また、数値解析を確認するために、実験を行った。

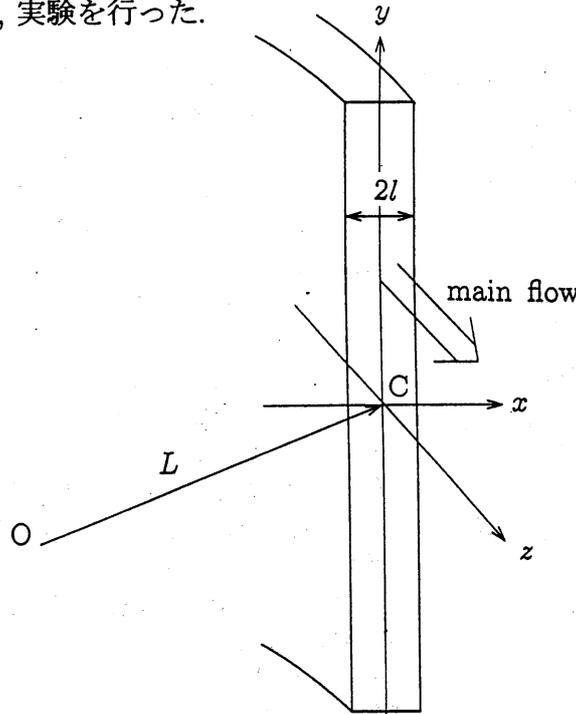


図1. 配置図と座標系.

## 2 基礎方程式と線形安定性

曲がった矩形管の中の流れを考える(図1). 矩形管の縦横比を無限大とすると、一定の曲率をもつ二枚の平行な曲板の間を流れる流れを考えることと同等である。座標系は流れの方向に  $z$  軸を、二枚の板に垂直に  $x$  軸を、スパン方向に  $y$  軸をとる。二枚の板の間隔を  $2l$ 、板の曲率半径を  $L$  とし、曲率を表すパラメータを  $\epsilon = \sqrt{2l/L}$  で定義する。流れ場は、流れ方向( $z$  方向)に一様( $\partial/\partial z = 0$ )であると仮定する。矩形管の曲率は有限ではあるが小さいと仮定し、曲率  $\epsilon \rightarrow 0$  にしながら、レイノルズ数  $Re \rightarrow \infty$  として  $\epsilon Re$  を一定にするディーン近似を導入する。代表長さとして  $l$ 、代表速度として二枚の板の間  $x = y = z = 0$  での流速  $U_0$  を用いて無次元化を行うと、流体の速度  $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  および圧力  $p$  を支配する基礎方程式は次のように書ける。ただし、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は、それぞれ  $x, y, z$  方向の単位ベクトルを表す。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{2} \epsilon^2 w^2 \mathbf{i} + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}. \quad (2.2)$$

ここで,  $\nabla$  は,  $\nabla = \partial/\partial x \mathbf{i} + \partial/\partial y \mathbf{j}$  である. また,  $Re$  はレイノルズ数であり,  $Re = U_0/\nu$  で定義される. 速度  $\mathbf{u}$  に対する境界条件は

$$u = v = w = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm 1 \quad (2.3)$$

となる.

有限の縦横比をもつ矩形管の場合とは異なり縦横比が無限大の極限では, 平面 Poiseuille 流と同じ速度分布をもつ一次元的な流れの定常解が得られる. これを主流と呼び,  $\bar{\mathbf{u}} = \bar{w}(x)\mathbf{k}$  とおくと,  $\bar{w}(x)$  は次の式で表される.

$$\bar{w}(x) = \frac{1}{2} C Re (1 - x^2) = 1 - x^2. \quad (2.4)$$

ここで  $C$  は  $z$  方向の平均圧力勾配  $C = 2/Re$  である. このとき圧力  $\bar{p}(x, z)$  は

$$\bar{p}(x, z) = \frac{1}{2} \epsilon^2 \int_0^x \bar{w}(x')^2 dx' - \frac{2}{Re} z + p_0 \quad (2.5)$$

と表される. ここで,  $p_0$  は  $x = z = 0$  における圧力である.

ここでは, Görtler 渦形の攪乱にのみ注目し, 流れ場は  $z$  方向に一様 ( $\partial/\partial z = 0$ ) であると仮定する. この基本流に攪乱を加える. 攪乱速度ベクトル  $\hat{\mathbf{u}}$  を  $\hat{\mathbf{u}} = \epsilon \hat{u} \mathbf{i} + \epsilon \hat{v} \mathbf{j} + \hat{w} \mathbf{k}$  として, 速度  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}$ , 圧力  $p = \bar{p} + \epsilon^2 \hat{p}$  とおき,  $t$  を  $\tau = \epsilon t$  と変換する.  $Dn = \epsilon Re$  を用いると,  $\hat{\mathbf{u}}$  と  $\hat{p}$  に対する方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \hat{u} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{v} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} - \bar{w} \hat{w} - \frac{1}{Dn} \Delta \hat{u} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = -(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{u} + \frac{1}{2} \hat{w}^2, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} - \frac{1}{Dn} \Delta \hat{v} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} = -(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{v}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} + \hat{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \frac{1}{Dn} \Delta \hat{w} = -(\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \hat{w} \quad (2.9)$$

となる. すなわち, (2.6)-(2.9) では2つのパラメータ  $\epsilon$  と  $Re$  は独立ではなくなり, その積の  $Dn = \epsilon Re$  の形でこの問題に影響を与える.

線形安定性を調べるために,  $\hat{\mathbf{u}}$  を  $y$  方向に関してフーリエ分解し, その一成分のみを考える. また, 時間に関しても  $\hat{\mathbf{u}} \propto \exp(\omega t)$  であると仮定する. すなわち,

$$\hat{\mathbf{u}} = {}^t(u_1, v_1, w_1) \exp[i\beta y + \omega \tau], \quad (2.10)$$

と仮定する. 方程式(2.7),(2.8),(2.9) を線形化し,  $\hat{v}$ ,  $\hat{p}$  を消去した後, (2.10) を代入すると,  $u_1$  と  $w_1$  に対する常微分方程式が次のように得られる. それぞれ次のようになる.

$$\frac{1}{Dn} (D^2 - \beta^2) w_1 - \left( \frac{d\bar{w}}{dx} \right) u_1 = \omega w_1, \quad (2.11)$$

$$-\bar{w} \beta^2 w_1 + \frac{1}{Dn} (D^2 - \beta^2)^2 u_1 = \omega (D^2 - \beta^2) u_1. \quad (2.12)$$

