

一様ストレイン場中の渦層の Analytic Structure

富大理 石原 卓 (Takashi ISHIHARA)  
名大多元数理 金田行雄 (Yukio KANEDA)

1. はじめに

多くの流れの中で渦度はしばしば薄い層状の領域に集中する。それら層状領域の微細構造を理解するために、非圧縮、単位密度流体の一様ストレイン場中の速度場：

$$v(x, y, z, t) = (ax, by, cz) + u(x, y, t), \tag{1}$$

を考える。ここで、 $a, b, c$  は  $a + b + c = 0$  をみたす定数、 $u = (u, v, 0)$  を仮定する。このとき、渦度は  $\omega \equiv \text{rot} v = (0, 0, \omega(x, y, t))$  となり、Navier-Stokes 方程式 (NS) は、流れ関数  $\psi$  と渦度の  $z$ -成分  $\omega = -\Delta\psi$  を用いて、以下の形に表すことが出来る：

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + ax \frac{\partial}{\partial x} \omega + by \frac{\partial}{\partial y} \omega + \frac{\partial(\omega, \psi)}{\partial(x, y)} = c\omega + \nu \Delta \omega, \tag{2}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{3}$$

$a = b < 0$  又は  $a < 0, b = 0$  ( $a = 0, b < 0$ ) のときには、容易に方程式 (2) の厳密解を得ることが出来る (e.g. Saffman 1992)。 $a = b < 0$  のときの軸対称な解は Burgers vortex tube、一方  $a < 0, b = 0$  ( $a = 0, b < 0$ ) のときの  $\omega = \omega(x)$  ( $\omega = \omega(y)$ ) で表される解は Burgers vortex layer と呼ばれる。乱流をこれら Burgers 渦のランダムな集合体としてとらえるモデル (Townsend 1951, Corrsin 1962, Tennekes 1968, Saffman 1968) は、 $k/k_d \gg 1$  で与えられる far dissipation range (ここでは遠散逸領域と訳す) におけるエネルギースペクトル

$$E(k) \propto \exp(-\beta k^2), \tag{4}$$

を与える。ここで  $\beta$  はある定数、 $k_d$  は Kolmogorov の波数である。Lundgren (1982) の提案した乱流モデルは Kolmogorov の慣性小領域スペクトルを与えるが、遠散逸領域においては (4) と同様なスペクトルを与える。彼のモデルで使われている NS の近似解は局所的に Burgers vortex layer と同じ構造を持つことが Pullin & Saffman (1992) により示されている。

一様ストレイン場と速度場  $u$  を各々大きい渦と小さい渦の局所的な表現であるとみなせば、方程式 (2) において  $a, b$  又は  $c$  を含む項は大きい渦と小さい渦の相互作用、一

方、非線形項  $J \equiv \partial(\omega, \psi)/\partial(x, y)$  は小さい渦どうしの非線形相互作用を表すことになる。小さい渦どうしの非線形相互作用を無視する場合、上の2次元モデル(2)を流れの3次元性を考慮したモデルに一般化することは容易であり、 $J$ 項を無視した乱流の3次元 Random shear モデル (Monin & Yaglom 1975) は(4)と同様なスペクトルを与える。

一方、最近の直接数値計算 (Kerr 1990, Chen *et al.* 1993, etc.) では、遠散逸領域におけるエネルギースペクトルが波数  $k$  に対し  $\exp(-\alpha k)$ ; ( $\alpha = \text{定数}$ ) のように減衰することが示されている。この様な遠散逸領域におけるスペクトルの指数的減衰は、いくつかの乱流の two-point closure 近似によっても導かれている (Kraichnan 1959, Tatsumi 1980, Kaneda 1993)。これらの理論は、遠散逸領域のエネルギースペクトルを支配するダイナミクスにおいて小さい渦どうしの相互作用 (波数空間における局所的相互作用) が大きさが非常に異なる渦の間の相互作用 (波数空間における非局所的相互作用) より重要であることを示唆する。

