

順圧不安定による擾乱発達の上限值問題

石岡圭一

(東京大学大学院数理科学研究科)

1 はじめに

帯状ジェットが順圧不安定(シア不安定)であるとき, 擾乱は指数関数的に成長し, ある有限の振幅に達する. そこで, 「初期状態に依存して, 擾乱はどこまで成長しうるのか?」という疑問が自然に湧いてくる. 石岡・余田(1995)では Shepherd(1988)によって提出されていた完全非線形上限値を改良するとともに, 上限値を計算するための新たな数値的手法を提案し, Ishioka and Yoden(1994)における数値実験結果との比較を行った. その結果, この改良された上限値と新たに提出した上限値が一致することが示された.

しかし, そこで得られた上限値と数値実験によって得られた最大値との間にはまだ数倍程度のギャップがあり, このギャップが上限値が緩いことによるのか, または数値実験で用いられている粘性の影響によるものなのかは結論できなかった.

そこで, 本研究では, 上限値計算に課す制約条件を増すことにより, 上限値をより厳しくすることを試みるとともに, 対応する数値実験を補強することにより, 上限値と実験結果との関係をより詳しく調べた.

2 基礎方程式および保存則

絶対渦度 $q(\lambda, \mu, t) \equiv \zeta + 2\Omega\mu$ のラグランジュ保存則:

$$\frac{Dq}{Dt} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial q}{\partial \mu} - \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial q}{\partial \lambda} \right) = 0, \tag{1}$$

で支配される地球上の2次元非発散流体運動を考える. ここに, $\zeta(\lambda, \mu, t)$ は渦度 ($\zeta \equiv \nabla^2 \psi$), $\psi(\lambda, \mu, t)$ は流線関数, λ は経度, $\mu \equiv \sin \phi$, ϕ は緯度, t は時刻, a は地球半径 ($= 6.37 \times 10^6 \text{m}$), Ω は地球自転角速度 ($= 7.29 \times 10^{-5} / \text{s}$), および ∇^2 は水平ラプラシアン:

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \tag{2}$$

である.

この系において, 以下の3種類の量: “カシミヤ不変量” $C_f \equiv \overline{[f(q)]}$, 全絶対角運動量(3成分) $D_1 \equiv \overline{[\mu q]}$, $D_2 \equiv \overline{[\cos \lambda \cos \phi q]}$, $D_3 \equiv \overline{[\sin \lambda \cos \phi q]}$, および全運動エネルギー

$E \equiv [-\frac{1}{2}\overline{\psi\zeta}]$, が保存される. ここに $f(q)$ は q の任意関数であり $\overline{(\quad)}$ および $[(\quad)]$ はそれぞれ経度平均および緯度平均を表す. すなわち,

$$\overline{(\quad)} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\quad) d\lambda, \quad [(\quad)] \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\quad) d\mu. \quad (3)$$

3 上限値問題

さて, 擾乱の発達の上限を考えよう. C_f の保存則から, 全絶対エンストロフィー $F \equiv [\frac{1}{2}\overline{q^2}]$ もまた保存量である. この全絶対エンストロフィー F は帯状成分エンストロフィー F_z および波成分エンストロフィー F_w に分けられる:

$$F = F_z + F_w, \quad (4)$$

$$F_z \equiv [\frac{1}{2}\overline{q^2}], \quad F_w \equiv [\frac{1}{2}\overline{q'^2}], \quad (5)$$

ここに $q' \equiv q - \bar{q}$ である. 以下では, 不安定な帯状分布 $\bar{q}_0(\mu)$ および無限小擾乱から成る初期 q 分布からの時間発展に対する F_w の上限値について考察する.

石岡・余田 (1995) では, 帯状成分の角運動量 D_1 および, すべてのカシミア不変量 C_f の保存を束縛として用い, 直接上限値を求めた. 本研究では, さらに全エネルギー E および角運動量の残りの成分 D_2, D_3 の保存を束縛条件に加えることによって, 上限値をさらに小さくすることを試みる. これらの保存則を束縛に加えることによって, 系のすべての保存則が取り込まれることになる. 従って, ここで得られる上限値を最小上限値と呼ぶことにする.

石岡・余田 (1995) における直接上限値の計算では緯度方向のみの 1 次元分布を扱うのみで済んだが, エネルギー保存を考慮するためには, 2 次元的な情報が必要になる. そこで, 2 次元流体の統計理論 (石岡・余田, 1993) を参考にして問題を定式化しなおす.