ここで、 $D \equiv d/dx$ である。 $u_1$  と  $w_1$  に対する境界条件は、次のようになる。

$$u_1 = Du_1 = w_1 = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm 1. \quad (2.13)$$

(2.11), (2.12) 式を境界条件 (2.13) のもとで解けば、固有値  $\omega$  が求められ安定性が決定される。

線形安定性解析は、Gibson & Cook(1974)<sup>5)</sup> により既に行われており、臨界ディーン数は  $Dn_c = 26.942$  で臨界波数は  $\beta_c = 1.975$  である (Gibson & Cook, 1974)<sup>5)</sup>。  $Dn$ - $\beta$  空間での線形中立安定曲線を図 2 に示す。ただし、点線は線形増幅率最大波数を表す。中立モードに対しては安定性交替の原理 'Principle of exchange of stability' が成り立ち、波としての位相速度はゼロである。

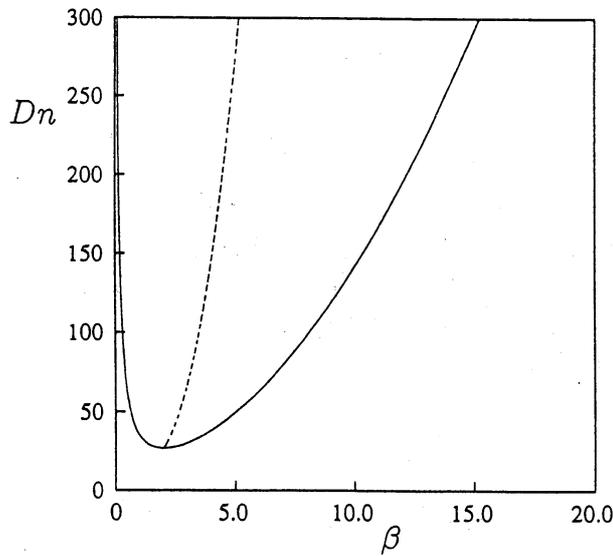


図 2. 線形中立安定曲線.

### 3 ロール状攪乱の非線形平衡解の数値計算

Görtler 渦形の攪乱の非線形平衡解を関数展開打ち切り法により数値的に求める。その結果を次節の弱非線形理論による結果と比較することにより 1:2 共鳴理論の妥当性を検討する。

ここでは、Görtler 渦形の攪乱にのみ注目し、流れ場は  $z$  方向に一様 ( $\partial/\partial z = 0$ ) であると仮定する。次式で定義される流れ関数  $\hat{\Psi}(x, y)$  を導入する。

$$\hat{u}(x, y) = \frac{\partial \hat{\Psi}(x, y)}{\partial y}, \quad \hat{v}(x, y) = -\frac{\partial \hat{\Psi}(x, y)}{\partial x}. \quad (3.1)$$

(3.1) 式を (2.6)-(2.9) 式で  $\partial/\partial \tau = \partial/\partial z = 0$  とおいた式に代入すると、 $\hat{\Psi}(x, y)$  と  $\hat{w}(x, y)$  の連立方程式が次のように得られる。

$$\left( \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'} \right) \Delta_2 \hat{\Psi} - (\bar{w} + \hat{w}) \frac{\partial \hat{w}}{\partial y'} = \frac{1}{\beta Dn} \Delta_2^2 \hat{\Psi}, \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y'}\right) \hat{w} + D\bar{w} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial y'} = \frac{1}{\beta Dn} \Delta_2 \hat{w}. \quad (3.3)$$

ここで,  $y' = \beta y$  であり,  $\Delta_2$  は次式で定義される.

$$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial y'^2}. \quad (3.4)$$

また,  $\beta$  はスパン方向の波数である.  $\hat{\Psi}$  と  $\hat{w}$  に対する境界条件は, 次のようになる.

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} = \hat{w} = 0, \quad \text{at } x = \pm 1. \quad (3.5)$$

(3.2), (3.3) の解を数値的に求めるため  $\hat{\Psi}(x, y')$  と  $\hat{w}(x, y')$  を次のように関数展開する.

$$\hat{\Psi}(x, y') = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{mn} (1-x^2)^2 T_m(x) \sin(n+1)y', \quad (3.6)$$

$$\hat{w}(x, y') = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N w_{mn} (1-x^2) T_m(x) \cos ny'. \quad (3.7)$$

ここで  $M$  と  $N$  はそれぞれ  $x$  と  $y$  方向打ち切り展開項数であり,  $T_m$  は  $m$  次のチェビシェフ多項式である.

方程式 (3.2), (3.3) は  $y'$  に関する次の対称性を持つ ( $\hat{\Psi}, \hat{w}$ ) を解として持っている.

$$\hat{\Psi}(x, y') = -\hat{\Psi}(x, -y'), \quad \hat{w}(x, y') = \hat{w}(x, -y'). \quad (3.8)$$

縦横比がそれほど大きくない曲がり管内流では (3.8) を満たす解のみが安定となる (Winters, 1987).<sup>1)</sup> 従ってここではこの対称性を満たす定常解のみを求める.

数値的に解を求める方法は通常の変点法 (コロケーション法) とニュートン・ラフソン法を組み合わせた方法を用いた. 変点 (コロケーションポイント) は次のように取った.

$$x_i = \cos \frac{\pi i}{M+2} \quad (1 \leq i \leq M+1), \quad (3.2), (3.3) \text{ 式に対して}, \quad (3.9a)$$

$$y'_j = \frac{\pi j}{N+1} \quad (1 \leq j \leq N), \quad (3.2) \text{ 式に対して}, \quad (3.9b)$$

$$y'_j = \frac{\pi j}{N+1} \quad (0 \leq j \leq N), \quad (3.3) \text{ 式に対して}. \quad (3.9c)$$

項数は  $M = 10, N = 6$  と取った. 臨界点に近い場合はこれで十分である. 展開 (3.6), (3.7), (3.9) を (3.2), (3.3) 式にそれぞれ代入し, コロケーション法を適用することにより,  $\Psi_{mn}$  と  $w_{mn}$  に関する代数方程式系が得られる.

非線形平衡解の代表振幅として,  $x = 0, y = 0$  での  $x$  方向の速度  $u$  の波数  $\beta$  を持つ基本フーリエ成分  $\tilde{u}_1$  を採り,  $A_1$  として表す. 図3は, 関数展開打ち切り法で得られた平衡振幅  $A_1 \equiv \tilde{u}_1$  の分布を  $(\beta, Dn, \tilde{u}_1)$  空間で表している.  $(\beta, Dn)$  面上の曲線は, 線形中立安定曲線を表している. 中立曲線の内側の不安定領域で平衡振幅が得られることがわかる.