2つのスペクトル、すなわち(4)と  $\exp(-\alpha k)$  の違いは、上記の  $J$ 項を無視した乱流モデルが流れ場の微細構造を支配する渦のダイナミクスの重要な側面を見落としている可能性を示唆している。実際の乱流において、小さい渦間の非線形相互作用が一般的にゼロでなく、その非線形性が流れ場の微細構造を支配する重要な鍵を握っていると考えることが出来る。非線形という点に関連して、Robinson & Saffman (1984) が  $\epsilon \equiv (a-b)/(a+b) \ll 1$ ,  $\text{Re} \equiv \int \int \omega dx dy / (2\pi\nu) \ll 1$  の場合に(2)の解を摂動展開したことは注目し得る。彼らの解は、Burgers vortex tube を軸対称でない場合 (非線形) に拡張したものになっている。しかしながら、その解の摂動展開の各項は(4)と同様なスペクトルを与え、また、その摂動展開から流れ場の微細構造の厳密な解析的性質を導くことは困難である。

これらの考察の下、本研究の主要な目的は  $J \neq 0$  の場合に(2)の厳密解を求め、その厳密解を基に流れ場の微細構造を研究することである。ここでは(2)の厳密解として  $y$  軸方向に薄い渦層を考える。§2では、解を特別な形に仮定して(2)を一変数の非線形常微分方程式 (ODE) に帰着させる。§3では、そのODEの解を数値的に求め、それを基に流れ場の Fourier spectrum を数値的に評価する。そこで得られる結果は、流れ場の Fourier spectrum の高波数における指数関数的減衰を示すものである。§4では、§2で得られたODEの厳密解の解析的構造 (すなわち、複素  $y$  平面における特異点の分布) を調べ、流れ場の微細構造 (Fourier spectrum の高波数における振る舞い) との関連を調べる。そこでは、Fourier spectrum の高波数における指数的減衰の減衰係数が実軸に一番近い特異点の実軸からの距離とよく一致することが示される。§5で結論と議論を行う。

## 2. 渦層を表す非線形常微分方程式の導出

式(1)によって表される薄い渦層を考える。 $z$ -軸と平行な渦線の粘性による拡散、 $xz$ -平面向かう渦線の対流( $b < 0$ )、及び $z$ -軸方向の渦線の伸び( $c > 0$ )のバランスの下、渦線が $xz$ -平面と平行な層状領域に集中していると仮定する。

無次元量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}, \hat{\psi}, \hat{\omega}$ を

$$x = (\nu/|b|)^{1/2}\hat{x}, \quad y = (\nu/|b|)^{1/2}\hat{y}, \quad t = (1/|b|)\hat{t},$$

$$\psi(x, y, t) = \nu\hat{\psi}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}), \quad \omega(x, y, t) = |b|\hat{\omega}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}),$$

により導入すると、(2)は無次元形で

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}}\hat{\omega} + (1 - \hat{c})\hat{x}\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\hat{\omega} - \hat{y}\frac{\partial}{\partial \hat{y}}\hat{\omega} + \frac{\partial(\hat{\omega}, \hat{\psi})}{\partial(\hat{x}, \hat{y})} = \hat{c}\hat{\omega} + \hat{\Delta}\hat{\omega}, \quad (5)$$

と表せる。ここで、 $\hat{\Delta} = (\partial/\partial\hat{x})^2 + (\partial/\partial\hat{y})^2$ であり、 $b < 0$ と $\hat{a} + \hat{c} = a/|b| + c/|b| = -b/|b| = 1$ を用いた。(以下では表記の簡単化のためハット記号を省略する。)

次に $x$ -軸方向の特徴的長さが $y$ -軸方向のそれより十分大きいと仮定し、流れ関数 $\psi$ を $x$ のべきで展開する；

$$\psi(x, y, t) = g(y, t) + xf(y, t) + \dots \quad (6)$$

このとき、渦度 $\omega = -\Delta\psi$ は、

$$\omega(x, y, t) = -g''(y, t) + xf''(y, t) + \dots \quad (7)$$

となる。ここでプライム記号は $y$ についての微分を表す。

$g, f$ 等に対する境界条件は、渦層の外部での流れを考慮して決める。ここでは、流れが渦層の外部で $(ax, by, cz)$ に漸近的に近づいていく、すなわち、 $|y| \rightarrow \infty$ において

$$g'(y, t) \rightarrow O(|y|^0), \quad (8)$$

$$f(y, t) \rightarrow O(|y|^0), \quad f'(y, t) \rightarrow O(|y|^{-1}) \quad (9)$$