まず, 離散的な絶対渦度分布を考え, 初期に絶対渦度 Q_k ($k = 1, 2, \dots, K$) の流体粒子が全球面に対して R_k の割合で存在するとする. このとき,

$$\sum_{k=1}^K R_k = 1 \quad (6)$$

である. このような初期状態から出発して, 渦度の混合がすすんだ状態を考える. ある点 (λ, μ) の近傍において, 絶対渦度 Q_k の流体粒子が占める割合 (または, 存在確率) を $r_k(\lambda, \mu)$ と定義する. この定義より, 全球面において

$$\sum_{k=1}^K r_k(\lambda, \mu) = 1, \quad (7)$$

$$r_k(\lambda, \mu) \geq 0, \forall k \quad (8)$$

であり, また

$$[\overline{r_k}] = R_k, \forall k \quad (9)$$

である。この r_k により、各点での絶対渦度は

$$q(\lambda, \mu) = \sum_{k=1}^K Q_k r_k(\lambda, \mu) \quad (10)$$

と表される。この q および、それに対応する渦度 ζ 、流線関数 ψ によって、保存量である 3 成分の角運動量およびエネルギーは 2 節で与えた定義式によって表される。また、求めたい波成分のエンストロフィー F_w もこの q によって表示されるので、最小上限値を求める手続きは以下のように記述できる:

束縛条件 (7), (8), (9) および D_1, D_2, D_3, E の保存, のもとで r_k 分布を変えて F_w を最大化せよ。

この変分問題を直接解くことは不可能なので、実際の計算にあたっては、経度方向に I 、緯度方向に J 個の格子点 (λ_i, μ_j) をとり、

$$r_{ijk} \equiv r_k(\lambda_i, \mu_j) \quad (11)$$

を変数とする。ここで、 $\lambda_i \equiv \frac{2\pi(i-1)}{I}$, ($i = 1, 2, \dots, I$) とし、 μ_j は J 個のガウス格子である。この離散化により、上の変分問題は、 $I \times J \times K$ 個の変数 r_{ijk} に対する非線形計画問題に置換される。さらに、 $K = J$ として、 $Q_k = \bar{q}_0(\mu_k)$, $R_k = w_k/2$ とする。ここに w_k はガウス格子 μ_k に対応するガウシアンウェイトである。

この非線形計画問題は変数の次元が解像度の 3 乗に比例して増加するので、レディメイドのライブラリでは解くのは困難である。ここでは、アナログ型非線形計画法 (田辺, 1976) を採用してこの問題を解いた。

4 ジェット分布と非線形時間発展

Ishioka and Yoden (1994) と同じく、Hartmann (1983) によって導入された 2 種類のジェット分布 (それらは成層圏の極夜ジェットの理想化である) についての解析を行った。

この 2 種類の分布は以下のように定義される:

$$\text{tanh type jet: } \bar{u}_0(\phi) = U \cos \phi \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{\phi - \phi_0}{B} \right), \quad (12)$$

$$\text{sech type jet: } \bar{u}_0(\phi) = U \cos \phi \cdot \text{sech} \frac{2(\phi - \phi_0)}{B}, \quad (13)$$

ここに、 U はジェットの強さの指標で、 B は幅、 ϕ_0 は位置の指標である。tanh 型は帯状平均絶対渦度の負の緯度勾配をジェットの軸の赤道側に持っているのに対し、sech 型はそれを主にジェットの軸の極側に持っている。帯状平均絶対渦度の初期分布 $\bar{q}_0(\mu)$ は以下のように与えられる:

$$\bar{q}_0(\mu) \equiv -\frac{1}{a} \frac{d}{d\mu} \left(\sqrt{1 - \mu^2} \bar{u}_0 \right) + 2\Omega\mu. \quad (14)$$

非線形時間発展において、数値的な振舞いを滑らかにするために(1)式の右辺に人工的な粘性項を付加することが必要である。Ishioka and Yoden(1994)ではナビエ-ストークス型の通常の粘性項を用いたが、エンストロフィー散逸が大きく、上限値との比較にはあまり適当ではなかった。そこで、本研究では、そこで、非粘性流体により近い設定にするために、通常の粘性項の代わりに高階粘性を用いた追加実験を行った。使用した方程式は、

$$\frac{Dq}{Dt} = -\nu_h \left(\nabla^2 + \frac{2}{a^2} \right)^{10} q, \quad (15)$$

