

## 乱流速度場の統計分布とClosure Model

都立大・理 富山泰伸

### § 1 はじめに

乱流の統計理論の目的はNavier-Stokes方程式から派生する無限に続くハイエラキーをなす速度相関方程式系の連鎖を、ある作業仮説に基づいて、有限個の方程式で完結させ、それにより乱流構造を解明することである。準正規分布近似理論(QN)はその仮説を速度場の確率統計分布の正規性に根拠を置き、仮説の検証は可能であり、事実速度場の1点分布はほぼ正規分布と見なしうるし、最近の研究<sup>1)</sup>では高波数の粘性領域を除く低波数ではその速度成分は正規分布に近いことが報告されている。しかしながら、良く知られているように、QNは不合理な結果を導く。その原因は当然のこながら準正規分布仮説に帰すべきであろう。一方、その他の多くの乱流理論では、その方程式導出の基になる仮説の正否を直接検証せず、導かれた乱流方程式から計算されるエネルギー・スペクトルやSkewness factorなどの間接的な結果により理論の評価が行われている。それらの結果がたとえ妥当なものであっても、そのような検証法で理論を全面的に評価するのは危険である。理論の評価はそのような間接的な評価はもとより、先ず第一に、理論構成の基礎をなす仮説の直接的な実験的証拠を示す必要がある。

本研究では、方程式の形が同型に帰着できる乱流統計理論の作業仮説がどのように乱流統計量と関連しているかを示し、それに基づき2つの具体的な乱流モデルに対してその作業仮説が直接関係する統計量と乱流方程式が導く結果と、それらに対応する実験結果とを比較しモデルの検討を行う。その1つはEDQNMである。EDQNMの乱流方程式をNavier-Stokes方程式から導き出すにはいくつもの複合した仮定(渦粘性の存在、準正規分布、マルコフ性などの仮定)を必要とするだろう。他の一つは、EDQNM同様、慣性領域においてKolmogorov則を満たし、尖り度の計算が簡単になるように応答関数を定めたモデルである。そのため、このモデルの仮説をはっきりした形に示すことはできない。これらのモデルの導く総合的な結果は実験結果と矛盾しパラドクスを示すが、その原因はモデル選択の特殊性によるのではなく、もっと根本的な問題を含んでいるように思われる。

### § 2 統計仮説と乱流方程式

準正規分布理論<sup>2)</sup>、DIA<sup>3)</sup>、EDQNM<sup>4)</sup>など多くの統計理論ではその基になる仮説はそれぞれ異なるが、導かれる乱流方程式は一樣、等方性乱流に対して、一般的に、次のような形に表される

$$\partial U(k,t)/\partial t + 2vk^2 U(k,t) = H(k,t), \quad (2-1)$$

$$H(k,t) = 2\pi \int_0^\infty dp p^2 \int_{|k-p|}^{k+p} dq q \beta(x,y,z) \int_0^t ds H(k,p,q,t,s), \quad (2-2)$$

$$H(k,p,q,t,s) = \left[ U(p,s)G(k,p,q,t,s) - U(k,s)G(k,p,q,t,s) \right] U(q,s), \quad (2-3)$$

$$\beta(x,y,z) = xy + z^3, \quad x = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} / pq, \quad y = \mathbf{q} \cdot \mathbf{k} / qk, \quad z = \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} / kp, \quad (2-4)$$

$U(k,t)$  はエネルギー・スペクトル密度で  $G(k,p,q,t,s)$  は応答関数である。各理論の違いはその理論の応答関数に反映されることになる。例えば、QN、EDQNMは応答関数を、それぞれ

$$G(k,p,q,t,s) = \exp\left[-v(k^2 + p^2 + q^2)(t-s)\right], \quad (2-5)$$

$$G(k,p,q,t,s) = U(p,t)U(q,t) \exp\left[-\gamma(k,p,q,t)(t-s)\right] / U(p,s)U(q,s) \quad (2-6)$$

と置くことによって得られる。

乱流統計理論の評価はそれが導く結果によって判断されがちであり、理論の基本をなす仮説と乱流の諸量との直接的な関係は不明確にされてきているように思われる。理論の導く結果による評価だけでなく、理論の基本をなす仮説の重要性を考え、仮説が直接関係する統計量を調べることにする。