であることを要求する。これらは各々、 $|x|$ を有限としたとき、 $|y| \rightarrow \infty$ で

$$u = (\partial\psi/\partial y) = g' + xf' \rightarrow O(|y|^0),$$

$$v = -(\partial\psi/\partial x) = -f \rightarrow O(|y|^0)$$

を意味する。

上記境界条件を満たす(5)の厳密解のクラスは、(6)の $g$ 項と $f$ 項のみを残すことにより得ることが出来る。実際、 $g$ と $f$ が各々

$$\frac{\partial}{\partial t}(-g'') + yg''' + cg'' + g^{(iv)} = f''g' - g'''f, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(-f'') + (1 - 2c + f')(-f'') - (y + f)(-f''') + f^{(iv)} = 0 \quad (11)$$

を満たすとき、 $\psi = g + xf$ は(5)を満足する。

$f \equiv 0$ は(11)の一つの解であるが、このとき定常性を仮定すると(10)は線形常微分方程式

$$yg'' + (c - 1)g' + g''' = 0, \quad (12)$$

に帰着する。(12)の解は一般に合流型超幾何関数を用いて表すことができる。特に、 $c = 1$ の場合には、Burgers vortex layer:  $\omega \equiv -g'' = \omega_0 \exp(-\frac{1}{2}y^2)$ を得る。ここで $\omega_0$ は任意定数である。また、一般の $c$ の値に対して、

$$\omega(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\omega}(k)e^{iky} dy.$$

により定義されるスペクトルが高波数 $k$ に対し

$$\hat{\omega}(k) \propto |k|^{c-1} e^{-k^2/2}$$

のように減衰することを示すことが出来る。それゆえ、線形方程式(12)の解はエネルギースペクトルの高波数における指数的減衰を説明することが出来ない。

非線形相互作用を表す厳密解のクラスは、(6)で $f$ 項を残すことにより得ることが出来る。 $F(y, t) = -y - f(y, t)$ と置くと(11)と(9)は、各々、

$$\frac{\partial}{\partial t} F'' - 2cF'' - F^{iv} - F'F'' + FF''' = 0, \quad (13)$$

$$F'(y, t) \rightarrow -1, \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (14)$$

となる。(13)を $y$ について一度積分すると

$$\frac{\partial}{\partial t} F' - 2cF' - F''' - (F')^2 + FF'' = 2c - 1, \quad (15)$$

を得る。ここで積分定数は $y \rightarrow \pm\infty$ における境界条件から決定した。定常な厳密解 $F(y)$ は、

$$-2cF' - F''' - (F')^2 + FF'' = 2c - 1, \quad (16)$$

と(14)より得ることが出来る。

### 3. 定常解とその Fourier Spectrum

式(16)において $F_1(y) = F'(y)$ ,  $F_2(y) = F''(y)$ とすると、一階の常微分方程式系:

$$\begin{aligned} F' &= F_1, \\ F_1' &= F_2, \\ F_2' &= -2cF_1 + FF_2 - F_1^2 + 1 - 2c. \end{aligned} \quad (17)$$

表 1:  $F'(0)$  の値

c	$F'(0)$	c	$F'(0)$	c	$F'(0)$
0.2	0.77702735482	1.2	-0.5772531	2.2	-1.995780
0.4	0.521390881	1.4	-0.8587335	2.4	-2.281927
0.6	0.253534375	1.6	-1.141565	2.6	-2.56862
0.8	-0.02022247	1.8	-1.425472	2.8	-2.85578
1.0	-0.2975326	2.0	-1.710259	3.0	-3.14345

を得る。ここでプライムは  $y$  についての微分を表す。与えられた初期条件  $F(0)$ ,  $F_1(0)$ ,  $F_2(0)$  に対し (17) を数値的に解き、十分大きい  $|y|$  に対し  $F(y)$  の値を評価することは容易である。そこで、境界条件 (14) を満たす (17) の解を得るために shooting method を用いる。その際、 $F(0)$ ,  $F_1(0)$  及び  $F_2(0)$  の値を調整して (14) を満たすようにする。ここでは簡単のため、 $F$  が  $y$  について奇関数であると仮定するので  $F(0) = F_2(0) = 0$  となり、決めるべき値は  $F_1(0)$  のみである。微分方程式系 (17) の数値積分には 4 次のルンゲクッタ法を用い、刻みは  $\Delta y = 0.001$  とした。また、基準  $|F'(10.0) - (-1)| < \epsilon \ll 1$  が成立するとき、境界条件 (14) は満たされていると判断した。表 1 は  $\epsilon = 10^{-7}$  のときの各  $c$  の値に対する  $F_1(0) = F'(0)$  の値である。