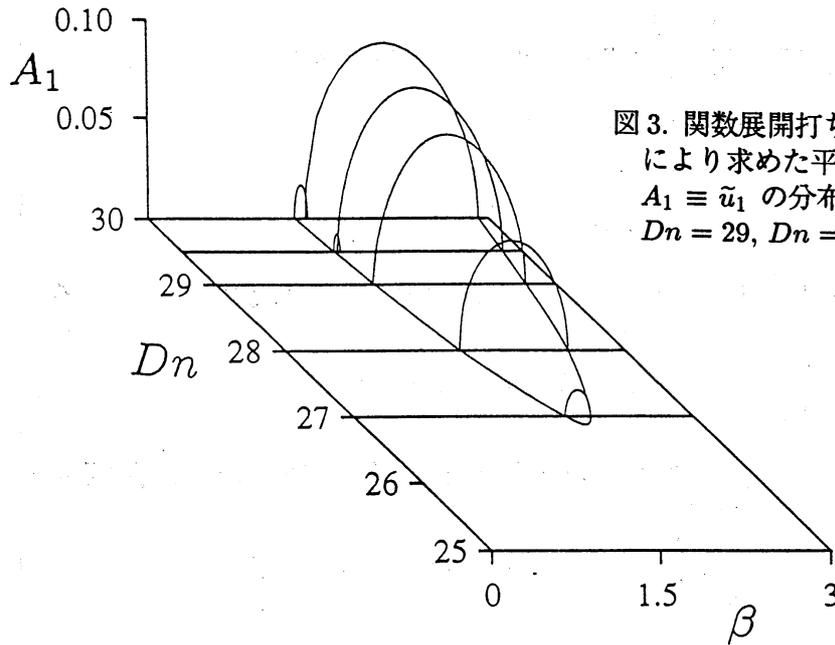


図3. 関数展開打ち切りを行い, 数値計算により求めた平衡解の  $x=0$  での振幅  $A_1 \equiv \tilde{u}_1$  の分布.  $Dn = 27, Dn = 28, Dn = 29, Dn = 29.5, Dn = 30$ .

#### 4 弱非線形安定性理論

Görtler 渦形の攪乱は, 安定性交替の原理 'Principle of exchange of stability' が成り立ち, 波としての位相速度はゼロである. 線形安定性解析から, 不安定攪乱が, Görtler 渦を形成する定在波であり, 不安定波数領域 ( $\beta$ 空間) が広いことがわかる. この章では, 弱非線形安定性理論を用いて, 振幅展開法に基づいて単一モードの場合と 1:2 共鳴の場合と 1:2:3 共鳴の場合の振幅方程式を導き, 平衡振幅を求めた. ここで得られた結果を, 3章におけるフーリエ展開打ち切りの方法による結果と比較することにより共鳴理論の妥当性を検討する.

ここでは, Görtler 渦形の攪乱にのみ注目し, 流れ場は  $z$  方向に一様 ( $\partial/\partial z = 0$ ) であると仮定する.  $\psi \equiv (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$  を次のように  $y$  方向にフーリエ級数展開する.

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_n(x, t) E^n. \quad (4.1)$$

ここで,

$$\tilde{\psi}_n = (\tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{w}_n) \quad (4.2)$$

であり,  $E = \exp(i\beta y)$  である. ここで(4.1)を(2.6)-(2.9)式に代入すると  $\tilde{\psi}_n$  に対する方程式は, 次のように書くことができる.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} M_n \tilde{\psi}_n = L_n \tilde{\psi}_n + N_n. \quad (4.3)$$

上式の  $M_n, L_n, N_n$  はそれぞれ次式で定義される.

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_n & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_n = \begin{pmatrix} D & in\beta & 0 \\ -(D\bar{w}) & 0 & S_n/Dn \\ S_n^2/Dn & 0 & -\bar{w}n^2\beta^2 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$N_n = \sum_{p+q=n} N[\tilde{\psi}_p, \tilde{\psi}_q], \quad (4.5)$$

$$N[\tilde{\psi}_p, \tilde{\psi}_q] = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{u}_p D\tilde{w}_q + \frac{q}{p}(D\tilde{u}_p)\tilde{w}_q \\ n^2\beta^2(\tilde{u}_p D\tilde{u}_q - \frac{q}{p}(D\tilde{u}_p)\tilde{u}_q) - nD(\tilde{u}_p \frac{1}{q} D^2\tilde{u}_q - \frac{1}{p}(D\tilde{u}_p)(D\tilde{u}_q)) - \frac{1}{2}n^2\beta^2\tilde{w}_p\tilde{w}_q \end{pmatrix}.$$

ここで  $S_n$  は,  $S_n = D^2 - n^2\beta^2$  である.

#### 4.1 単一モード解

ディーン数が臨界ディーン数  $Dn_c$  をわずかに越えると, 基本波モード ( $\beta = \beta_1$ ) だけが線形不安定になる. 弱非線形安定性理論を用いて振幅展開法に基づき, 単一モードの振幅方程式を導く.

基本波 ( $\beta = \beta_1$ ) の振幅を  $A_1(\tau)$  とおき,  $\tilde{\psi}_n(x, \tau)$  を次のように  $A_1$  で振幅展開し  $A_1$  の三次までで打ち切りを行うと次のようになる.

$$\tilde{\psi}_0 = |A_1|^2 \phi_{-11}(x), \quad (4.6a)$$

$$\tilde{\psi}_1 = A_1 \phi_1(x) + |A_1|^2 A_1 \phi_{-111}(x), \quad (4.6b)$$

$$\tilde{\psi}_2 = A_1^2 \phi_{11}(x). \quad (4.6c)$$

ここで,  $\phi_1, \phi_{-11}, \phi_{11}, \phi_{-111}$  は, 展開係数である.