乱流の統計方程式が Navier-Stokes 方程式を基礎方程式とし、統計平均としてアンサンブル平均を用いて導出できるものとしよう。一様・等方性乱流を考え、Navier-Stokes 方程式により速度のフーリエ成分に対する 2 次、3 次の速度相関の発展方程式を導き、3 次速度相関の発展方程式を時間積分し 3 次速度相関が形式的に求められる。形式解の被積分項の 4 次の速度相関を正規部分と非正規部分の 4 次キュムラントに分けて書いたのが以下に示す (2-7) の左辺である。この項の処方 は諸理論により異なるが、応答関数の導入によりその最終表式は

$$\int_0^t ds e^{-v(k^2+p^2+q^2)(t-s)} \left[ U(p,s)U(q,s) + C(k,p,q,s) \right] = \int_0^t ds G(k,p,q,t,s) U(p,s)U(q,s), \quad (2-7)$$

$$G(k,p,q,t,t) = 1. \quad (2-8)$$

の形に統一して表すことができる。ここで、左辺の括弧の中の $U(p,s)U(q,s)$ 、 $C(k,p,q,s)$ はそれぞれ、4次速度相関の正規部分、および非正規部分の4次キュムラント項である。式(2-7)を時間 $t$ で微分して、4次キュムラントが以下のよう  
に得られる。

$$C(k,p,q,t) = \int_0^t ds \left[ \partial G(k,p,q,t,s) / \partial t + v(k^2 + p^2 + q^2) G(k,p,q,t,s) \right] U(p,s) U(q,s). \quad (2-9)$$

この式は4次キュムラントを応答関数で表現しただけで、(2-1) ~ (2-4)を完結した方程式にするには何らかの仮説が必要であり、その仮説が集約された応答関数の表式が判れば4次キュムラントが求められる。

これから扱う乱流は定常乱流で応答関数は

$$G(k,p,q,\tau) = \exp[-\gamma(k,p,q)\tau] \quad (2-10)$$

と表されるものとする、4次キュムラントは(2-9)、(2-8)より

$$C(k,p,q,s) = \sigma(k,p,q) U(p) U(q), \quad (2-11)$$

$$\sigma(k,p,q) = v(k^2 + p^2 + q^2) / \gamma(k,p,q) - 1, \quad (2-12)$$

と表される。以下の2つの場合を考えよう。

<Case I>: Eddy Damped Quasi-Normal-Markovian (EDQNM)の仮説は速度場の確率分布の準正規性、Kolmogorov則を導く渦粘性の存在、Markov過程などの複合仮説である。その仮説を体現する量は渦粘性による減衰率(eddy turnover timeの逆数)であり、それが応答関数とつぎのように関係している。

$$\gamma(k,p,q) = c \left[ \sqrt{k^3 E(k)} + \sqrt{p^3 E(p)} + \sqrt{q^3 E(q)} \right] + \alpha v (k^2 + p^2 + q^2). \quad (2-13)$$

最初の3項が $k, p, q$ の波数の渦の渦粘性による減衰率である。 $c$ はKolmogorov定数の値に依存した定数で、 $\alpha$ は任意定数である。

<Case II>: 波数 $k, p, q$ が十分小さい慣性領域ではKolmogorov則が成り立ち、高波数の粘性領域では粘性項が卓越するものとし、加えて、尖り度(Kartosis)が計算し易い単純なモデル

$$\gamma(k, p, q) = (k^2 + p^2 + q^2) \left\{ c \left[ E(p)E(q)/pq \right]^{-1/4} + \alpha v \right\}. \quad (2-14)$$

を調べることにする。同じ要請を満たすモデルはこの他にもいろいろ考えられる。

### § 3 定常乱流

低波数の極限でエネルギーを供給し高波数領域で統計的に定常な乱流を考えよう。定常乱流では (2-1), (2-2), (2-3) は次のように表される。

$$2vk^2 E(k) = \int_0^\infty dp \int_{k-p}^{k+p} dq \beta(x, y, z) q^{-1} E(q) \left[ k^2 E(p) \tau(k, p, q) - p^2 E(k) \tau(p, k, q) \right], \quad (3-1)$$

$$\tau(k, p, q) = 1 / \int_0^\infty G(k, p, q, s) ds. \quad (3-2)$$

低波数の極限  $k=0$  でエネルギーを供給しているので、エネルギー領域は  $k=0$  の近傍であり、そこを除く  $O(k_d)$  ( $k_d$  は Kolmogorov 波数) より小さな波数領域が慣性領域となる。したがって、エネルギー・スペクトルは

$$E(k) = Ko \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} F(k/k_d). \quad (3-3)$$