数値計算の経験からは、(i) 上記基準を満たす  $F'(0)$  の値と  $c$  はほぼ線形関係にあること、(ii)  $F'(0)$  の値が表の値に近いとき、 $F'(10.0)$  の値と  $F'(0)$  の値もほぼ線形関係にあることが分かった。それゆえ、各  $c$  の値に対し、 $\epsilon$  の値を小さく設定しても  $F'(0)$  の値は組織的に求めることが可能である。例えば、 $c = 3.0$  に対し、 $\epsilon = 10^{-12}$  は  $F'(0) = -3.14334488093$  で、 $\epsilon = 10^{-17}$  は  $F'(0) = -3.14334488092582425$  で満たされる。ただし、これらの計算は各々  $\Delta y = 0.0001, 0.00001$  とし、四倍精度で行った。 $F'(0)$  を正確に決めることにより、 $F'(y)$  がより早く  $-1$  に収束することが分かる。

図 1 と図 2 は各々  $F'(y)$  と  $F''(y)$  の各  $c$  の値に対する関数形である。 $u/x = -(1+F')$ 、 $\omega/x = F''$  であるので、図 1 と 2 から、各々、速度場と渦度場のプロファイルを知ることができる。 $F(y)$  が  $y$  について奇関数であること及び  $\omega/x = F''$  であることを考えると、この節で得られた渦度場  $\omega(x, y)$  は  $x, y$  各々について反対称であることが分かる。

図 3 は表 1 の結果を図示したもので、横軸が  $c$ 、縦軸が  $F'(0)$  である。 $F'(y) = -1$  は  $c$  の値に関わらず (16) の解であるので、図には  $F'(0) = -1$  も図示した。図 3 の 2 つの線は  $c \approx 1.5$  で交差していることが観察できる。解の安定性についての知見を得るために、(16) の解 (この節で求めた定常解  $F'(y)^{[\text{steady}]}$  と  $F'(y) = -1$ ) への摂動

$$F'(y) = F'(y)^{[\text{steady}]} + \delta \exp(-y^2),$$

$$F'(y) = -1 + \delta \exp(-y^2)$$

の時間発展をいくつかの $\delta$ の値に対して、(15)を数値的に解くことにより調べた。その結果は、(i) 解  $F'(y) = -1$  は  $c < 1.5$  で安定、 $c > 1.5$  で不安定、(ii) 解  $F'(y)^{[\text{steady}]}$  は  $c < 1.5$  で不安定、 $c > 1.5$  で安定であることを示唆するものであった（詳細は省略）。(16)の解は  $F'(0)$ の値で特徴付けられるため、図3は解の分岐ダイアグラムを与えていると解釈することができる。式(15)に基づく安定性についての結果を考慮し、以下では  $c > 1.5$ における定常厳密解  $F'(y)^{[\text{steady}]}$ を基に微細構造を調べる。

### Fourier spectrum

速度  $u(x, y) = -(1 + F'(y))x$  は、 $x$ -軸方向に相似形であるので、ここでは単に  $u(y) = -(1 + F'(y))$  とし、 $u(y)$  の Fourier 変換

$$\hat{u}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(y) \exp(-iky) dy \quad (18)$$

を考える。

$$\hat{u}(k) = \int_{-Y}^Y u(y) \exp(-iky) dy + \text{Err}(Y, k) \quad (19)$$

と表し、 $\hat{u}(k)$  を右辺の区間  $(-Y, Y)$  における積分で近似する場合、近似の良し悪しは  $\text{Err}(Y, k)$  の大小によって決まる。部分積分により、 $\text{Err}(Y, k)$  は  $k \gg 1$  において  $|u'(Y)|/k^2$  程度と評価できる。これにより、上記近似が有効である ( $\hat{u}(k) \gg \text{Err}(k, Y)$  となる  $k$  の十分な範囲を得る) ためには、 $|u'(Y)|$  が十分に小さい必要があることが分かる。前述の通り、今問題としている厳密解に関しては  $F'(0)$  を詳細に決めることで  $|u'(Y)|$  を計算精度の範囲内でいくらでも小さくすることができる。 $\bar{u}(y) = u(y) (-Y \leq y < Y)$ ,  $= 0 (y < -Y, y \geq Y)$  を定義すると、 $2Y$ -周期関数の Fourier 展開を考えることができる：