である。ここに、右辺括弧内第2項 $(2/a^2)$ は角運動量の保存則によるものであり、高階粘性係数 ν_h は最大の全波数 ($n = 170$) での減衰時間スケールが 0.01 日になるような値にしている。

非線形方程式(15)を初期状態 $q = \bar{q}_0(\mu) + q_d(\lambda, \mu)$ から数値的に時間積分した。ここに、 \bar{q}_0 は上で定義された初期帯状分布で、 q_d は初期擾乱であり、以下のように表される:

$$q_d(\lambda, \mu) \equiv \alpha \left(e^{\beta(\cos\theta-1)} - \frac{1-e^{-2\beta}}{2\beta} \right), \quad (16)$$

$$\cos\theta \equiv \mu\mu_d + \sqrt{(1-\mu^2)(1-\mu_d^2)} \cos(\lambda - \lambda_d). \quad (17)$$

ここに、 α および β はそれぞれ、初期擾乱の強さおよび水平方向の広がりに関するパラメータである。この擾乱の中心は (λ_d, μ_d) で与えられ、 θ がその中心からの角距離である。この初期擾乱はガウシアンに似た球面上の滑らかな関数である。このことは、 $\theta \rightarrow 0$ で $q_d \rightarrow \alpha(e^{-\beta\theta^2/2} - \frac{1-e^{-2\beta}}{2\beta})$ となることから容易に確認できる。式(16)の括弧内の第2項は、 $[q_d]$ が 0 でなければならぬ要請による。本研究では、小さな α および大きな β をとる。これにより初期擾乱は波数空間上で白色に近いスペクトルをもつ。これは、基本帯状流の不安定そのものによって励起された波の振舞いを調べるためである。Ishioka and Yoden(1994)では $\alpha = 0.01\Omega$, $\beta = 100$, および $(\lambda_d, \mu_d) = (0^\circ, \sin 45^\circ)$ と固定したが、本研究での追加実験では、3種類の $\mu_d = \sin 30^\circ, \sin 45^\circ$, and $\sin 60^\circ$ を用い、結果の初期擾乱への依存性を調べた。

移流項は三角切断 T170 のスペクトル変換法を用いて計算した。時間積分には刻み幅 0.01 日の 4 次のルンゲ-クッタ法を用いた。波成分エンストロフィーの最大値 $(F_w)_{\max}$ は積分期間 (100 日間) の間、毎ステップで記録した。

5 結果

5.1 上限値同士の比較

緯度方向分割数 (J) を等しくした場合、本研究で導入した最小上限値は、石岡・余田(1994)の直接上限値に丸め誤差の範囲まで完全に一致した。すなわち、エネルギー保存を制約条件に加えても上限値の値は影響を受けなかったということである。これは、絶対渦度がエネルギー保存を満すように 2 次元的に適当に分布してしまうためである。また、最小上限値を与える $q(\lambda, \mu)$ 分布も一意的ではなかった(帯状平均の $\bar{q}(\mu)$ 分布は一意的であり、直接上限値

を与える分布に一致した). ただし, 計算機の能力の関係上, $J = K = 12, I = 24$ の低い分解能までしかチェックできていないので, 上限値計算のアルゴリズムを効率化するなどして, より高分解能の領域でもこの一致を見極める必要があるが, これは今後の課題である.

5.2 上限値と数値実験結果の比較

図1は上限値(白丸)を, 数値時間積分で得られた波成分エンストロフィーの最大値(黒四角)と比較したものである. 5.1小節で述べたように, 最小上限値は直接上限値に一致してしまったので, 上限値は直接上限値の値を示している. 各値は自明な上限値 F_0 (石岡・余田(1994)を参照)の値で規格化している. (a)および(b)は \tanh 型ジェットに対するものである; (a): $U = 180$ m/s, $B = 8^\circ$ で ϕ_0 を $35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$, および 55° としたものの, (b): $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 45^\circ$ で B を $4^\circ, 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ$, および 12° としたものである. (c)および(d)は sech 型ジェットに対するものである; (c): $\phi_0 = 60^\circ, B = 20^\circ$ で U を 120 m/s, 150 m/s, 180 m/s, 210 m/s, および 240 m/s としたものの, (d): $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 60^\circ$ で B を $10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ$, および 30° としたものである.

