

## 数値シミュレーションによる渦音の評価

(株) 流体研 安達 静子 (Shizuko Adachi)  
名大工 石井 克哉 (Katsuya Ishii)  
名大工 丸 裕之 (Hiroyuki Maru)

### 1 はじめに

ジェット騒音などの空力音は渦運動により発生することが過去の研究でわかっている<sup>1)-3)</sup>。特に、簡単な形の渦度場から発生する空力音の例として、二つの渦輪の相互作用や渦輪と円柱や半平板との相互作用による空力音が神部らによって実験的、理論的に研究されてきた<sup>4)-7)</sup>。これらの渦度場の中で、二つの渦輪の相互作用は、物体境界の影響を考慮しないで、渦管の伸縮、渦線の切りつなぎ、渦核の大きな変形などの現象を扱えるため、渦運動と遠方音とのさまざまな基本的な関係を考察することができる。理論的には、多重極展開で公式化される渦音の理論により、二つの渦輪の衝突を解析することができる<sup>8)</sup>。現在まで、渦輪の衝突音では二つの典型的なケースについての実験的、理論的、数値的な研究の報告がある。一つは、正面衝突 (fig.1 で衝突角度 $\theta$ が $0^\circ$ の場合) であり、もう一つは、直角衝突 ( $\theta$ が $45^\circ$ の場合) である。

正面衝突では、衝突による渦線の伸長と粘性の影響による渦線の消滅が起こる。しかし、直角衝突では、渦線の伸長や消滅だけではなく、切断と再結合が起こる。このことから、この二つのケースにおける渦輪の衝突のダイナミクスの違いが音圧の各モードの係数の時間依存性の相違の原因になっているのではないかと考えられる。しかし、渦線の伸長や消滅の現象が衝突角度にどのように依存しているのか、また、渦のダイナミクスが渦音の放射にどのような影響を与えているのかは明確ではない。ここでは、正面衝突と直角衝突の間の 16 の異なる衝突角の二つの渦輪の衝突音を調べ、渦運動と渦音の関係を議論する。

### 2 渦音の一般公式

渦音の理論によると、原点付近のコンパクトな渦度場から放射される音波は、十分遠方で以下のような形で表わされる。

$$\begin{aligned} p(r_{obs}, \theta, \phi) = & A_0(t) + A_1(t)P_2^0(\cos(\theta)) + A_2(t)P_2^2(\cos(\theta)) \cos(2\phi) \\ & + B_1(t)P_3^0(\cos(\theta)) + B_2(t)P_3^2(\cos(\theta)) \cos(2\phi) \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $r_{obs}$  は原点と観測点の距離  $P_n^k$  は  $n$  次 ( $k = 1, \dots, n$ ) のルジャンドルの陪関数である。ここで、第一項は単極、第二項と第三項は四重極、第四項と第五項は八重極の指向性をもった渦

音を表している。各項の係数  $A_0, A_1, A_2, B_1, B_2$  は、渦度のモーメントの時間変化に関係し、次のように表わされる。

$$A_0 = -(\rho_0/r_{obs})P_0^{(1)}(t) \quad (2)$$

$$A_1 = -\rho_0/(c^2 r_{obs})Q_{33}^{(3)}(t) \quad (3)$$

$$A_2 = -\rho_0/(6c^2 r_{obs})[Q_{11}^{(3)}(t) - Q_{22}^{(3)}(t)] \quad (4)$$

$$B_1 = \rho_0/(c^3 r_{obs})[Q_{333}^{(4)}(t) - (1/5)Q_{3kk}^{(4)}(t)] \quad (5)$$

$$B_2 = \rho_0/(c^3 r_{obs})(1/30)[\tilde{Q}_{113}^{(4)}(t) - (1/5)\tilde{Q}_{223}^{(4)}(t)] \quad (6)$$

