

## 球殻 Couette 流の非軸対称流への遷移<sup>1</sup>

核融合研 荒木 圭典 (Keisuke Araki)  
同志社・工 水島 二郎 (Jiro Mizushima)  
岡山大・工 柳瀬 眞一郎 (Shinichiro Yanase)

### 1 概観

球殻 Couette 流の解の遷移については、数多くの実験および理論的解析がこれまで行われてきました。外殻を固定した球殻 Couette 流には、アスペクト比  $\beta = (R_o - R_i)/R_i$  と Reynolds 数  $Re = \Omega R_i^2/\nu$  という二つのパラメーターがあります。ここで、 $R_i$  および  $R_o$  はそれぞれ内殻と外殻の半径であり、 $\Omega$  は内殻球の角速度、 $\nu$  は流体の動粘性係数です。系のコントロール・パラメーターは二つしかありませんが、同一境界条件下において複数の安定な非線形定常解が存在し、流れの性質が(定常解であっても)系の履歴に依存するなど、たいへん面白い性質を持っています。

Reynolds 数が低い場合には、球殻内には内殻の回転に伴う東西流に加えて、南北両半球にひとつずつ大きな循環流(以下、この流れを 2 ロール解と呼びます)を生じます<sup>2</sup>。この 2 ロール解はアスペクト比  $\beta$  に依らず低 Reynolds 数領域に必ず存在します。ですから球殻 Couette 問題の課題は、この 2 ロール解からいかにして 2 次流、3 次流への遷移が生じるかを調べる事にあります。

この低 Reynolds 数における基本解である 2 ロール解は、アスペクト比  $\beta$  および Reynolds 数  $Re$  に依存する時間的に定常な解で、またその関数形を解析的に表現することは困難です。漸近的に解を求める試みは、例えば Munson and Joseph[7] によって行われましたが、最終的には数値計算の助けを借りています。したがって最初の不安定性から生じる分岐を調べる場合であっても、2 ロール解を数値的に求める事から始めなくてはなりません。

さて、流れの遷移のふるまいですが、球殻 Couette 流はアスペクト比  $\beta$  の大きさによって、流れの遷移の振舞いが定性的にも大きく異なっている事が、実験的に知られています [1, 4]。

球殻が薄い場合 ( $\beta < 0.23$ [1]) には、まずはじめに赤道付近に同軸円筒間の Taylor-Couette 流の場合と似たような Taylor 渦が生じる事が知られています。この Taylor 渦の生じる領域は赤道付近に限られているので、Taylor 渦の個数の最大値  $i_{max}$  はアスペクト比  $\beta$  によって変化します。Egbers and Rath は実験と数値計算の結果を用いて経験式  $i_{max} = 0.21\beta^{-4/3}$  を得ました [4]。

<sup>1</sup>講演時の標題は「球殻 Couette 流の非軸対称な不安定性」

<sup>2</sup>東西流だけでは、Navier-Stokes 方程式の厳密解にはなり得ません。この流れは、内殻の回転による遠心力で流体が内殻に沿って運ばれるために生じます。

さらに Reynolds 数が大きくなると、この 2 次的な Taylor 渦に対し非軸対称な不安定性が生じ、Taylor 渦はらせん状にねじれた形になります。この分岐の詳しい Reynolds 数依存性と生じる流れの多様性は、文献 [10] に  $\beta = 0.14$  の場合の結果が詳しく報告されています。軸対称解の分岐と軸対称攪乱に対する不安定性についての数値計算による理論的なアプローチとしては文献 [3, 5, 6] 等があります。

一方、球殻が厚い場合には、2 ロールに対して非軸対称の攪乱が最初に不安定化することが、実験的に知られています (e.g. [9, 12])。しかしながら理論的な安定性の計算は、これまでほとんど行われてきませんでした。球殻が厚い場合 ( $\beta > 0.3$ ) の安定性の計算には、 $\beta = 1$  の場合にエネルギー法を用いた Munson and Joseph の計算があります [8]。彼らは臨界 Reynolds 数  $Re_c = 90$ 、臨界波数  $m = 1$  を得ています。ところが一方、Belyaev and Yavorskaya の実験 [2] では、 $\beta = 1$  のときに  $Re_c = 450$  で最初の不安定性が  $m = 4$  の波数で生じています。これら理論と実験との不一致の原因は、エネルギー法が安定性の十分条件しか与えず、一般には実験で得られる臨界よりも低い値を与えることにあると思われる。