粘性を高階粘性に代えたことにより, エンストロフィー散逸が抑制され, Ishioka and Yoden(1994)に較べ, 特に, sech 型ジェットの結果(c, d)について波成分のエンストロフィーの最大値が上限値に近づいており, (c)では5つのすべての U の値について, 上限値が最大値の約1.3倍になっている. これは, sech 型ジェットでは不安定モードの成長率が小さく, 粘性の影響が無視できなかったからである. これに対して, \tanh 型ジェットについてはあまり最大値は増大しておらず, 上限値と最大値との間のギャップは埋まらなかった. 実際, \tanh 型ジェットの標準ケースである $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 45^\circ, B = 8^\circ$ (aまたはbの中央のケース)について, (上限値) - (最大値)の値は F_0 の29%であるが, 全エンストロフィーの散逸量は F_0 の0.19%に過ぎない.

5.3 絶対渦度分布の比較

図2は, \tanh 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 45^\circ, B = 8^\circ$ としたものの(a), および sech 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 60^\circ, B = 20^\circ$ としたものの(b)に対する帯状平均絶対渦度分布を示したものである. 初期分布 $\bar{q}_0(\mu)$ は点線で示されているように, $d\bar{q}_0(\mu)/d\mu$ が負の部分を持っている. 実線は, 時間積分における波成分エンストロフィーの最大値に対応する $\bar{q}(\mu)$ 分布である. これは, \tanh 型ジェットでは $\mu_d = \sin 60^\circ$ の初期擾乱の実験に対応するものであり, sech 型ジェットでは $\mu_d = \sin 30^\circ$ に対応するものである. ここで, 初期の $d\bar{q}_0(\mu)/d\mu$ が負の部分がすべての緯度でなくなっていることに注意されたい. 破線は, 石岡・余田(1995)の直接上限値に対応する \bar{q}_j 分布である. 上限値と最大値との近さに対応して, sech 型ジェット(b)では実現した \bar{q} 分布は \bar{q}_j 分布に非常に類似した分布になっている. これに対して, 上限値と最大値の隔たりの大きい \tanh 型ジェットの場合(a)についてはそのような類似は見られなかった.