と書き表される。ここで、 $\varepsilon$  はエネルギー散逸率で  $F(k/k_d)$  は普遍関数、 $Ko$  は Kolmogorov 定数である。(3-3) を (3-1) に代入し、変数変換

$$k = k_d \xi, \quad p = k \eta, \quad q = k \zeta \quad (3-4)$$

を行い、整理し普遍関数  $F(\xi)$  を次のように表すことができる。

$$F(\xi) = A(\xi) / [B(\xi) + 2D\xi^{4/3} / Ko], \quad (3-5)$$

$$A(\xi) = \int_0^\infty d\eta \eta^{-5/3} F(\xi\eta) \int_{1-\eta}^{1+\eta} d\zeta \beta(x, y, z) \zeta^{-5/3} F(\xi\zeta) \theta(\xi, \eta, \zeta), \quad (3-6)$$

$$B(\xi) = \int_0^\infty d\eta \eta^{4/3} \int_{1-\eta}^{1+\eta} d\zeta \beta(x, y, z) \zeta^{-5/3} F(\xi\zeta) \theta(\xi\eta, \eta^{-1}, \eta^{-1}\zeta), \quad (3-7)$$

$$\gamma(k, p, q) = D\varepsilon^{1/3} k^{2/3} / \theta(\xi, \eta, \zeta). \quad (3-8)$$

特性時間  $\gamma(k, p, q)$  が  $k, p, q, E(k), E(p), E(q)$  などで表され、したがって、 $\theta(\xi, \eta, \zeta)$  が  $\xi, \eta, \zeta, F(\xi), F(\eta), F(\zeta)$  で表されると、反復法により普遍関数  $F(\xi)$  が求められる。前節で述べた2つの場合について考えよう。

Case I のEDQNMに対しては  $\theta(\xi, \eta, \zeta)$  は

$$\theta(\xi, \eta, \zeta)^{-1} = D\epsilon^{1/3} k_d^{2/3} \xi^{2/3} \left[ 1 + \eta^{2/3} + \zeta^{2/3} + \alpha D^{-1} \xi^{4/3} (1 + \eta^2 + \zeta^2) \right] \quad (3-9)$$

と表すことができる。他方、Case II に対しては

$$\theta(\xi, \eta, \zeta)^{-1} = D\epsilon^{1/3} k_d^{2/3} \xi^{2/3} (1 + \eta^2 + \zeta^2) \left[ (\eta\zeta)^{-2/3} + \alpha D^{-1} \xi^{4/3} \right] \quad (3-10)$$

ただし、(3-9), (3-10) の定数  $D$  は  $D = cK\alpha^{-1/2}$  である。

#### § 4 尖り度 (Kartosis or Flatness factor)

すでに § 2 で示したように、一般に、乱流方程式は (2-1) ~ (2-4) の形で表され、4次キュムラントと応答関数が式 (2-9) によって関係づけられた。4次キュムラントの大きさは尖り度の測定により調べられるので、各理論の応答関数に対応する4次キュムラントを (2-9) より求め、それから計算される尖り度の理論値と実験値と比較することにより、各理論の仮説の検証が可能になる。

速度  $u$  の  $m$  階微分の尖り度  $K_m$  は、4次キュムラントと応答関数を関係づける (2-10) ~ (2-12) を用いて、次のように表すことができる。

$$K_m = \left\langle (\partial u / \partial x)^{2m} \right\rangle / \left\langle (\partial u / \partial x)^2 \right\rangle^m = 3(1 + \Delta K_m), \quad (4-1)$$

$$\Delta K_m = \left[ (2m+3)(2m+1)/8\pi \right]^2 Q_m / D_m, \quad (4-2)$$

$$Q_m = \int_0^\infty dp \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dq \int_0^\pi d\mu \int_0^{2\pi} d\psi P_m(p, \theta, \varphi) P_m(q, \mu, \psi) \sigma(k, p, q), \quad (4-3)$$

$$P_m(p, \theta, \varphi) = p^{2m} E(p) (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) \sin^{2m+1} \theta \cos^{2m} \varphi, \quad (4-4)$$