たとえば, ベクトル  $\phi_1$  は,  $\phi_1 = {}^t(u_1, v_1, w_1)$  を表す. さらに, 振幅の時間微分  $dA_1/d\tau$  も  $A_1$  のベキで展開し, 三次の項までで打ち切ると次のようになる.

$$\frac{dA_1}{d\tau} = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1. \quad (4.7)$$

展開 (4.6), (4.7) を (4.3) 式に代入し,  $A_1^m$  の各ベキを等しいとおくことにより各次の関数  $\phi_1, \phi_{-11}, \phi_{11}, \phi_{-111}$  に対する方程式が得られる. これらの方程式を順次解くことにより (4.7) 式の係数  $\lambda_1, \lambda_{-111}$  が求められる. 特に  $O(A_1)$  の項を等しいとおくことにより次の方程式が得られる.

$$\lambda_1 M_1 \phi_1 = L_1 \phi_1. \quad (4.8)$$

方程式 (4.8) は線形安定性を決定する (2.11), (2.12) 式と同じ式であり, (4.8) 式から関数  $\phi_1$  と線形増幅率  $\lambda_1$  が決まる. 正規化には  $u_1(0) = 1$  を用い, 振幅  $A_1$  の定義には  $x = 0$  における  $\tilde{u}_1(x)$  のフーリエ係数の値を用いた. すなわち,  $u_{-11}(0) = 0, u_{11}(0) = 0, u_{-111}(0) = 0$  とおくことにより,  $\lambda_{-11}, \lambda_{11}, \lambda_{-111}$  を計算した.  $O(|A_1|^2)$  の項を等しいとおくことにより  $\phi_{-11}$  に関する方程式が得られ, それを解くと関数  $\phi_{-11}$  が決まる.  $O(A_1^2)$  の項を等しいとおくことにより  $\phi_{11}$  に関する方程式が得られ, それを解くと関数  $\phi_{11}$  が決まる.  $O(|A_1|^2 A_1)$  の項を等しいとおくことにより次の方程式が得られる.

$$(\lambda_1^* + 2\lambda_1) M_1 \phi_{-111} + \lambda_{-111} M_1 \phi_1 = L_1 \phi_{-111} + N_{-111}. \quad (4.9)$$

$$N_{-111} = N[\phi_{-11}, \phi_1] + N[\phi_1, \phi_{-11}] + N[\phi_{-1}, \phi_{11}] + N[\phi_{11}, \phi_{-1}]$$

方程式 (4.9) を解く方法は,  $\lambda_1 \neq 0$  と  $\lambda_1 = 0$  の場合で異なる.  $\lambda_1 \neq 0$  の場合,  $\phi_{-111} = -\lambda_{-111} \phi_1 / 2\lambda_1 + \chi$  とおいて

$$(\lambda_1^* + 2\lambda_1) M_1 \chi = L_1 \chi + N_{-111} \quad (4.10)$$

の解 $\chi$ を用いて

$$\lambda_{-111} = 2\lambda_1\chi(0) \quad (4.11)$$

により $\lambda_{-111}$ を計算する. ここで規格化条件 $u_1(0) = 1, u_{-111}(0) = 0$ を用いた.  
 $\lambda_1 = 0$ の場合,  $\lambda_{-111}$ は, 可解条件を用いて次のように表される.

$$\lambda_{-111} = \frac{\int \tilde{\phi}_1 N_{-111} dx}{\int \tilde{\phi}_1 M_1 \phi_1 dx} \quad (4.12)$$

ここで,  $\tilde{\phi}_1$ は,  $\phi_1$ の随伴関数であり, 随伴関数 $\tilde{\phi}_n$ は次式を満たす.

$$\lambda_n \tilde{M}_n \tilde{\phi}_n = \tilde{L}_n \tilde{\phi}_n \quad (4.13)$$

ここで,

$$\tilde{M}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ S_n & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_n = \begin{pmatrix} D & in\beta & 0 \\ -\bar{w}n^2\beta^2 & 0 & S_n/Dn \\ S_n^2/Dn & 0 & -(D\bar{w}) \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

である.

(4.7)式のすべての係数 $\lambda_1, \lambda_{-111}$ を決定した後,  $A_1$ を実数に限定して計算し, 平衡解 $\bar{A} = \sqrt{-\lambda_1/\lambda_{-111}}$ を求める. 図4は, 臨界波数 $\beta_c = 1.975$ における攪乱の平衡振幅 $A_1$ を表している. ここで, 実線は弱非線形理論の単一モード解を表し, 点線は関数展開打ち切り法で求めた振幅を表す. 振幅方程式のランダウ係数は, 臨界点 $(Dn, \beta) = (Dn_c, \beta_c) = (26.942, 1.975)$ で可解条件を用いて求めた. ただし, 線形増幅率は, 与えられたディーン数に対応する値を求めた.  $Dn < 28$ の範囲において良い一致をしていることがわかる. 図4は臨界点(第一分岐点)で, ピッチフォーク分岐が起こっている. 図5に $Dn = 28$ の場合の平衡振幅 $A_1$ を示す. 実線は, 弱非線形理論の結果を, 点線は関数展開打ち切り法の結果を表す.  $Dn = 28$ (図5)において, 平衡振幅 $A_1$ は, 1本の解曲線で表される. 図5の実線と点線は, ほとんど一致している. 弱非線形理論の単一モード解は, このディーン数でよい近似を与えることがわかる.

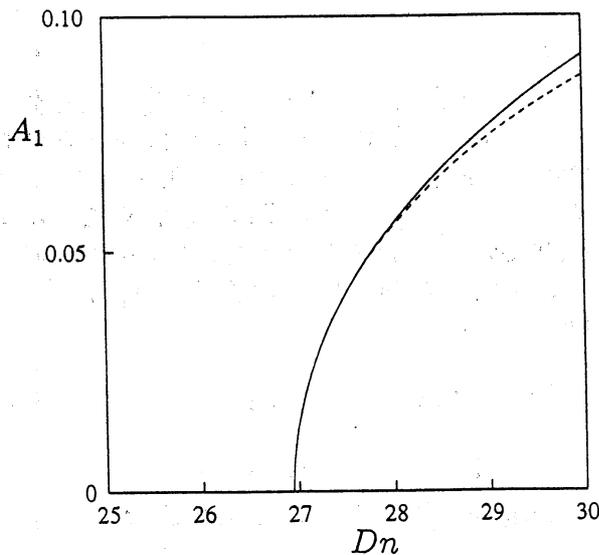


図4. 臨界波数 $\beta = 1.975$ における平衡解の $x = 0$ での振幅 $A_1 \equiv \tilde{u}_1$ .

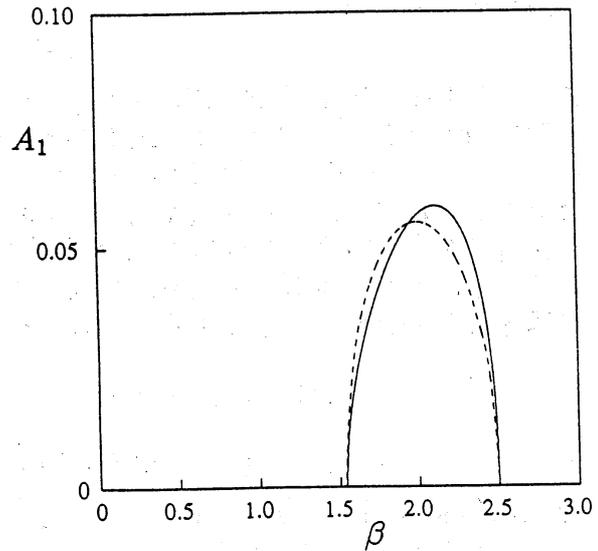


図5. 平衡解の $x = 0$ での振幅 $A_1 \equiv \tilde{u}_1$ の分布.  $Dn = 28$ .