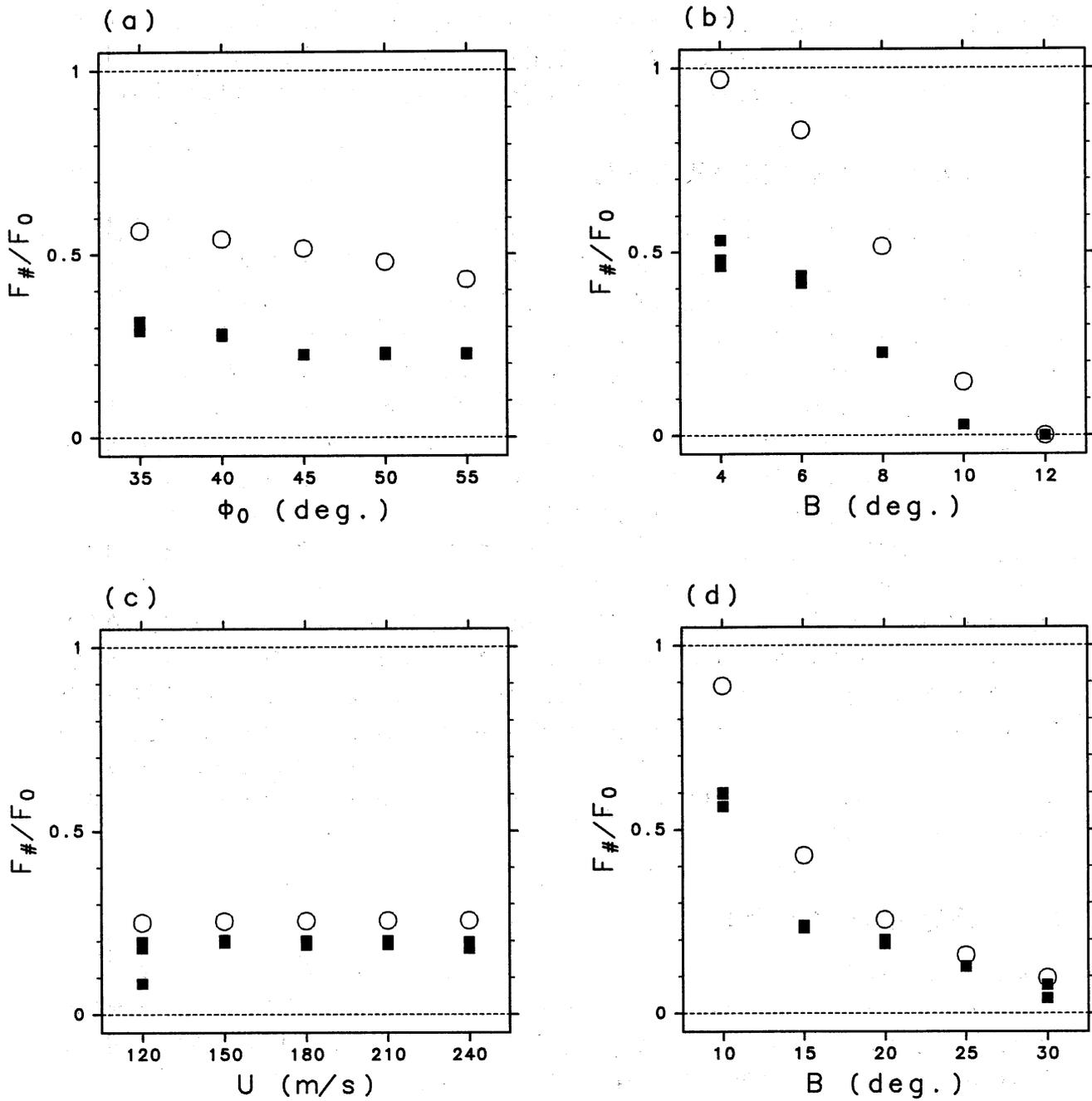


図 1: 直接上限値 (白丸), と波成分エンストロフィーの最大値 (黒四角) との比較. 各値は自明な上限値 F_0 の値で正規化されている. (a): tanh 型ジェットで $U = 180$ m/s, $B = 8^\circ$ として ϕ_0 を 35° から 55° まで変えたもの, (b): tanh 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 45^\circ$ として B を 4° から 12° まで変えたもの, (c): sech 型ジェットで $\phi_0 = 60^\circ$, $B = 20^\circ$ として U を 120 m/s から 240 m/s まで変えたもの, そして (d): sech 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 60^\circ$ として B を 10° から 30° まで変えたものである.