この 2 ロール解の非軸対称解への分岐はいまのところほとんど調べられていない状態です。本研究では流体層が厚い場合 ( $\beta = 0.5$ ) における 2 ロール解の非軸対称攪乱に対する不安定性を数値計算を用いて調べ、実験との比較を行います。

## 2 数値計算法について

本研究では系の諸量を球殻の厚み  $d$  および動粘性係数  $\nu$  を用いて無次元化します。このとき系のコントロール・パラメーターは、内殻および外殻半径  $R_i$  と  $R_o$ 、内殻の回転角速度  $\Omega$  を用いて、アスペクト比  $\beta = (R_o - R_i)/R_i$  と Reynolds 数  $Re = \Omega R_i^2/\nu$  という二つのパラメーターとなります。非軸対称攪乱に対する線形安定性の計算においては、東西の波数  $n$  がパラメーターが一つつけ加わります。以下、座標系は同心球の中心を原点とする球座標系  $(r, \vartheta, \varphi)$  を用います。

無次元化された基礎方程式として連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

と Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \Delta \mathbf{u} \quad (2)$$

をとります。今回の研究では軸対称 ( $\partial/\partial\varphi \equiv 0$ ) な定常解  $\mathbf{U}$  を

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{U} \quad (3)$$

によって求め、定常解  $\mathbf{U}$  の線形安定性を、攪乱  $\mathbf{u} \propto \exp[\lambda t]$  を仮定し、固有値問題

$$\lambda \mathbf{u} = -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nabla p + \Delta \mathbf{u} \quad (4)$$

を解くことによって求めました。

速度場の境界条件は粘着境界条件、すなわち、

$$\mathbf{u}(R, \vartheta, \varphi) = \Omega R \sin \vartheta \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{u}(R+1, \vartheta, \varphi) = \mathbf{0} \quad (5)$$

としました、ここで  $\mathbf{e}_\varphi$  は  $\varphi$ -方向の単位ベクトルです。数値計算においては、この境界条件を流れを次のように表現することで取り込んでいます:

$$\mathbf{u}(r, \vartheta, \varphi, t) = \mathbf{u}_S(r, \vartheta) + \mathbf{u}_R(r, \vartheta, \varphi, t) \quad (6)$$

ここで  $\mathbf{u}_S$  は Stokes 流、すなわち  $\Delta \mathbf{u}_S = \mathbf{0}$  および境界条件 (5) を満たす解とし、速度残差  $\mathbf{u}_R$  に関する境界条件は粘着境界条件

$$\mathbf{u}_R(r, \vartheta, \varphi, t) = \mathbf{0} \quad (7)$$

を満たすようにとります。

本研究では計算領域の節約のため、流れを流れ関数を用いて表現し、それらに関する方程式を解きます。まず軸対称定常解の残差部分  $\mathbf{U}_R$  を、次のように表現します:

$$\mathbf{U}_R(r, \vartheta) = \nabla \times \left( \frac{\psi(r, \vartheta)}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi \right) + \frac{\omega(r, \vartheta)}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi, \quad (8)$$

ここで  $\psi, \omega$  は境界条件

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \omega = 0 \quad (9)$$

を満たす流れ関数です。また非軸対称攪乱  $\mathbf{u}$  は

$$\mathbf{u}(r, \vartheta, \varphi) = \nabla \times \nabla \times (F(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_r) + \nabla \times (G(r, \vartheta, \varphi) \mathbf{e}_r) \quad (10)$$

と表現しました、ここで  $F, G$  は境界条件

$$F = \frac{\partial F}{\partial r} = G = 0 \quad (11)$$

を満たす流れ関数、 $\mathbf{e}_r$  は  $r$ -方向の単位ベクトルです。

これらの流れ関数を、 $r$ -方向には境界条件を満たすように変形された Chebyshev 多項式を、 $\vartheta$ -方向には Legendre 関数と陪関数を用いて関数展開し、方程式 (3, 4) に代入して、展開係数に関する連立方程式に還元します (展開関数は表 1 を参照)。圧力項は方程式の rot をとることにより消去します。