## 4.2 1:2 共鳴

単一モード解が得られるときよりさらにディーン数を増加させると,  $Dn > Dn_2 = 29.15$  で基本波 ( $\beta = \beta_1$ ) とその高調波 ( $\beta = 2\beta_1$ ) の2つのモードが同時に線形不安定になり, 2つのモードで非線形相互作用が起こる. 弱非線形安定性理論を用いて振幅展開法に基づき, 1:2 共鳴の連立振幅方程式を導く.

基本波 ( $\beta = \beta_1$ ) の振幅を  $A_1(\tau)$ , その高調波 ( $\beta = 2\beta_1$ ) の振幅を  $A_2(\tau)$  とおき,  $\tilde{\psi}_n(x, \tau)$  を次のように  $A_1, A_2$  で振幅展開し  $A_1, A_2$  の三次までで打ち切りを行うと次のようになる.

$$\tilde{\psi}_0 = |A_1|^2 \phi_{-11}(x) + |A_2|^2 \phi_{-22}(x), \quad (4.15a)$$

$$\tilde{\psi}_1 = A_1 \phi_1(x) + A_1^* A_2 \phi_{-12}(x) + |A_1|^2 A_1 \phi_{-111}(x) + |A_2|^2 A_1 \phi_{-221}(x), \quad (4.15b)$$

$$\tilde{\psi}_2 = A_2 \phi_2(x) + A_1^2 \phi_{11}(x) + |A_1|^2 A_2 \phi_{-112}(x) + |A_2|^2 A_2 \phi_{-222}(x), \quad (4.15c)$$

$$\tilde{\psi}_3 = A_1 A_2 \phi_{12}(x), \quad (4.15d)$$

$$\tilde{\psi}_4 = A_2^2 \phi_{22}(x). \quad (4.15e)$$

さらに, 振幅の時間微分  $dA_1/d\tau$  と  $dA_2/d\tau$  も  $A_1, A_2$  のべきで展開し, 三次の項までで打ち切ると次のようになる.

$$\frac{dA_1}{d\tau} = \lambda_1 A_1 + \lambda_{-12} A_1^* A_2 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-221} |A_2|^2 A_1, \quad (4.16a)$$

$$\frac{dA_2}{d\tau} = \lambda_2 A_2 + \lambda_{11} A_1^2 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2. \quad (4.16b)$$

展開(4.15), (4.16) を(4.3)式に代入し,  $A_1^m A_2^n$  の各べきを等しいとおくことにより各次の関数  $\phi_1, \phi_2, \phi_{-11}, \phi_{-22}, \phi_{-12}, \phi_{11}, \phi_{12}, \phi_{22}, \phi_{-111}, \phi_{-221}, \phi_{-112}, \phi_{-222}$  に対する方程式が得られる. これらの方程式を順次解くことにより(4.16)式の係数が求められる. 特に,  $O(A_1), O(A_2)$  の項をそれぞれ等しいとおくことにより次の方程式が得られる.

$$\lambda_1 M_1 \phi_1 = L_1 \phi_1, \quad (4.17)$$

$$\lambda_2 M_2 \phi_2 = L_2 \phi_2. \quad (4.18)$$

(4.17), (4.18)式は線形安定性を決定する(2.11), (2.12)式と同じ式であり, (4.17)式から関数  $\phi_1$  と線形増幅率  $\lambda_1$  が決まり, (4.18)式から関数  $\phi_2$  と線形増幅率  $\lambda_2$  が決まる. 正規化には  $u_1(0) = 1, u_2(0) = 1$  を用い, 振幅  $A_1, A_2$  の定義には  $x = 0$  における  $\tilde{u}_1(x), \tilde{u}_2(x)$  の各フーリエ係数の値を用いた.

(4.16)式のランダウ係数  $\lambda_{-12}, \lambda_{-111}, \lambda_{-221}, \lambda_{11}, \lambda_{-112}, \lambda_{-222}$  は, 一般に  $\lambda_1 \neq 0$  または  $\lambda_2 \neq 0$  の場合には規格化条件を用いて求め,  $\lambda_1 = 0$  または  $\lambda_2 = 0$  の場合には可解条件を用いて求める. 今回は, ランダウ係数を  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  である波数比1:2の共鳴点 ( $Dn_2 = 29.15, \beta = 1.378$ ) で可解条件を用いて求め, その係数の値を共鳴点より大きいディーン数に対してすべての波数の範囲で適用する. また, 線形増幅率  $\lambda_1, \lambda_2$  は, 与えられたディーン数に対してそれぞれの波数に対応する値を求める.

(4.16)式のすべての係数  $\lambda_1, \lambda_{-12}, \lambda_{-111}, \lambda_{-221}, \lambda_2, \lambda_{11}, \lambda_{-112}, \lambda_{-222}$  を決定した後,  $A_1, A_2$  を実数に限定して計算し, 平衡解を求めた.  $Dn = 29.5$ (図6(a))と  $Dn = 30$ (図6(b))の場合, 平衡振幅  $A_1$  は, 2本の解曲線が得られる. これは, 振幅方程式を1つの方程式で書き下すことができず, 2つの連立方程式で表されることを示している. 実線と点線は,

平衡振幅  $A_1$  が小さい範囲では、ほぼ一致している。2本の解曲線が共存することは、弱非線形安定性理論の枠組みの中の1:2共鳴の発生から説明できることを示している。1:2共鳴は、同じ現象が鉛直平板間の熱対流で起こることが報告されている。<sup>14)</sup>

図7(a)( $Dn = 29.5$ ), 図7(b)( $Dn = 30$ )には1:2共鳴を伴う弱非線形安定性理論から導出した連立振幅方程式の平衡振幅  $A_1$  の安定性を表している。ただし、実線が安定な平衡解、点線が不安定な平衡解を表す。解の安定性を調べた結果、 $Dn = 29.5$ の場合、 $1.440 < \beta < 2.585$ で安定な定常解であり、 $Dn = 30$ の場合、 $1.449 < \beta < 2.741$ で安定な定常解であることがわかった。