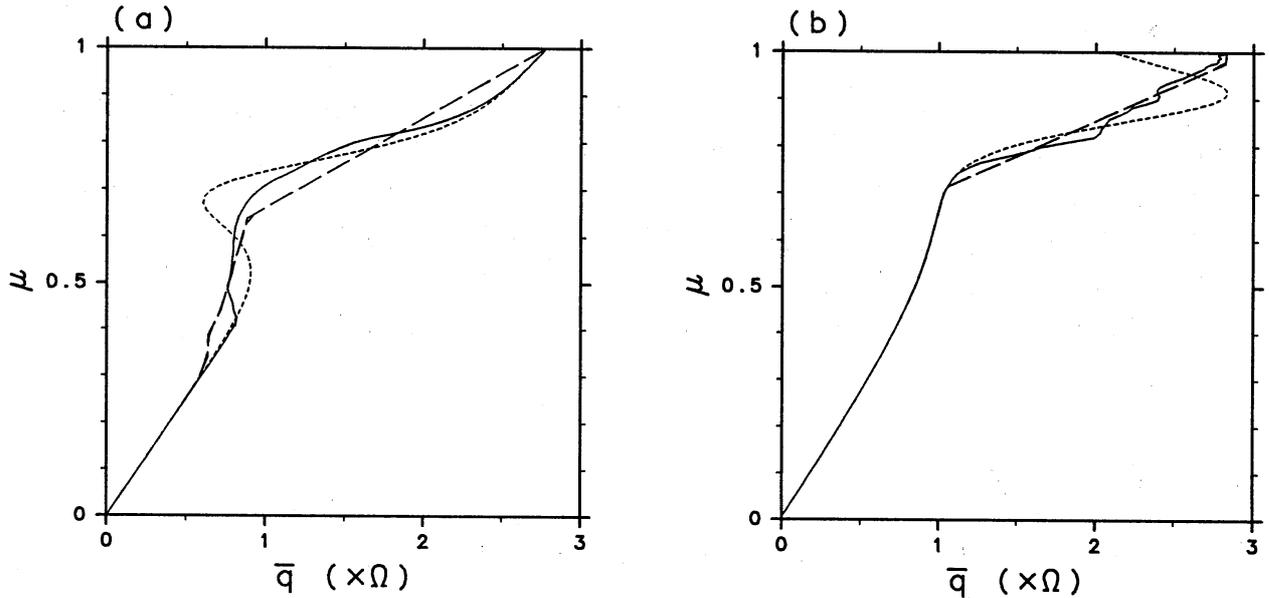


図 2: 帯状平均絶対渦度分布の比較. 点線は初期分布 $\bar{q}_0(\mu)$, 破線は直接上限値に対する \bar{q}_l 分布, そして, 実線は非線形時間積分における波成分エントロフィーの最大値に対応する $\bar{q}(\mu)$ 分布. (a): tanh 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 45^\circ$, $B = 8^\circ$ としたものの, (b): sech 型ジェットで $U = 180$ m/s, $\phi_0 = 60^\circ$, $B = 20^\circ$ としたものの.

6 議論

本研究では上限値計算における束縛条件としてエネルギー保存を加え, 上限値をより小さくすることを試みたが, この変更によって, 上限値は全く変化しなかった. これはエネルギー保存の束縛が波成分エントロフィーに関わる自由度に何ら制約を加えないことを意味している. また, 数値実験において, 粘性を高階粘性に切り替えることによってエントロフィー散逸を抑制し, 数値実験の結果得られる波成分エントロフィーの最大値が上限値にどの程度近付くか検証したが, sech 型ジェットではこの最大値は上限値の 80% 程度まで到達したが, tanh 型ジェットについては, 依然として 50% 程度までしか到達せず, 結局, この上限値と最大値とのギャップを粘性や上限値の緩さに帰することはできなかった. この結果は, 順圧不安定による擾乱発達が必ずしも波成分のエントロフィーを最大化する方向に向いているわけではないことを示している. 従って, エントロフィーノルムではなく, 例えば, エネルギーノルム等の他の量で上限値問題を考えなおす必要があると考えられるが, これは今後の研究課題である.

また, 帯状平均絶対渦度の緯度分布についても, sech 型ジェットの場合のように, 上限値と最大値が近くなる場合には上限値を与える分布と最大値に対応する分布は非常に類似するが, tanh 型ジェットの場合のように, 上限値と最大値が離れている場合には, 分布もそれぞれに対応して大きく食い違っている. この分布についても, 上限値をより適切なノルムで考えることによって改善される可能性がある.

7 結論

石岡・余田(1995)で研究した帯状ジェットの順圧不安定による擾乱の有限振幅成長に対する上限値問題に関して、上限値を計算する際に用いられる制約条件を増して完全なものにすることによって上限値をより小さくすることを試みた。しかし、その結果、上限値は全く変化しなかった。また、比較のための数値実験において高階粘性を導入することによってエンストロフィー散逸を抑えても、上限値と最大値とのギャップは埋まらなかった。これは、上限値問題をエンストロフィーではなくエネルギー等の他の量で考える必要性があることを示唆している。

8 参考文献

- Hartmann, D. L., 1983: Barotropic instability of the polar night jet stream. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 817-835.
- 石岡圭一・余田成男, 1993: 順圧不安定による擾乱の飽和過程について — 2次元流体の統計理論 —. 数理解析研究所講究録, **830**, 179-187.
- Ishioka, K. and S. Yoden, 1994: Non-linear evolution of a barotropically unstable circum-polar vortex. *J. Meteor. Soc. Japan*, **72**, 63-80.
- 石岡圭一・余田成男, 1995: 順圧不安定による擾乱の発達の上限を求める数値的手法. 数理解析研究所講究録, **921**, 163-170.
- Shepherd, T. G., 1988: Rigorous bounds on the nonlinear saturation of instabilities to parallel shear flows. *J. Fluid Mech.*, **196**, 291-322.
- 田辺國士, 1976: アナログ型非線型計画法. 数理科学, **157**, 45-51.