これらの流れ関数を用いた場合、Navier-Stokes 方程式の非線形項に由来する項の計算は、直線的ではあるけれども、非常に鬱陶しいものです。今回の計算において単純かつ形式的かつ長々とした微分計算には Mathematica を用いました。

展開係数に関する連立方程式は選点法 (collocation method) を用いて解きます。定常軸対称解は Newton-Raphson 法を、その解の非軸対称攪乱に対する線形安定性の固有値問題は二重 QR 法と Newton-Raphson 法を併用して求めます。計算の収束性および方法の使い分けについては、次の節で説明します。

流れ関数	境界条件	$r$ -方向	$\vartheta$ -方向
$\psi(r, \vartheta)$	$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$	$(1-x^2)^2 T_m(x)$	$\sin \vartheta P_l'(\cos \vartheta)$
$\omega(r, \vartheta)$	$\omega = 0$	$(1-x^2) T_m(x)$	$\sin \vartheta P_l'(\cos \vartheta)$
$F(r, \vartheta, \varphi)$	$F = \frac{\partial F}{\partial r} = 0$	$(1-x^2)^2 T_m(x)$	$Y_l^n(\vartheta, \varphi)$
$G(r, \vartheta, \varphi)$	$G = 0$	$(1-x^2) T_m(x)$	$Y_l^n(\vartheta, \varphi)$

表 1: 展開関数一覧。  $T_m(x)$  は  $m$  次 Chebyshev 多項式、  $x = 2(R-r) - 1$ 、  $P_l$  は  $l$  次 Legendre 多項式、  $'$  は  $\vartheta$  に関する微分、  $Y_l^n$  は球面調和関数。

### 3 収束性の判定

本研究では、定常解と固有値問題の展開打ち切りに対する収束性を、固有値の分布の収束性をから判定しました。この過程で選点上での定常軸対称解の高階微分まで含めた収束が、固有値の収束に影響を与えることが判りました。

本研究では速度ベクトル  $\mathbf{u}$  に対し、軸対称定常解は南北対称 (Legendre 多項式の  $l$  が偶数)、非軸対称攪乱は南北反対称 (球面調和関数  $Y_l^m$  の  $l-m$  が奇数) を仮定しました。なおこれ以降の節にあらわれる  $(M, L) = (16, 64)$  等のベクトルは計算の展開項数 ( $r$ -方向,  $\vartheta$ -方向) です。例えば  $(16, 64)$  とあった場合には、主流の流れ関数を

$$\begin{cases} \psi(r, \vartheta) = \sum_{m=0}^{16} \sum_{l=0}^{64} \psi_{ml} (1-x^2)^2 T_m(x) \sin \vartheta P_{2l+2}'(\cos \vartheta), \\ \omega(r, \vartheta) = \sum_{m=0}^{16} \sum_{l=0}^{64} \omega_{ml} (1-x^2) T_m(x) \sin \vartheta P_{2l+1}'(\cos \vartheta) \end{cases} \quad (12)$$

攪乱の流れ関数を

$$\begin{cases} F(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{m=0}^{16} \sum_{j=0}^{64} F_{mj} (1-x^2)^2 T_m(x) Y_{n+2j+1}^n(\vartheta, \varphi), \\ G(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{m=0}^{16} \sum_{j=0}^{64} G_{mj} (1-x^2) T_m(x) Y_{n+2j}^n(\vartheta, \varphi) \end{cases} \quad (13)$$

によって近似したことを示しています。

収束のチェックは次の段階で行います。(1) 固有値問題の展開項数を固定して、定常解の展開項数を増加させる。(2) 定常解の展開項数を固定して、固有値問題の展開項数を増加させる。系のパラメーターは  $\beta = 0.5$ ,  $Re = 1500$ ,  $n = 1$  に固定しました。