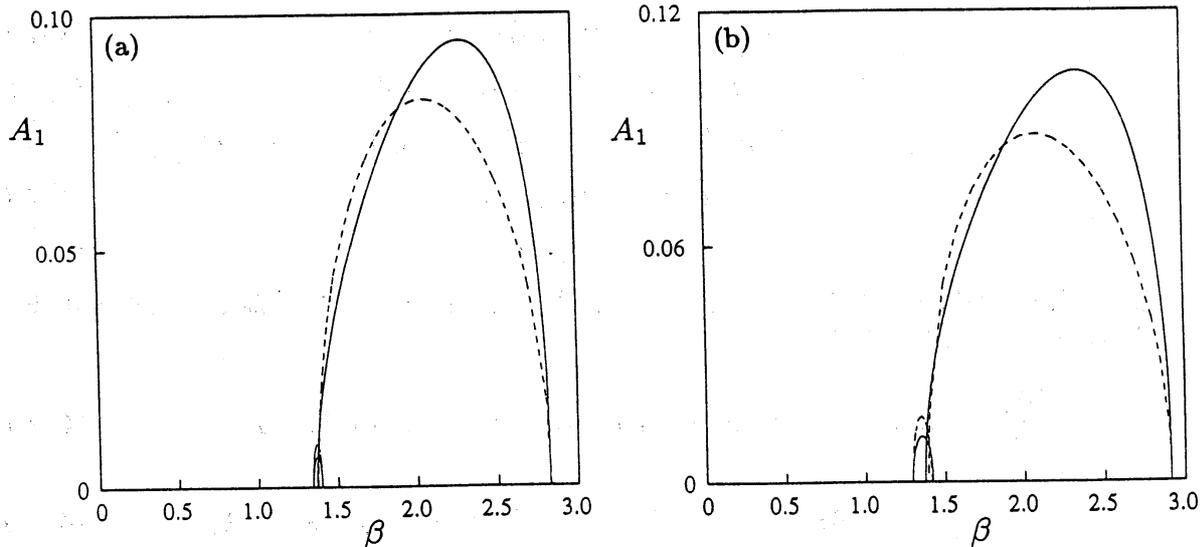


図6. 平衡解の  $x = 0$  での振幅  $A_1 \equiv \tilde{u}_1$  の分布. (a)  $Dn = 29.5$ , (b)  $Dn = 30$ .

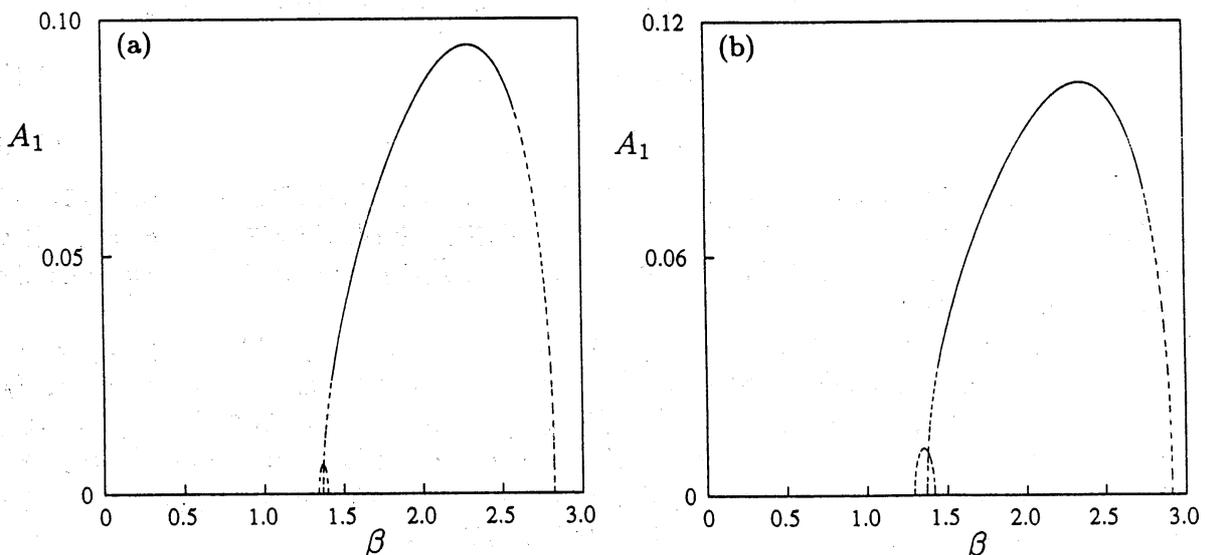


図7. 弱非線形安定性理論から求めた平衡解の  $x = 0$  での振幅  $A_1 \equiv \tilde{u}_1$  の分布. (a)  $Dn = 29.5$ , (b)  $Dn = 30$ .

### 4.3 1:2:3 共鳴

1:2 共鳴がおこる場合よりさらにディーン数を増加させると,  $Dn > Dn_3 = 32.63$  で基本波 ( $\beta = \beta_1$ ) とその高調波 ( $\beta = 2\beta_1, \beta = 3\beta_1$ ) の3つのモードが同時に線形不安定になり, 攪乱の1:2:3 共鳴が起こる可能性がある. 弱非線形安定性理論を用いて振幅展開法に基づき, 1:2:3 共鳴の連立振幅方程式を導く.

基本波 ( $\beta = \beta_1$ ) の振幅を  $A_1(\tau)$ , その高調波 ( $\beta = 2\beta_1, \beta = 3\beta_1$ ) の振幅をそれぞれ  $A_2(\tau), A_3(\tau)$  とおき, 振幅の時間微分  $dA_1/d\tau, dA_2/d\tau, dA_3/d\tau$  と  $\tilde{\psi}_n(x, \tau)$  を前節と同様に  $A_1, A_2, A_3$  で振幅展開し  $A_1, A_2, A_3$  の三次までで打ち切りを行い, その展開を前節の手法と同様に (4.3) 式に代入し,  $A_1^l A_2^m A_3^n$  の各ベキを等しいとおくことにより各次の関数に対する方程式が得られる. これらの方程式を順次解くことにより振幅方程式の係数が求められる. 振幅方程式のすべての係数を決定した後に,  $A_1, A_2, A_3$  を実数に限定して計算し, 平衡解を求めることを試みたが, 実際には求めることができなかった.