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{u}(y + 2jY) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p \exp(i\pi p y / Y).$$

ここで、Fourier 係数

$$c_p = \frac{1}{2Y} \int_{-Y}^Y u(y) \exp(-\frac{i\pi p y}{Y}) dy \quad (20)$$

は FFT を用いて計算することができる。(19) と (20) の比較により、 $2Y c_p$  が  $\hat{u}(\pi p / Y)$  の近似を与えることが分かる。

図4は、上記で  $Y = 20.0$  として得られた  $|\hat{u}(k)|$  の自然対数を横軸  $k$  で図示したものである。曲線は下から上に  $c$  の値  $c = 2.0, 2.2, \dots, 3.0$  に対応する。 $c$  の値によらず、各スペクトルが  $k$  に対して指数関数的に減衰している様子が観察できる。そこで、スペク

トルを  $|\hat{u}(k)| = \beta k^\gamma \exp(-\alpha k)$  の形に仮定して、 $\alpha$  と  $\gamma$  の評価を行った。評価は3つの離散データ  $\hat{u}(k)$ ,  $\{k = \pi(p-1)/Y, \pi p/Y, \pi(p+1)/Y\}$  から得られる連立方程式を数値的に解くことにより行った。図5は  $-\alpha$  vs.  $k$  の図である。各曲線は下から上へ  $c$  の値  $c = 2.0, 2.2, \dots, 3.0$  に対応する。 $-\alpha$  の値が  $k$  が大きくなるにつれ、 $c$  の値に依存したある一定値に漸近していく様子が観察できる。図6は  $\gamma$  vs.  $k$  の図である。 $\gamma$  の値が  $k$  が大きくなるにつれ、 $c$  依存性が小さくなり、一定値に漸近していく様子が観察できる。

#### 4. 厳密解の Analytic structure と Fourier spectrum

前節で得られた厳密解の解析的構造を調べるために、ここではまず厳密解の原点  $y = 0$  における Taylor 展開

$$F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \quad (21)$$

を考える。(21) を (16) に代入すると Taylor 係数  $a_n$  の間の帰納的關係式 (省略) を得る。与えられた  $a_0, a_1, a_2$  に対し、 $a_n$  ( $n \geq 3$ ) はその關係式から一意的に決定することができる。(21) と境界条件 (14) 及び  $F(-y) = -F(y)$  とのつじつまを合わせるために、 $a_0 = a_2 = 0, a_1 = F'(0)$  とし、 $F'(0)$  の値は表1のものを使う。こうして得られる  $a_n$ , ( $n \geq 0$ ) を用いて構成した  $(d/dy) \sum_{n=0}^N a_n y^n$ , ( $N = 50, 75, 100$ ) と §3 で得られた  $F'(y)$  を  $c = 2.0$  の場合に比較したものが図7である。両者は方法の違いに関わらず  $|y| < A^{(N)}$  において非常に良い一致を見せている。ここで  $A^{(N)}$  は、Taylor 展開を第  $N$  項で打ち切ったものから得られる  $F'(y)$  が急な増大又は減少を示す  $y$  の値である。図は  $A^{(N)}$  が  $N \rightarrow \infty$  で一定値  $A(\infty)$  に収束する様子、すなわち (21) の収束半径が有限であることが示唆する。そこで、各  $c (> 1.5)$  の値に対し Taylor 係数  $a_n$  の  $n$ -依存性を調べてみる。図8は、 $\ln|a_{2j-1}|$  vs.  $j$  のグラフで、下から上に  $c = 2.0, 2.2, \dots, 3.0$  に対応する。整数  $j \gg 1$  に対し  $a_{2j-1} \sim B(-1)^j e^{-aj}$  の様に振る舞うことが分かる。 $F$  が奇関数であることを反映して  $a_{2j}$  は全て0である。 $a_{2j-1}$  の振る舞いは Taylor 展開の収束半径が  $e^{a/2}$  であり、複素  $y$  平面の虚数軸上  $y = \pm ai$  ( $\alpha = e^{a/2}$ ) に一位の極があることを示唆している。表2は、 $\ln|a_{2j-1}|$  vs.  $j$  のグラフで最小二乗法による Fitting を行い  $a$  と  $|B|/2$  を見積もった結果である。具体的な値に対する議論を行う前に、一位の極の存在が特異点解析と矛盾しないことを示す。