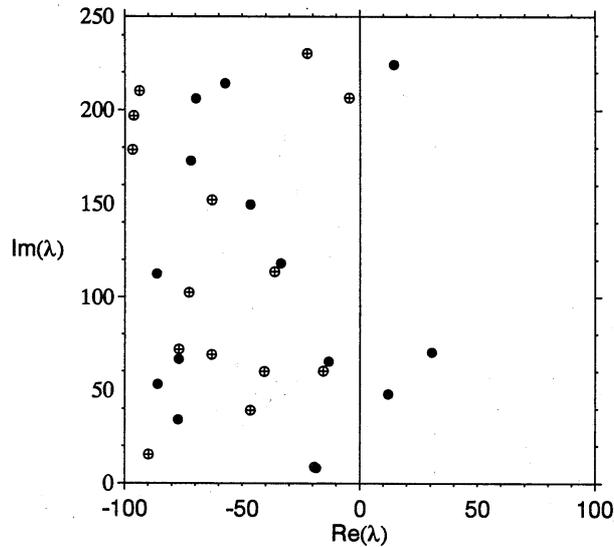


図 1: 定常解の収束に伴う固有値の収束のふるまい。固有値問題 (8,32) (固定)。定常解は ● (8,32), ○ (16,64), + (16,128)。

まず (1) の結果ですが、図 1 に固有値問題 (8,32) の場合の固有値の収束のふるまいを示しました。この図より、定常解の計算を (16,64) と (16,128) で行ったときの固有値は一致しており、定常解の収束は (16,64) で十分であると考えられます。

図 2(a) に定常解を (16,128) で行った場合の固有値問題の収束を示しました。計算の結果、展開項数  $M \geq 14$ ,  $L \geq 56$  程度ならば、成長率  $\text{Re}(\lambda) > -250$  における固有値の個数および分布は定性的に変わらないことが判りました。これよりこの程度の展開項数を用いれば、成長率の大きな固有関数の空間的な構造はほぼ定性的に捉えられると考えられます。

図 2(b) に展開項数が小さい場合の固有値のふるまいを示します。展開項数が小さい場合には、偽の不安定固有値が生じることが判りました。空間分解能の不足によって偽の固有値が生じ、空間分解能の増加に伴い固有値の実部が急速に減少することが示されています。このモードを Newton-Raphson 法により追跡すると、最不安定ではないモードへと漸近しました。このことより空間分解能が小さい計算を行うと、実際の臨界 Reynolds 数よりも低い偽の臨界値と偽の固有関数を出すものと考えられます。

以上の結果より、次のように固有値計算の戦略を立てました。(1) 定常軸対称解を (16,64) の精度で求め、必要に応じて (16,128) の精度の解を求めておく。(2) (16,64) 定常解のまわりで (16,64) 固有値問題を計算し、Newton-Raphson 法を用いて最不安定攪乱とその固有値をより大きな展開項数 (16,128) へと引き上げる。打ち切り項