図8(a) ( $Dn = 35$ ), 図8(b) ( $Dn = 36$ ) には, 関数展開打ち切り法で求めた平衡振幅  $A_1$  のみを示す. 図8(a), (b) から平衡振幅は3本の解曲線で表される. 1:2:3 共鳴は, 水平流体層のベナール対流でも同じ現象が報告されている.<sup>15)</sup>

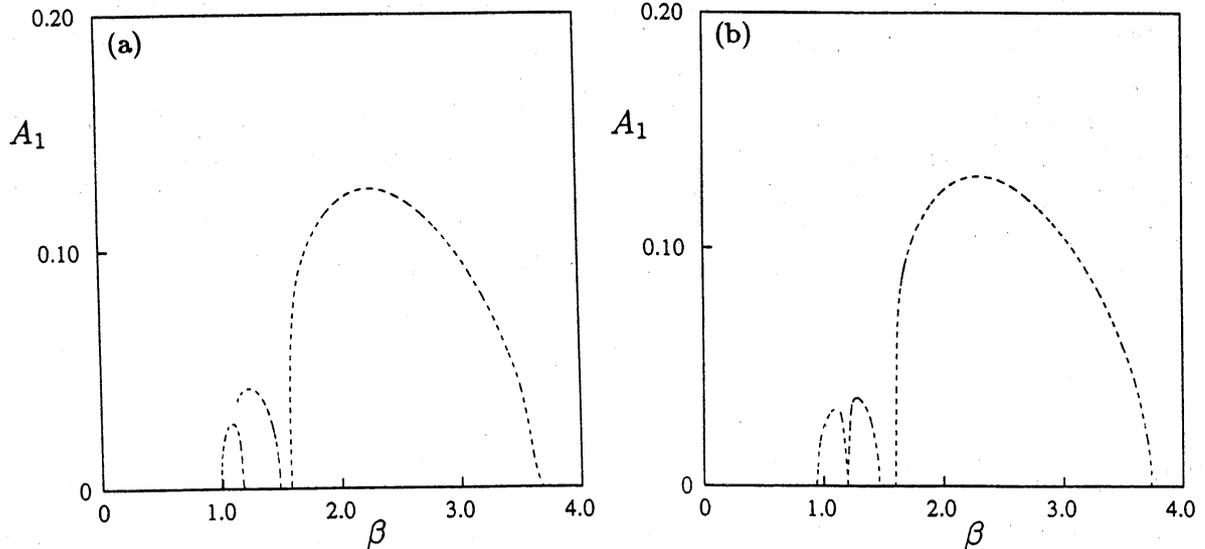


図8. 平衡解の  $x = 0$  での振幅  $A_1 \equiv \tilde{u}_1$  の分布. (a)  $Dn = 35$ , (b)  $Dn = 36$ .

## 5 曲がり管における Görtler 渦の可視化実験

ここではアスペクト比が8の長方形断面を有する曲がり管に流体を流し, さまざまなディーン数において流れを可視化, 撮影を行い, これらの結果を線形安定性理論から得られた結果と比較し, Görtler 渦の形成に関する考察を行った. 作動流体としては空気を用いた.

### 5.1 実験装置及び方法

曲がり管の断面形状は長方形であり, 実寸法は横240mm, 縦30mm, アスペクト比は1:8で, 曲がり部半径は240mmである. また, 流体の助走区間として曲がり管入口部に600mmの

直線部分を設けている。材質は合成アクリル樹脂板を用いることで透明度の高さを確保し、また製作時において側壁板に細いスリットを入れ、これに外壁と内壁にあたる板をはめ込ませる構造を採用することにより、十分な気密性と精度を確保した。

可視化実験時の実験装置構成図を図9に示す。本実験は暗室中にて行い、可視化流体として線香の煙を用いた。まず、曲がり管断面の長辺に平行かつ一直線に線香を並べて煙を流し、その煙をインレット AB より取り込み、助走区間内に設けたハニカム型整流装置により整流させ、テストセクションである曲がり部に送り出した。さらに、曲がり部ではハロゲンランプを用いてスリット光を出す照射装置を作成し、テスト部 CD を照らして断面 ( $x$ - $y$ 平面) を浮かび上がらせ、流れの様子をスリット光の法線方向より撮影を行った。テスト部として  $\theta = 180^\circ$  の地点で、ディーン数を変化させて行った。

本実験においては流速を表すパラメータとしてディーン数を用いる。ディーン数はレイノルズ数と曲率を表すパラメータの積で定義する。

$$Dn = U \frac{D}{\nu} \sqrt{\frac{a}{R}} = Re \sqrt{\frac{a}{R}} \quad (5.1)$$

ここで  $U$  は流路内の主流速度、 $D$  は水力平均直径 ( $= 2ab/(a+b)$ )、 $\nu$  は動粘性係数、 $R$  は流路の曲率半径 (本実験では 240mm)、 $a$  は流路高さ (本実験では 30mm)、 $b$  は流路幅 (本実験では 240mm) である。

実験結果をまとめる上で、前記方法により得られた写真より、写真上で Görtler 渦の大きさを測定し、写真上の断面と実際の断面の寸法との比率より、渦を実寸法に換算する。こうして得られた渦の寸法を平均して波長  $\lambda$  を出す。そしてこれを流路長さ  $a$  で割って無次元化した波長  $\lambda'$  を得る。渦の大きさの測定方法については、一对の渦の幅を渦の大きさ  $\lambda$  とする。以上の方法で得られた値を次に示す式を用いて波数  $\beta$  を求める。

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda'} \quad (5.2)$$

## 5.2 実験結果及び考察

実験により得られた波数とディーン数の関係を図2の線形中立安定曲線にプロットしたものを図10に示す。図10においてプロットした点は全て、線形中立安定曲線の不安定領域 (内側) に含まれており、このことから今回の実験が、理論から著しくかけ離れたものではなく、ほぼ理論と一致しているものであることが分かる。低ディーン数では、プロットされた点と最大増幅波数との完全な一致は見られないが、これは、主流の流れが低速度であるため、Görtler 渦の発生源である流体にかかる遠心力も弱く、二次流れである Görtler 渦は主流速度のゆらぎによる影響を受けやすいためと考えられる。

図11(a)–11(c) に  $\theta = 180^\circ$  の断面における可視化写真を示す。写真の上側は曲がり管の内壁で、下側は曲がり管の外壁である。本実験では、Görtler 渦が発生しない速度域から段階的に速度を変化させ撮影を行っている。図11(a)–11(c) のディーン数はそれぞれ (a)  $Dn = 109$ , (b)  $Dn = 153$ , (c)  $Dn = 196$  である。臨界ディーン数の 4~7 倍のディーン数である。Görtler 渦が発生していることが図11(a)–11(c) を見て明らかである。