ここで  $\rho_0$  は密度、 $c$  は音速、 $\tilde{Q}_{113} = Q_{113} + Q_{131} + Q_{311}$  であり、 $P, Q$  の肩の数字は時間微分を表わす。ここで、 $P$  は流体の運動エネルギーに比例した量、 $Q_{ij}, Q_{ijk}$  は渦度の 2 次、3 次モーメントであり、次のように表わされる：

$$P_0 = -\frac{5-3\gamma}{24\pi c^2} \int v^2 d^3y, \quad (7)$$

$$Q_{ij} = -\frac{1}{12\pi} \int (\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega})_i y_j d^3y, \quad (8)$$

$$Q_{ijk} = \frac{1}{32\pi} \int (\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega})_i y_j y_k d^3y. \quad (9)$$

遠方での二重極音の係数は渦度の 1 次のモーメントの時間変化に関係するが、境界のない境域での渦度の 1 次モーメントは時間的に変化しないため、渦音の二重極成分は 0 となっている。

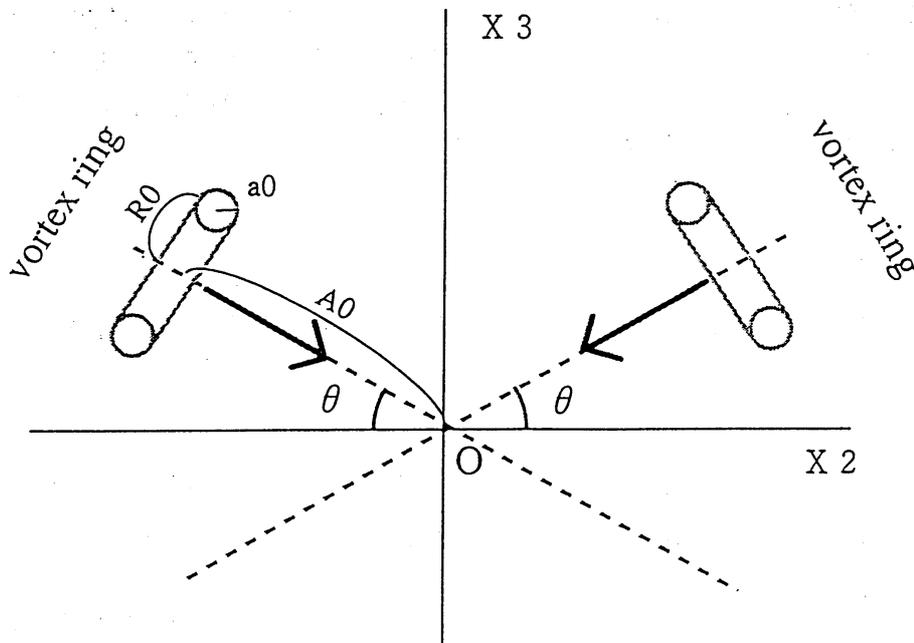


fig1 : The tranjections of the vortex cores in the  $(x_2, x_3)$  plane.

### 3 数値シミュレーション

音圧の各モードの係数を求めるために渦度 $\omega$ の時間発展を計算する必要がある。ここでは渦度-ポテンシャル法を用いた<sup>9)</sup>。

支配方程式は、速度 $v$ 、渦度 $\omega = \nabla \times v$ について

$$\partial_t \omega - \nabla \times (v \times \omega) = \nu \nabla^2 \omega \quad (10)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (11)$$

である。次の速度のベクトルポテンシャル $A$ を導入する:

$$v = \nabla \times A \quad (12)$$

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (13)$$

このとき $A$ はポアソン方程式を

$$\nabla^2 A = -\omega \quad (14)$$

を満足する。

この計算では空間微分は2次の中心差分、時間微分は4次精度のRunge-Kutta-Gill法を用いた。また、初期条件と計算条件はtable 1のように設定して計算をおこなった。本研究では、fig.1のように初期のコア半径 $a_0$ と渦輪の半径 $R_0$ は一定にし衝突角度 $\theta$ を $0^\circ$ から $45^\circ$ まで $3^\circ$ おきに変化させて16の衝突角度について二つの渦輪の衝突のシミュレーションをおこなった。

#### 初期条件

半径	$R_0=5.0$
原点から渦輪までの距離	$A_0=10.0$
コア半径	$a_0=1.0$
渦度分布	Gaussian
循環	$\Gamma = 20\pi$
運動粘性率	$\nu = 0.1$
レイノルズ数	$Re=628$