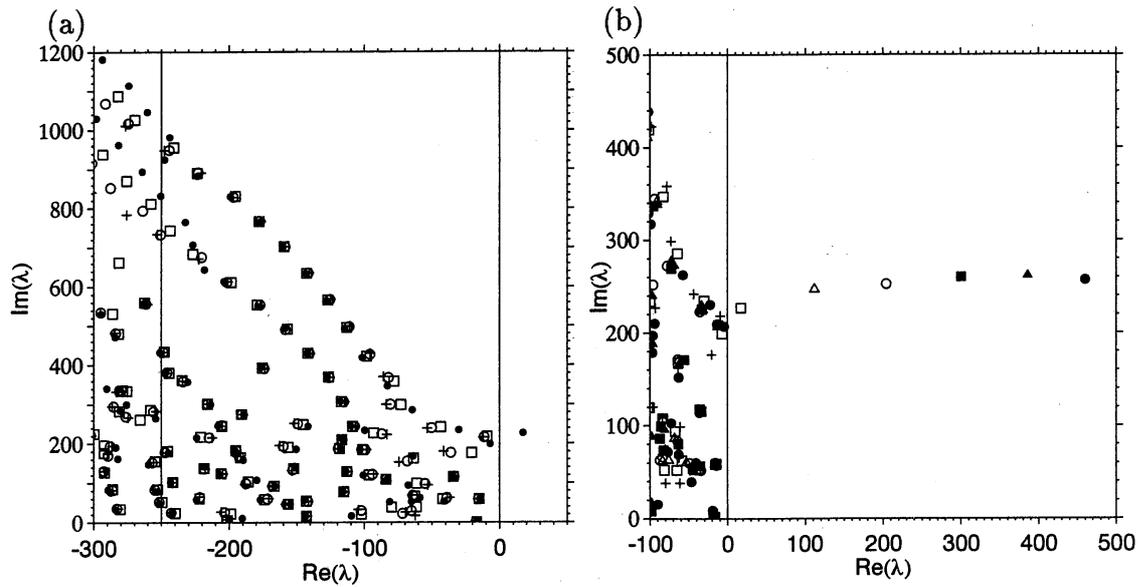


図 2: 定常解 (16,128) に固定したときの固有値の収束のふるまい。東西波数  $n = 1$  の場合。(a) 固有値問題の項数は ● (13,52), □ (14,56), ○ (15,60), + (16,64)。(b) 固有値問題の項数は ● (8,32), ▲ (9,36), ■ (10,40), ○ (11,44), △ (12,48), □ (13,52), + (14,56)。偽の不安定固有値の成長率が次第に下がる。

数が (16,64) の場合、数値計算には約 340 MB のメモリを必要とします。

#### 4 $\beta = 0.5$ の結果

今回の報告では、アスペクト比を  $\beta = 0.5$  に限定します。概観の部分でふれたように、このパラメーターは実験的に「厚い」球殻のカテゴリーに入っている事が知られています。Egbers and Rath の実験によれば、このときの臨界 Reynolds 数は  $Re = 1244$ 、東西方向の臨界波数は  $n = 5$  です [4]。4.1節で不安定な主流の特徴づけを行い、4.2節で臨界 Reynolds 数、臨界波数、位相速度を示し、4.3節では攪乱の空間構造について考察します。

##### 4.1 定常軸対称解について

臨界 Reynolds 数近傍における軸対称定常解は、流れの構造を「内殻せん断層」「赤道ジェット」「外殻緩和流」の三つの領域に分割して考えることができます (図 3)。4.3節で見るとこの三つの領域に対応した部分に、不安定攪乱を分割して見ることによって、不安定性の生成の機構を定性的に理解することができます。

まず「内殻せん断層」は  $R < r < R + 0.2$  の領域に広がっており、強い東西のせん断流と、赤道向きの南北流によって特徴づけられます。したがって、流れの