(16) の解が特異点  $y_0$  の近傍で局所的に  $F(y) = A(y - y_0)^\lambda$  とかけると仮定する。ここで  $y_0$  及び  $A$  は (16) と (14) から決定される未知定数である。 $F(y) = A(y - y_0)^\lambda$  を (16) に代入すると、 $y = y_0$  の近傍で主要な項は、非線形項  $-(F')^2 + FF'$  と粘性項  $-F'''$  で、それらは  $\lambda = -1, A = -6$  のときバランスする。方程式 (16) のみを基にした解析では  $y_0$  は未定のままであるが、現れるべき特異点が位数1の極であるという事実は、上記 Taylor 係数の数値解析結果と一致する。また  $A = -6$  であるという事実は、表2

表 2:  $\alpha$  と  $|B|/2$  の値

c	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$\alpha$	2.74	2.53	2.37	2.24	2.13	2.03
$ B /2$	6.23	6.14	6.07	6.02	5.98	5.95

の  $|B|/2 \approx 6.0$  と良い一致をみせることから、 $F(y)$  の原点近傍の振る舞いは、虚数軸上の特異点  $-6/(y \pm \alpha i)$  により、よく特徴付けされている様子が分かる。

関数の Fourier 変換、例えば (18)、を考えると、その波数  $k \rightarrow \infty$  での漸近的な振る舞いは、その関数の実軸に一番近い特異点によって支配される。この事実と上の結果を考慮して、 $F$  を

$$F(y) = -6 \left( \frac{1}{y - \alpha i} + \frac{1}{y + \alpha i} \right) + \phi(y) \quad (22)$$

の様に書き表す。ここで、 $\phi(y)$  は  $\pm \alpha i$  以外の非主要な特異点からの寄与と考えることができ、 $|y| \rightarrow \infty$  のとき  $\phi(y) \rightarrow -y$  である。(22) より、 $u$  に対する近似として、

$$u(y) = -(1 + F(y)) \approx -6 \left( \frac{1}{(y - \alpha i)^2} + \frac{1}{(y + \alpha i)^2} \right) \quad (23)$$

を得る。これより  $\hat{u}(k)$  の  $k \rightarrow \infty$  の振る舞いを評価すると、

$$\hat{u}(k) \sim -6\pi k \exp(-\alpha k) \quad (24)$$

を得る。

§3 では、 $\hat{u}(k)$  の形として  $\beta k^\gamma \exp(-\alpha k)$  を仮定した。(24) は  $k \rightarrow \infty$  において、(i)  $c$  によらず  $\gamma \rightarrow 1$  であること、及び (ii)  $\alpha$  は虚数軸上の特異点の実軸からの距離として与えられることを示している。図 5 には、Taylor 係数の数値解析により得た  $\alpha$  の値を破線で表した。図 5 からは、§3 における Fourier spectrum の数値的評価と (24) の評価が、特に  $k$  の大きいところで良い一致を見せることが確認できる。また、図 6 では  $\gamma$  の値が  $k$  の大きいところで、 $c$  によらずある一定値 ( $\approx 1$ ) に漸近していく様子が観察できたが、その事実も (24) と矛盾していない。

## 5. 結論と議論

本研究では、一様ストレイン場中の渦層を表す NS の厳密解を得、それを基に速度場の微細構造を調べた。そこではまず、NS の解をある形に仮定し NS を一変数非線形



常微分方程式に帰着させた。次に無限遠での境界条件を満たす、非線形常微分方程式の解を近似的に求め、それを基に速度場の Fourier spectrum を数値的に評価した。また、厳密解の原点における Taylor 展開を考え、厳密解の解析的構造を調べ、それを基に速度場の Fourier spectrum の波数  $k \rightarrow \infty$  における漸近的な振る舞いを評価した。後者は、速度場の Fourier spectrum が波数  $k$  が大きいところで、 $k$  に対し、 $k \exp(-\alpha k)$  のように減衰することを示唆し、前者はこれと矛盾しないものであることが分かった。