#### 計算条件

計算領域 (x,y)	-17.5 から 17.5
計算領域 (z)	-14.0 から 21.0
グリッド点の数	$N^3 = 101, 101, 101$
空間の間隔	$\Delta x = 0.35$
時間の間隔	$\Delta t = 0.01$

table 1 : Initial condition and condition of the calculation

## 4 計算結果と議論

### 4.1 音圧の各項の係数の時間依存性

この数値計算によって求められた音圧の四重極の係数  $A_1, A_2$  の時間依存性のグラフが fig2 である。横軸は時間、縦軸は  $\hat{A}_1, \hat{A}_2$  であり、 $\hat{t}$  は  $t/(R_0/U_0)$ 、 $\hat{A}_n$  は  $A_n/(\rho_0 R_0 U_0^4/c^2 r_{obs})$  で規格化してある。 $U_0$  は渦輪の進行速度であるが、理想的な場合として Saffman の表式から計算した値を用いた。一つの渦輪の数値計算から得られる渦輪の進行速度は時間的に変化するが、ここで計算した時間間隔の中では Saffman の公式からのズレは 5% 以内である。それぞれの曲線は代表的な衝突角度  $\theta' = 0^\circ, 12^\circ, 21^\circ, 36^\circ, 45^\circ$  を表している。また、 $\hat{t} = 0$  として、どちらか一つの渦輪しか存在しないとき、渦輪が移動し渦核の中心が  $x_2 = 0$  の対称面を最初に横切る時間を選んである。このため、各場合について、計算を開始した  $\hat{t}$  の値は異なっている。計算開始直後の  $\hat{t} < 0$  での  $A_1, A_2$  の大きな変化は準定常な渦核がガウス分布からズレている影響であり、渦輪が一つしかない場合にも観測される。この初期の渦音を除いた  $\hat{t} = 0$  の少し前からの音の変化が衝突相手の渦輪の影響だと考えられる。

渦音の 4 重極成分  $A_1, A_2$  は、衝突角度によらず  $\hat{t} \sim 0.5$  前後で極大値を取る。これは、渦輪の最初に接触した付近の局所的な渦運動が、渦音の発生に深く関係していることを示している。fig2 で示したように  $A_2$  の時間変化は、衝突角度の相違によらずほぼ同様なグラフとなり、 $A_1$  の衝突後の最初の音のピークは衝突角度が大きくなるにつれて負から正へと変化していく。この衝突角による発生音の成分の変化の原因の一つは、渦音の放出方向の変化だと考えられる。例えば、渦音が各渦輪の初期の中心軸の中心としたルジャンドル関数  $P_2$  の方向性をもった音だとして仮定する。また、この仮想的な、各渦輪に結び付けられた、ある時間の渦音の強さは正面衝突をする時に観測される渦音の大きさの 1/2 とする。(正面衝突をする渦輪のばあい、図 1 で  $x_2$  軸を軸とした極座標によるルジャンドル関数を使って 4 重極音を表すと、対称性より  $P_2$  に比例する成分しか観測されない。また、現在の座標系では  $P_2, P_2^2$  の係数の間に  $A_1 = -A_2/2$  の関係がある。) 軸の角度が  $\alpha (= \theta - \theta')$  だけ異なる二つの極座標系  $(r, \theta, \psi)$  と  $(r, \theta', \psi)$  のルジャンドル関数  $P_2, P_2^2$  の関係

$$P_2(\cos\theta') = \frac{3\cos^2\alpha - 1}{2} P_2(\cos\theta) - \frac{1}{4} \sin^2\alpha P_2^2(\cos\theta) \cos 2\psi \quad (15)$$

を使うと、衝突角度  $\theta$  の渦音は、 $\theta = 0$  のときの  $A_1^0$  により

$$A_1 = A_1^0 (1 - 3\sin^2\theta) \quad (16)$$

$$A_2 = A_1^0 \frac{\cos^2\theta}{2} \quad (17)$$

と表される。これより  $A_1$  は  $\theta = 35.26^\circ$  で符号を変え、 $A_2$  は  $\theta$  が大きくなるにつれ 0 に近づくの  
がわかる。