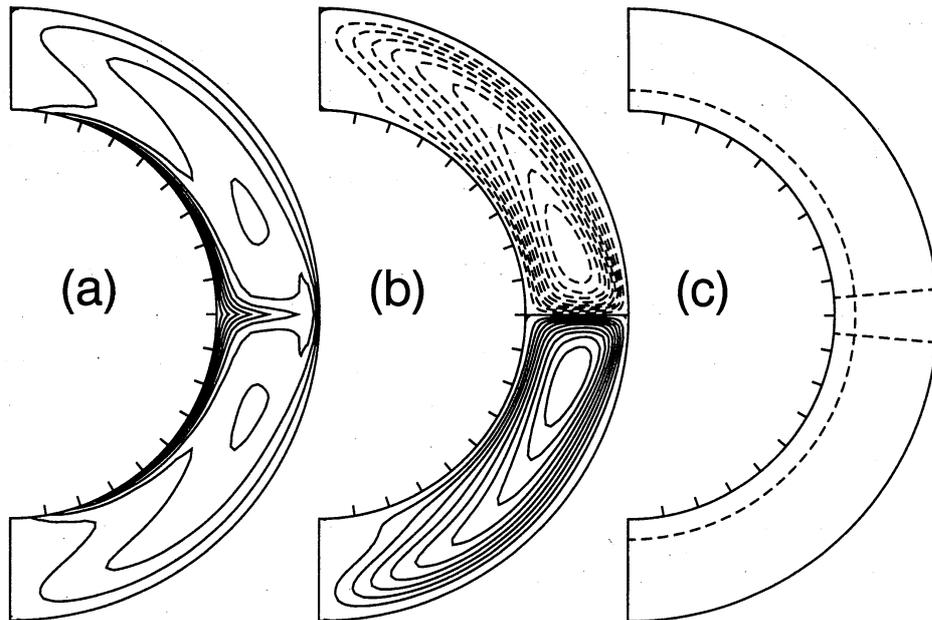


図 3: 軸対称定常解。アスペクト比  $\beta = 0.5$ , Reynolds 数  $Re = 1500$ , 展開項数 (16,128)。(a)  $u_\varphi$ , (b)  $\psi/(r \sin \vartheta)$ , (c) 領域分割。等高線の間隔は、振幅の絶対値の最大の 10% おきにとっている。

全体は内殻に沿って極から赤道へ向けてらせん状に走る流れになっています。

「赤道ジェット」領域は、境界せん断層から赤道付近で外殻側に伸びた東西流によって特徴づけられ、その広がりには赤道より南北  $5^\circ$  の領域に広がっています。この領域の南北流は、内殻、外殻の赤道上に二つの淀み点を持っています。

「外殻緩和流」領域は、もっとも大きな体積を占める部分ですが、空間的にほとんど一様な東西流と、南北の大循環の外側部分(赤道から極へ向かう流れ)によって特徴づけられます。この領域の主流の東西流成分の大きさは、図 3(a) よりわかるように、内殻の赤道上の値のおよそ 2 割程度になっています。

したがって、臨界点近傍での軸対称解は、内殻の回転によるせん断応力を内殻せん断層および赤道ジェットの狭い領域でほとんど吸収し、外殻緩和流で前二者の領域での質量輸送を保証する形の解になっています。

## 4.2 臨界 Reynolds 数、臨界波数、位相速度

$1 \leq n \leq 8$  の固有値を表 2 に示します。(16,128) のデータ(表 2(c)) を線形最小二乗法で補間して臨界 Reynolds 数  $Re = 1236$  を得ました。臨界東西波数は成長率の最も大きい  $n = 5$  であると考えられます。これらは Egbers and Rath が実験で観測した値  $Re = 1244$ ,  $n = 5$  と良く合っています。

(a) $\text{Re}(\lambda)$				$\text{Im}(\lambda)$			
n	Reynolds 数			n	Reynolds 数		
	1200	1300	1500		1200	1300	1500
1		-16.0324	3.23557	1		0.504038	174.758
2			-16.0433	2			170.171
3			-0.765842	3			277.887
4		0.0410461	5.07798	4		337.868	375.942
5	-1.48371	1.63858	6.40336	5	396.526	421.563	470.780
6		0.0824759	4.08118	6		503.818	565.016
7			-1.94432	7			660.664
8			-10.0699	8			759.860

(b) $\text{Re}(\lambda)$				$\text{Im}(\lambda)$			
n	Reynolds 数			n	Reynolds 数		
	1200	1300	1500		1200	1300	1500
5	-1.22575	2.10472	7.76858	5	396.568	421.592	470.743

(c) $\text{Re}(\lambda)$				$\text{Im}(\lambda)$			
n	Reynolds 数			n	Reynolds 数		
	1200	1300	1500		1200	1300	1500
5	-1.22631	2.13072	7.83657	5	396.750	421.946	471.692

表 2:  $\beta = 0.5$  での固有値。展開項数は、(a) 定常解 (16,64), 固有値問題 (16,64), (b) 定常解 (16,128), 固有値問題 (16,64), (c) 定常解 (16,128), 固有値問題 (16,128).

n	1	2	3	4	5
$\text{Im}(\lambda)$	174.758	170.171	277.887	375.942	470.780
$\Omega_1$	174.758	85.0855	92.6290	93.9855	94.1560
$\Omega_1/\Omega$	0.466021	0.226895	0.247011	0.250628	0.251083
n	6	7	8		
$\text{Im}(\lambda)$	565.016	660.664	759.860		
$\Omega_1$	94.1693	94.3806	94.9825		
$\Omega_1/\Omega$	0.251118	0.251682	0.253287		

表 3: 固有関数の位相速度、 $\beta = 0.5$ ,  $Re = 1500$ , 展開項数は定常解 (16,64), 固有値問題 (16,64).