また、厳密解の解析的構造として、複素平面における虚数軸上の、実軸対称な2つの特異点が重要な意味をもち、上記スペクトルの指数的減衰の割合  $\alpha$  はこれら特異点の実軸からの距離とよく一致することが分かった。上記特異点（極）の位数は方程式の非線形項と粘性項のバランスから決定されることから、本研究で求めた厳密解においては非線形性が重要な役割を演じていることが分かる。

一変数線形常微分方程式に帰着する Burgers 渦を基にした場合、スペクトルはガウス形になる。本研究で得られた速度場のスペクトルの指数的減衰は、DNS 及び乱流の two-point closure 理論から得られる遠散逸領域におけるスペクトルと定性的に一致することから、遠散逸領域（非常に細かいスケール）においても非線形性は重要な役割を演じていることが分かる。

## 参考文献

- [1] CHEN, S., DOOLEN, G., HERRING, J. R., KRAICHNAN, R.H., ORSZAG, S. A. SHE, Z. S. *Far-dissipation range of turbulence. Phys. Rev. Lett.* **70**, 3051.
- [2] CORRSIN, S. 1962 Turbulent dissipation fluctuations. *Phys. Fluids* **5**, 1301.
- [3] KANEDA, Y. 1993 Lagrangian and Eulerian time correlations in turbulence. *Phys. Fluids A* **5**, 2835.
- [4] KERR, R. M. 1990 Velocity, scalar and transfer spectra in numerical turbulence. *J. Fluid Mech.* **211**, 309.
- [5] KRAICHNAN, R. H. 1990 The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds number. *J. Fluid Mech.* **211**, 309.
- [6] LUNDGREN, T. S. 1982 Strained spiral vortex model for turbulent fine structure. *Phys. Fluids* **25**, 2193.
- [7] PULLIN, D. I. & SAFFMAN, P. G. 1993 On the Lundgren-Townsend model of turbulent fine scales. *Phys. Fluids A* **5**, 126.

- [8] SAFFMAN, P. G. 1992 *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press.
- [9] SAFFMAN, P. G. 1968 Lectures on homogeneous turbulence. In *Topics in Nonlinear Physics*. (ed. N. J. Zabusky), Springer-Verlag, Berlin, 1968)
- [10] TATSUMI, T. 1980 Theory of homogeneous turbulence. *Adv. Appl. Mech* **20**, 39.
- [11] TENNEKES, H. 1968 Simple model for the small-scale structure of turbulence. *Phys. Fluids* **11**, 669.
- [12] TOWNSEND, A. A. 1951 On the fine-scale structure of turbulence. *Proc. R. Soc. Lond. A* **208**, 534.

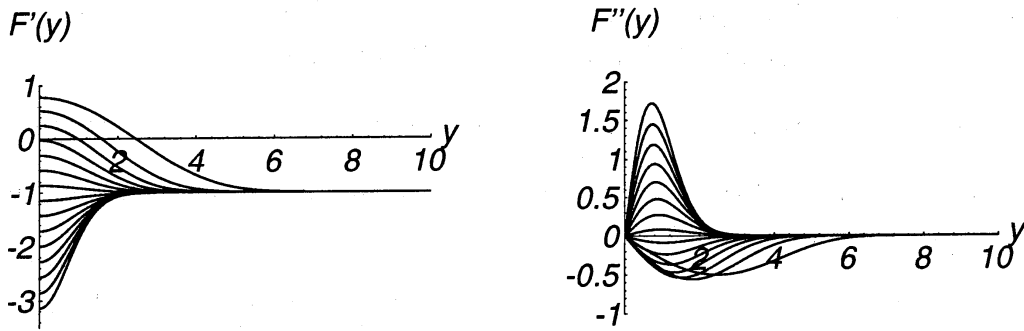


図 1: (左) 方程式 (17) の解  $F'(y) = F_1(y)$  の図。初期値は表 1 の値を用いた。曲線は上から  $c = 0.2, 0.4, \dots, 3.0$  に対応する。図 2: (右) 同じく  $F''(y) = F_2(y)$  の図示。曲線は上から  $c = 3.0, 2.8, \dots, 0.2$  に対応する。