$$D_m = \left[ \int_0^\infty p^{2m} E(p) dp \right]^2. \quad (4-5)$$

更に、4次キュムラントの構造を調べるため Katsuyama, et al の実験<sup>1)</sup>を採り上げる。彼らの測定した間欠度は、1点で測定した速度変動の時系列のスペクトルの周波数  $f$ 、そのまわりに広がるバンド幅  $\Delta f$  の周波数帯の速度成分で構成される間欠度のスペクトル（以下では間欠度スペクトルと呼ぶ）であり、尖り度のスペクトル（以下では尖り度スペクトルと呼ぶ）の逆数に相当している。その要点を尖り度のペクトルで述べると、慣性領域を含む低波数領域では尖り度スペクトルの値は3に近く、バンド幅の減少に伴い一層3に近づく傾向を示すこと、粘性領域では波数の増大に伴いその値は3より次第に大きくなることである。実験値と理論値の比較のために周波数を波数に置き換え、言い換えると、慣性領域以下の波数領域における速度分布は近正規分布であり粘性領域では正規分布から次第に離れ非正規性が顕著になる。

Case I、Case II に対する波数領域における速度分布を調べるために、波数  $k$  の速度成分の尖り度のペクトルのバンド幅がゼロに対応する次のような量を考える。式 (4-1) ~ (4-4) で波数  $p, q, p', q'$  ( $p+q=p'+q'=\Delta k$ ) の速度のうち  $p=q, p'=-q', \Delta k=0$  の尖り度のペクトル  $K(k)$  を考える。

$$K(k) = 3 \left[ 1 + \Delta K(k) \right], \quad (4-9)$$

$$\Delta K(k) = 2vk^2 / \gamma(0, k, k) - 1. \quad (4-10)$$

上に述べた実験によると、 $K(k)$  は慣性領域ではほぼ3に等しく、粘性領域では波数が大きくなるにしたがって次第に増大するはずである。

## § 5 モデルの数値計算の結果と考察

計算に用いた無次元変数  $\xi$  の離散値の幅は  $\Delta\xi = 0.01$  で  $0 \leq \xi \leq 2$  の領域で (3-5) ~ (3-8) を反復法を用いて数値計算した。採用した定数の値は Case I では  $D=0.5, Ko=1.62, \alpha=1$  Case II では  $D=0.2, Ko=1.66, \alpha=0.3$  である。

まず最初に、エネルギー・スペクトルの計算結果を普遍関数  $F(x)$  の形で図1, 図2に示す。普遍関数に関しては Case I、Case II 共に低波数領域では比較的实验結果とよく一致している。高波数領域では極端に小さく違いがはきりしないので高波数を強調したパリンストロフィー・スペクトル  $k^4 E(k)$  を図3, 図4に示す。パリンストロフィー・スペクトルは EDQNM ではピークの大きさが特に大きいこと、Case I、Case II の両者とも高波数領域で急激な減少を示し、スペクトルの裾野の広がりが実験値より小さく、高波数では Case I も Case II も実験結果との不一致が大きくなる。

尖り度  $K_m$  の結果は図5, 図6に示す。Case I では全体としてかなり小さな値を示し、微分階数が大きくなると増大する割合も小さく、不十分な結果を示している。Case II では微分階数が小さいとき実験値よりも小さいが  $m$  に対する増大率は  $m=2\sim 3$  で大きく  $m>4$  で次第に小さくなり  $K_m$  は約 10 程度に落ちつく傾向を示している。Case II は、十分とは言えないが、ある程度実験<sup>5)</sup>の傾向を反映した結果を示している。

尖り度スペクトル  $K(k)$  と Katsuyama らの実験<sup>1)</sup> の結果を図7, 図8, 図9に示す。図9 の  $n=2$  が4次キュムラントによる間欠度スペクトルで、慣性領域ではフラットに近く近正規性を示している。一方、Case I、Case II の示す  $K(k)$  は共に慣性領域で近正規性を示していない。慣性領域でKolmogorov 則が成立するためには  $\gamma(0,k,k)\sim \varepsilon^{1/3}k^{2/3}$  でなければならないが、(4-9), (4-10) から  $k$  の小さい慣性領域では  $K(k)$  は3ではなく0に近づくためである。この関係はモデルの特殊性によるものではなく次元解析から一般的に導かれ、モデルによらず低波数領域の慣性領域においてKolmogorov 則と近正規性が相容れないことを示す。共に実験により見いだされているKolmogorov 則と近正規性の間のこのパラドックスは何に起因するのだろうか。