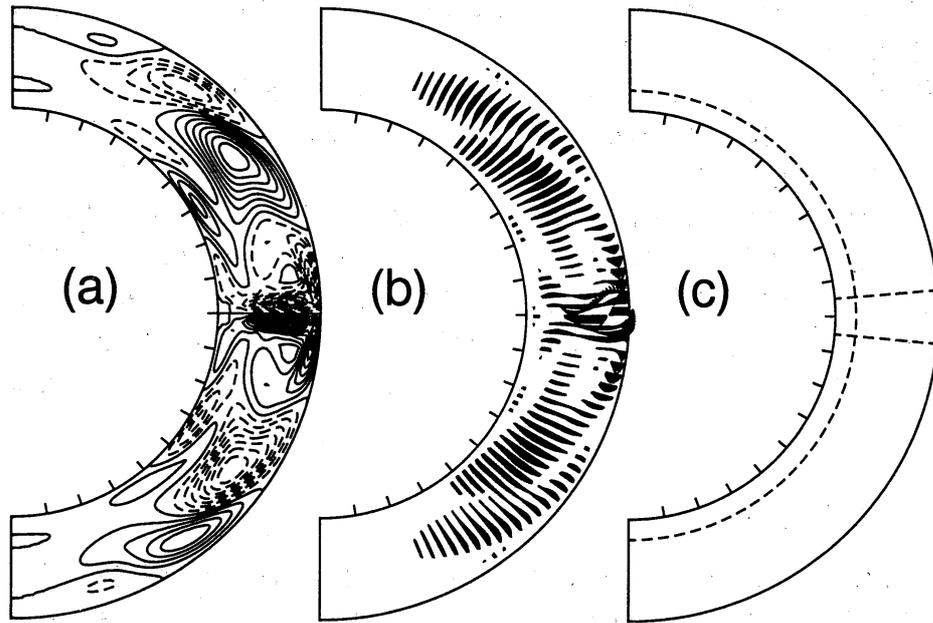


図 4: 非軸対称攪乱の断面。アスペクト比  $\beta = 0.5$ , Reynolds 数  $Re = 1500$ , 展開項数 (16,128)。(a)  $u_\varphi$ , (b)  $u_\perp$  (c) 領域分割。等高線の間隔は、振幅の絶対値の最大の 10% おきにとっている。

攪乱の  $\varphi, t$  依存性は  $\exp[i(n\varphi - \text{Im}(\lambda)t)]$  なので、不安定攪乱の位相速度  $\Omega_1$  を  $\Omega_1 = \text{Im}(\lambda)/n$  で定義します。表 3 に位相速度  $\Omega_1$  と内殻の回転角速度で規格化した位相速度を示しました。

位相速度は内殻の回転の方向と同じ向きで、その大きさは東西波数  $n$  には依らず、内殻の回転の角速度のおよそ 25% 程度の大きさになっています。位相速度の実験との対応については、Egbers and Rath の論文では位相速度の定義を陽に書いていないので、 $\text{Im}(\lambda)/\Omega$  ( $\Omega_1/\Omega$  ではない) と彼らの「位相速度」との一致が大変よいことをコメントするにとどめます。

### 4.3 固有関数の空間構造

ここでは、不安定モードの解の空間構造について考察します。図 4 に  $Re = 1500$ ,  $n = 5$ , 展開項数 (16,128) の場合の不安定攪乱の図を示します。

まず固有関数全体は、主流の三つの領域に対応する部分にそれぞれ特徴的な構造を持っています。赤道ジェット領域を除いた部分ではらせん状構造を持っています。これは実験で観測される構造とよく似ています [12]。らせん型構造は、薄い球殻の場合には 2 次分岐以降に生じますが [10]、形としては球殻の厚みによらず普遍的に観測される構造です [2, 4]。

まず内殻せん断層領域には、らせん型に渦が形成されますが、その振幅は関数全体との比較で見ると小さな値になっています。

不安定攪乱のうち振幅の最も強い部分は赤道ジェット領域に局在しています。この領域で発生した攪乱は、外殻上の淀み点まわりの流れに沿って運ばれて、外殻沿い南北約  $20^\circ$  の範囲まで伸びています。