しかし、実際に観測される渦音は、この仮想的な音とは異なり、 $\theta = 21^\circ$ で  $A_1 \sim 0$  となり、また、 $\theta = 45^\circ$ の  $A_2$ は $\theta = 0^\circ$ の値の  $1/2$  より大きい値となっている。この差が、渦管の単純な伸びだけでない渦輪の局所的な変形による音だと考えられる。

fig3に  $B_1$ の時間変化を示す。衝突角 $\theta$ が小さくなると急速に小さくなり、 $21^\circ$ 以下だとほとんど0となる。また、 $B_1$ が極大値をとる時間は、ほぼ  $A_1 = 0$  の時間と一致しており、衝突角が小さくなるにつれ遅くなるが、極小値をとる時間は約0.8で一定である。こうした四重極、八重極の音の時間変化を見ると、渦の音に関係する変形は $\theta$ が  $21^\circ$ 以上なら直角衝突と、以下なら正面衝突に近い変化だと結論できる。fig4に、領域  $S_1\{x_1 = 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$  と領域  $S_2\{x_2 = 0, x_1 > 0\}$  の循環の時間変化を  $\theta = 45^\circ, 36^\circ, 21^\circ$  の場合について示す。初期に  $S_1$ を横切っていた渦線は時間が経つと切りつなぎにより  $S_2$ を横切るようになる。この時間の開始時刻は  $t \sim 0$  の少し手前で一定しているが、切りつなぎ速度は正面衝突に近くなるほど小さくなる。衝突角  $21^\circ$  の場合、時刻  $t \sim 2$  で大きさの逆転が起こる。この情報は  $B_1$ の極大値、極小値の大きさに反映されているといえるが、音の大きく変化する時刻に、切りつなぎの速度が大きいとはいえないようにみえる。

#### 4.2 渦輪の衝突のダイナミクスと渦音の発生位置の評価

渦輪の衝突のダイナミクスを見てみる。ここでは代表的な例として衝突角度が  $36^\circ$  の場合をとり上げる。fig 5が正面と側面からみたピーク前後の渦輪の衝突のシミュレーションであり、渦度のマキシマムの40%の等渦度面を描いている。衝突角度が  $0^\circ$  の場合は渦輪が放射状に拡大するのだが、それと同様な様子が  $36^\circ$  の場合にも見られる。 $0^\circ$  の場合に見られない特徴は、

- 1) 衝突部で縦 ( $x_3$ -) 方向と横 ( $x_1$ -) 方向へ渦核が伸長する、
- 2)  $x_1$  軸方向から見た時、変形部と非変形部がある程度区別でき、渦輪が屈折した形となっている

ことの2つである。

fig6に  $A_1$ の空間積分の被積分関数である渦輪の各部分の渦度モーメントの時間についての三回微分した量  $a_1(\mathbf{y}, t) = (1/12\pi)(\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega})^{(3)} y_3$  の分布を  $x_2$  軸方向からの図を示す。時刻は  $A_1$ が極値をとった後の値であり、衝突角はfig2と同様に  $0, 21, 36, 45$  度をとっている。正面衝突  $\theta = 0^\circ$  のばあい、音源は渦輪全体に分布するのに対し、 $21^\circ$ では渦輪の上部の衝突部分、 $\theta = 36^\circ$ 、直角衝突  $\theta = 45^\circ$  の場合は渦輪の「肩」に当たる左右の渦輪が横方向に変形している部分の寄与が大きいことが分かる。

また、 $B_1$ の場合の同様な分布  $b_1(\mathbf{y}, t) = (1/32\pi)(\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega})^{(4)}(y_3^2 - (1/5)y^2)$  もfig7に示す。 $A_1$ に比べ、角度による局所的な値の差が大きく、 $21^\circ$ の場合ほどの場所でも大きな三次モーメントの時間変化がない。これは、四重極音よりも、渦輪の局所的な変形が八重極音に関係していることを示している。