エネルギー・スペクトルの理論によるモデル計算と実験の不一致は高波数領域(粘性領域)において見いだされる。この不一致は2つのモデルによっても異なり、更に改良されたモデルにより実験との不一致をより少なくすることが可能であると考えられる。一方、尖り度に関しては、理論と実験の不一致は低波数領域(慣性領域)において起こり、その原因は前者のそれとは明らかに異なりモデルの改良によって修正できるものではない。慣性領域においてKolmogorov 則と近正規性が正しいものすると(4-9), (4-10) より(2-12)で  $\nu(k^2+p^2+q^2)$  を  $k, p, q \rightarrow 0$  のとき  $\eta(k, p, q) \rightarrow \gamma(k, p, q)$  となる  $\eta(k, p, q)$  で置き換えなければならない。これは乱流の基礎方程式であるNavier・Stokes方程式の粘性項を低波数では粘性項を卓越する渦粘性項で置き換えることを要求しているように見える。

## § 6 結び

乱流統計理論では応答関数を用いて一様・等方性乱流に対する方程式は(2-1)～(2-4)の形に表すことができる。別の形に表されている他の統計理論の方程式も原理的に同じ形式に表現し直すことができるはずである。この方程式を完結させるには作業仮説が必要になる。多くの乱流統計理論では数学的手法の困難などの制約により、直接実験測定可能ではないが理論的手法に有効な複数の仮説を採用している。それらの複合仮説が集約された形の応答関数は(2-9)により4次キュムラントと関係していることが示された。

本研究では、2つのモデルCase I、Case IIを扱いそのエネルギー・スペクトル及び尖り度を調べた。エネルギー・スペクトルに関しては慣性領域では良い結果が示され、高波数の粘性領域では十分でないがある程度の実験との一致を見た。一方、尖り度に関してはモデルの取り方によってその評価は異なるが、尖り度の構成成分である尖り度スペクトルは低波数の慣性領域において根本的に実験と一致しないことが示された。つまり、全体としては、ある程度評価できる結果に導く場合でも個々の成分のレベルでは不合理な結果を導くことが判明した。尖り度は応答関数に関係し、したがって、基本仮説に関係しているので、この不合理な結果はその仮説の誤りを示していることになる。理論の入り口に設けた基本仮説の誤りを、その仮説から論理的に導き出され出口に現れる結果の誤りから判断することは困難で、かつ危険なことを示唆しているように思われる。

<参考文献>

- (1) Katsuyama T. and et al , Phys. Fluids, 49(1994), 4052
- (2) Tatsumi , T., Pro. Roy. Soc. A239 (1957), 16
- (3) Kraichnan, R. H., J. Fluid Mech. 5(1959), 497
- (4) Orszag, S. A., J. Fluid Mech., 41(1970), 363
- (5) Batchlor, G. K. & Townsend, A. A., Pro. Roy. Soc. , A199 (1949), 238