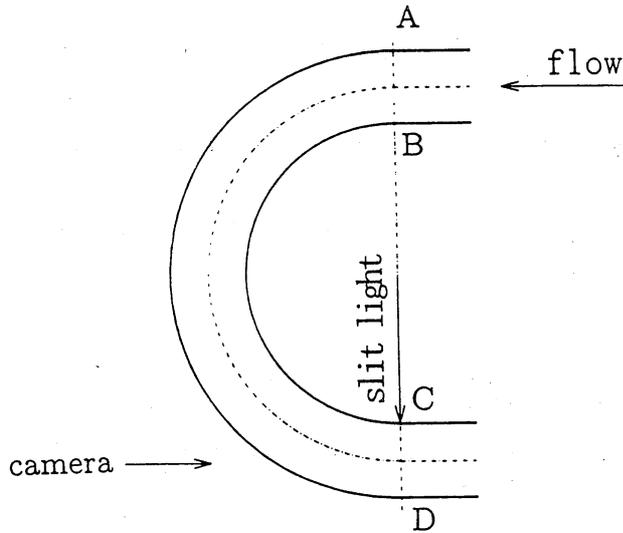


図9. 可視化実験装置構成図

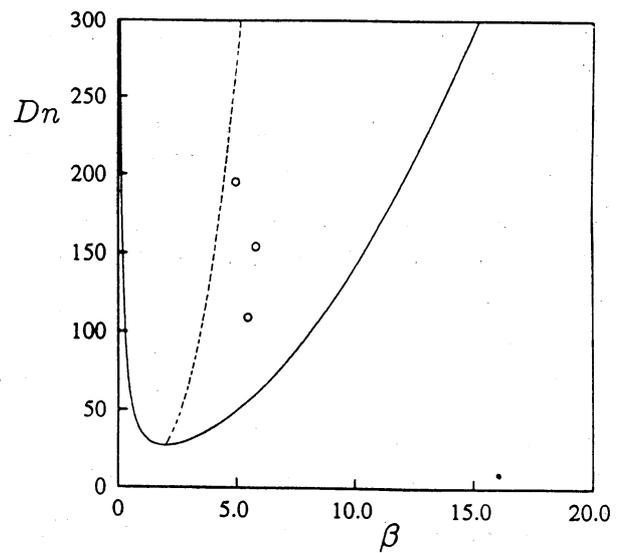


図10. 線形中立安定曲線と実験結果の比較 ( $\theta = 180^\circ$ )

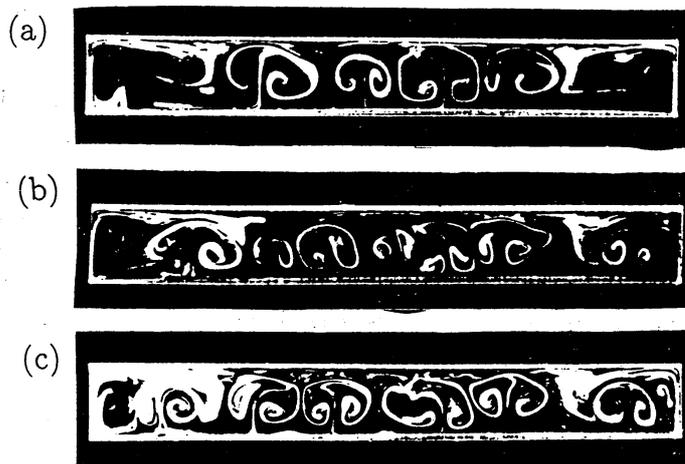


図11.  $x - y$ 平面における可視化写真 ( $\theta = 180^\circ$ ) (a)  $Dn = 109$ ,  $Re = 308$ , (b)  $Dn = 153$ ,  $Re = 432$ , (c)  $Dn = 196$ ,  $Re = 555$ .

## References

- <sup>1</sup>K. H. Winters, "A bifurcation study of laminar flow in a curved tube of rectangular cross-section," *J. Fluid Mech.* **180**, 343-369 (1987).
- <sup>2</sup>S. Yanase and K. Nishiyama, "On the bifurcation of laminar flow through a curved rectangular tube," *J. Phys. Soc. Japan*, **57**, 3790-3795 (1988).
- <sup>3</sup>W. H. Finlay and K. Nandakumar, "Onset of two-dimensional cellular flow in finite curved channels of large aspect ratio," *Phys. Fluids*, **A2**, 1163-1174 (1990).
- <sup>4</sup>S. Thangam and N. Hur, "Laminar secondary flows in curved rectangular ducts," *J. Fluid Mech.* **217**, 421-440 (1990).

- <sup>5</sup>R. D. Gibson and A. E. Cook, "The stability of curved channel flow," *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **27**, 149-160 (1974).
- <sup>6</sup>W. H. Finlay, H. B. Keller and J. H. Ferziger, "Instability and transition in curved channel flow," *J. Fluid Mech.* **194**, 417 - 456 (1988).
- <sup>7</sup>Q. I. Daudpota, P. Hall and T. A. Zang, "On the nonlinear interaction of Görtler vortices and Tollmien-Schlichting waves in curved channel flows at finite Reynolds numbers," *J. Fluid Mech.* **193**, 569-595 (1988).
- <sup>8</sup>Y. Guo and W. H. Finlay, "Wavenumber selection and irregularity of spatially developing nonlinear Dean and Görtler vortices," *J. Fluid Mech.* **264**, 1-40 (1994).
- <sup>9</sup>P. M. Ligrani and R. D. Niver, "Flow visualization of Dean vortices in a curved channel with 40 to 1 aspect ratio," *Phys. Fluids*, **31**, 3605-3617 (1988).
- <sup>10</sup>B. Bara, k. Nandakumar and J. H. Masliyah, "An experimental and numerical study of the Dean problem: flow development towards two-dimensional multiple solutions," *J. Fluid Mech.* **244**, 339-376 (1992).
- <sup>11</sup>W. R. Dean, "Note on the motion of fluid in a curved pipe," *Phil. Mag.* **4**, 208 - 223 (1927).
- <sup>12</sup>W. R. Dean, "The stream-line motion of fluid in a curved pipe," *Phil. Mag.* **5**, 673 - 695 (1928).
- <sup>13</sup>S. Yanase, K. Yamamoto and T. Yoshida, "Effect of curvature on dual solutions of flow through a curved circular tube," *Fluid Dynamics Research*, **13**, 217-228 (1994).
- <sup>14</sup>K. Fujimura and J. Mizushima, "Nonlinear interaction of disturbances in free convection between vertical parallel plates," in *Nonlinear Wave Interactions in Fluids* ( ed. R.W.Miksad *etal.*), pp.123-130. ASME-AMD-vol.87 (1987).
- <sup>15</sup>J. Mizushima, "Mechanism of mode selection in Rayleigh-Bénard convection with free-rigid boundaries," *Fluid Dynamics Research*, **11**, 297-311 (1993).