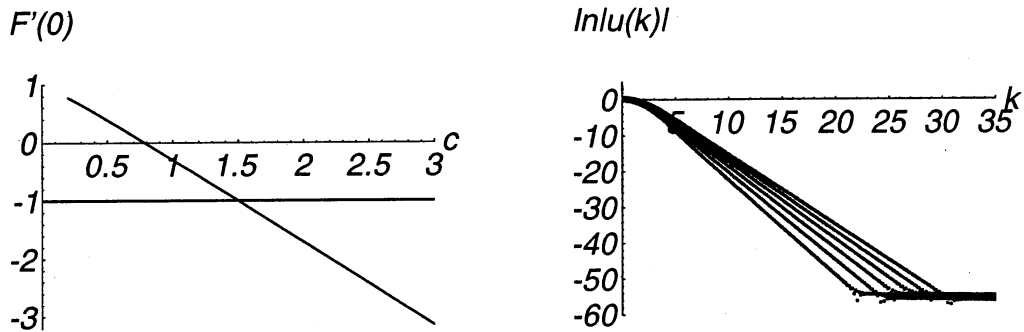


図 3: (左) 表 1 の値  $F'(0)$  vs  $c$  の図示。図 4: (右)  $\ln|\hat{u}(k)|$  vs  $k$  の図。各曲線は下から  $c = 2.0, 2.2, \dots, 3.0$  に対応する。

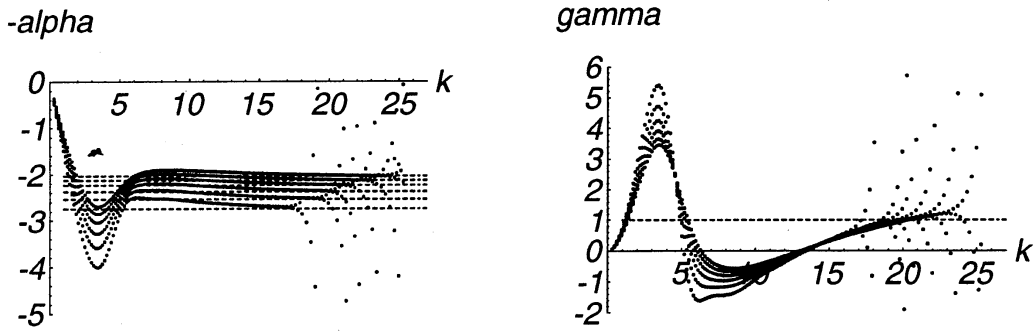


図 5: (左)  $|\hat{u}(k)| = \beta k^\gamma \exp(-\alpha k)$  を仮定した時の  $-\alpha(k)$  の値。破線は (24) 及び表 2 を基にしたもの。各曲線及び直線 (破線) は下から  $c = 2.0, 2.2, \dots, 3.0$  に対応する。図 6: (右) 同じく  $\gamma(k)$  の値。曲線群は  $\gamma(7)$  の値が小さいものから順に  $c = 2.0, 2.2, \dots, 3.0$  に対応する。破線は (24) を基にしたもの。

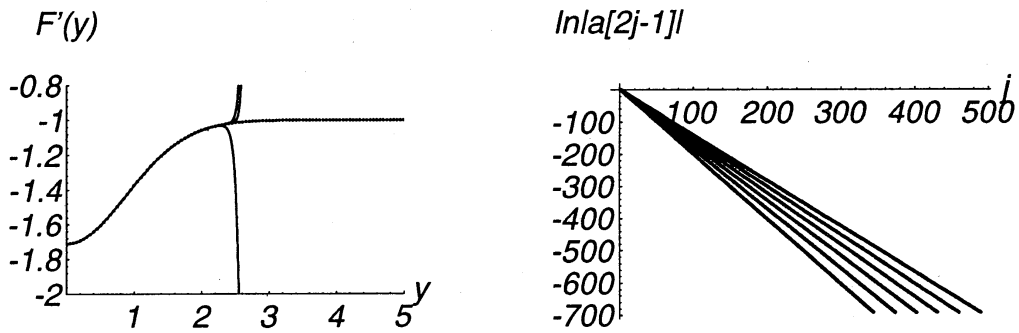


図 7: (左)  $c = 2.0$  のときの数値解  $F'(y)$  の比較。点線は shooting method、実線は Taylor 展開を打ち切ったもの；発散が  $y$  の小さいところで起きるものから順に  $N = 50, 75, 100$  に対応する。図 8: (右)  $\ln|a_{2j-1}|$  vs  $j$  の図。傾きが急なものから順に  $c = 2.0, 2.2, \dots, 3.0$  に対応する。