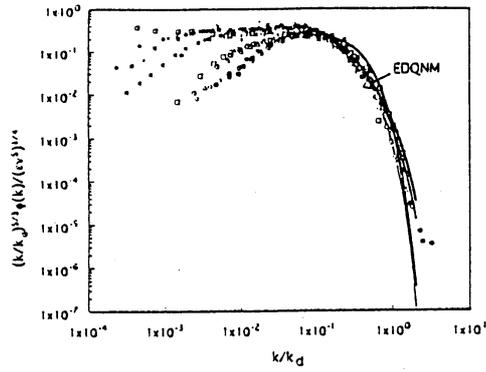


图 1

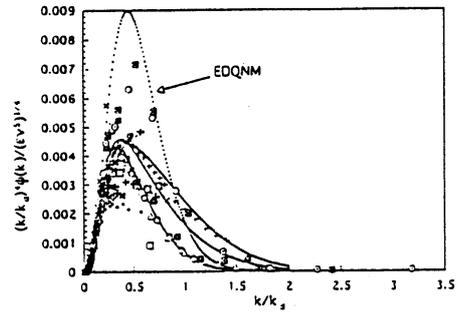


图 3

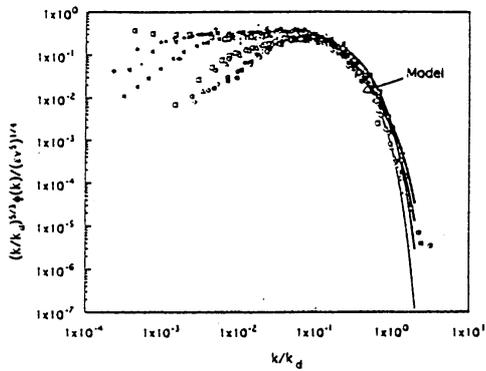


图 2

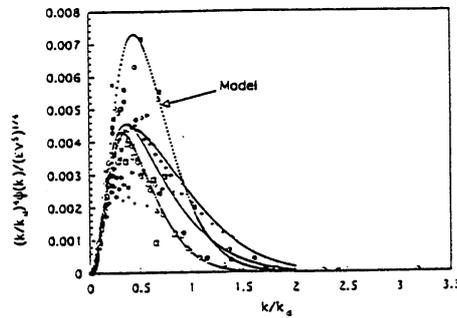


图 4

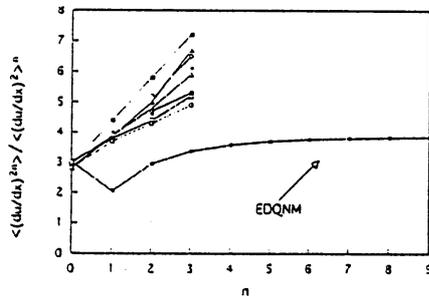


图 5

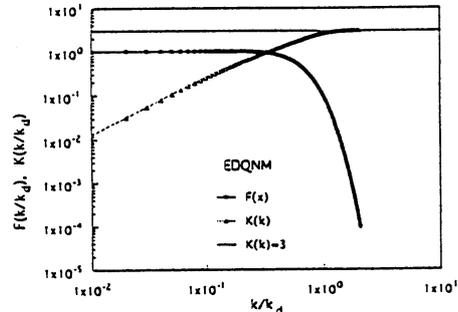


图 7

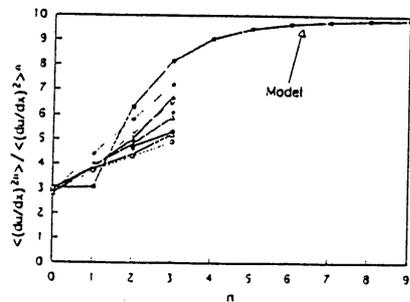


图 6

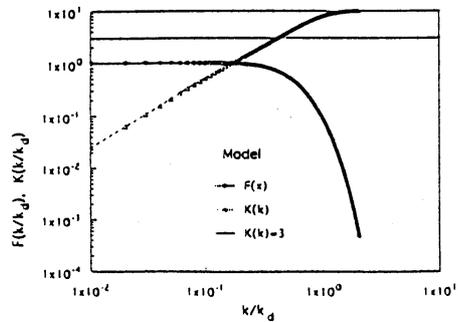


图 8

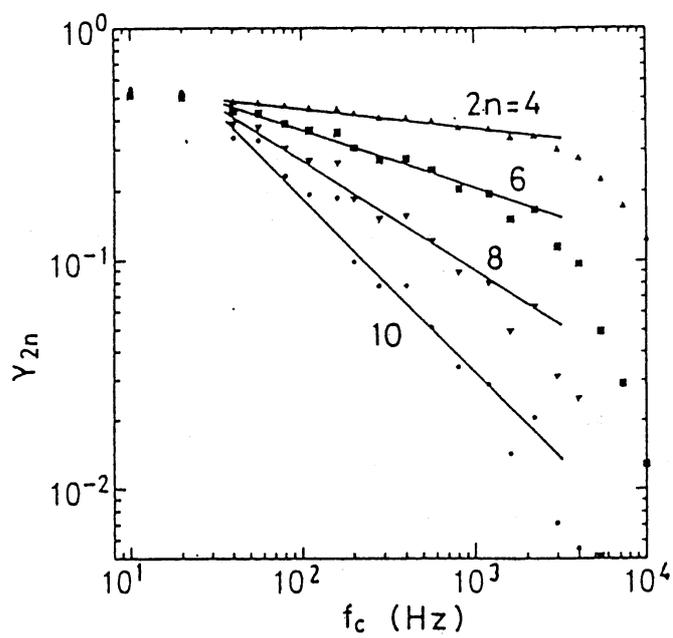


FIG. 7. Log-log plots of  $\gamma_{2n}$  vs  $f_c$ ;  $R_\lambda = 270$  jet flow at  $U_0 = 15$  m/s.

9