外殻緩和流領域のらせん構造は、実験的に最も目立つ部分です。攪乱の位相速度は 4.2 節で述べたように、内殻の回転角速度のおよそ 25 % です。この領域の主流の東西流成分の大きさの速度は、4.1 節で述べたようにの内殻赤道の速度のおよそ 2 割程度です。したがって、赤道ジェットで励起された波がこの領域に 2 次的な波を励起し、その波が主流によって運ばれるという機構で、このらせん構造が形成されるものと思われます。

## 5 まとめと今後の課題

厚い球殻 Couette 流 ( $\beta = 0.5$ ) の非軸対称な攪乱に対する線形安定問題を数値的に解きました。臨界 Reynolds 数および臨界波数に関しては Egbers and Rath の結果と良く一致する値を得ました。実験で得られたらせん渦の「位相速度」と固有値の虚数部分が一致していることは、不安定性により遷移した流れが (軸対称の主流)+(微小な不安定モード) で十分に近似できること、すなわち弱非線形理論で十分に取扱うことができることを示しています。このことと固有値の縮退の無いことから、球殻 Couette 流の最初の分岐は Hopf 分岐であると結論づけられます。

空間分解能の不足によって偽の最不安定モードが生じ、これは真の不安定モードとは関係がないことが数値的に示されました。Munson and Joseph[8] の計算結果と Belyaev and Yavorskaya の実験 [2] の臨界値のくい違いの原因は、(1) エネルギー法の臨界が一般には線形安定による臨界よりも低い [?], というだけでなく、(2) 空間分解能の不足による偽のモードを捉えている、の二つの可能性があると考えられます。

不安定モードの位相速度と外殻緩和流領域での東西流の大きさがほぼ同じ程度ですから、攪乱は平均流に対してほとんど相対速度を持っていません。sech 型のジェット流の不安定性において、攪乱の位相速度の大きさは主流の最大値の約 4% なので [11]、主流に対して相対速度をほとんど持ちません。今回の不安定性の生成の機構も、まず第 1 近似としてはジェットの不安定性で理解し得るものと考えられます。この不安定性に対して、3 次元性がどのように影響を及ぼすのかについては、今後の課題です。

## 参考文献

- [1] Belyaev, Yu. N., Monakhov, A. A., and Yavorskaya, I. M., Fluid Dyn. 13

- (1978) pp.162-168, [Transl. Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekhanika Zhidkosti i Gaza, No. 2, pp.9-15, March-April, 1978]
- [2] Belyaev, Yu. N., and Yavorskaya, I. M., Transition to stochasticity of viscous flow between rotating spheres, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence* edited by Barenblatt, G. I., Iooss, G., and Joseph, D. D., (Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1983).
- [3] Bühler, K., *Acta Mech.* **81** (1990) pp.3-38.
- [4] Egbers, C., and Rath, H. J., *Acta Mech.* **111** (1995) pp.125-140.
- [5] Mamun, C. K., and Tuckerman, L. S., *Phys. Fluids* **7** (1995) pp.80-91.
- [6] Markus, P. S., and Tuckerman, L. S., *JFM* **185** (1987) pp.1-30, *JFM* **185** (1987) pp.31-65.
- [7] Munson, B. R., and Joseph, D. D., *JFM* **49** (1971) pp.289-303.
- [8] Munson, B. R., and Joseph, D. D., *JFM* **49** (1971) pp.305-318.
- [9] Munson, B. R., and Menguturk, M., *JFM* **69** (1975) pp.705-719.
- [10] Nakabayashi, K., and Tsuchida, Y., *JFM* **194**, (1988) pp.101-132.
- [11] Yanase, S., Fujimura, K., Mizushima, J., and Gotoh, K., *J. Phys. Soc. Japan* **55** (1986) pp.106-114.
- [12] Yavorskaya, I. M., Belyaev, Yu. N., and Monakhov, A. A., *Sov. Phys. Dokl.* **20** (1975) pp.256-258, [Transl. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **221** (1975) pp.1059-1062]