### 4.3 まとめ

この研究では、渦輪の衝突角を変化させることにより、遠方の渦音と渦変形の様子を調べた。渦変形は衝突角度およそ21度を境にして、局所的な変形の大きな場合と渦輪全体が大きくなる場合に分けられ、発生する音の成分の時間変化にもこの様子が反映されるようである。渦線の切りつなぎの速度、あるいは局所的変形の強さは八重極音に密接に関係するようであるが、直接に比例するわけではなく、現在のところはっきりしない。その関係の詳しい解析は今後の課題であろう。

### 参考文献

- [1] M.J.Lighthill, Proc. R. Soc. London, Ser. A **211**, 564 (1952)
- [2] A. Powell, J. Acoust. Soc. Am. **35**, 177 (1964)
- [3] W.Möhring, J. Fluid Mech., **85** 685 (1978)
- [4] T. Kambe and T. Minota, J. Sound Vib., **74** 61 (1981)
- [5] T. Kambe and T. Minota, Proc. R. Soc. London, Ser. A **386**, 277 (1983)
- [6] T. Kambe, J. Sound Vib., **95**, 351 (1984)
- [7] T.Kambe, J. Fluid Mech. **173**, 643 (1986)
- [8] T.Kambe, T.Minota and M.Takaoka, Phys. Rev. **E48**, 1866 (1993)
- [9] K.Ishii,K.Kuwahara and C.H.Liu, Computers Fluids **22**, 589 (1993)

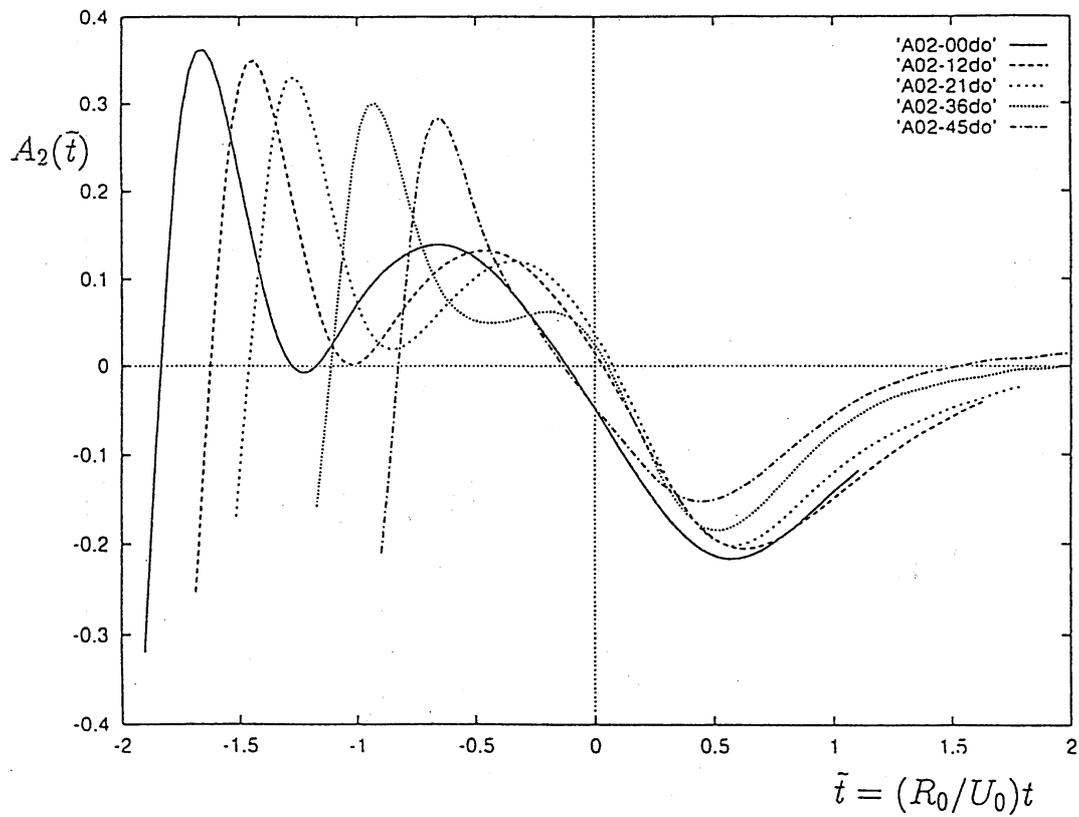
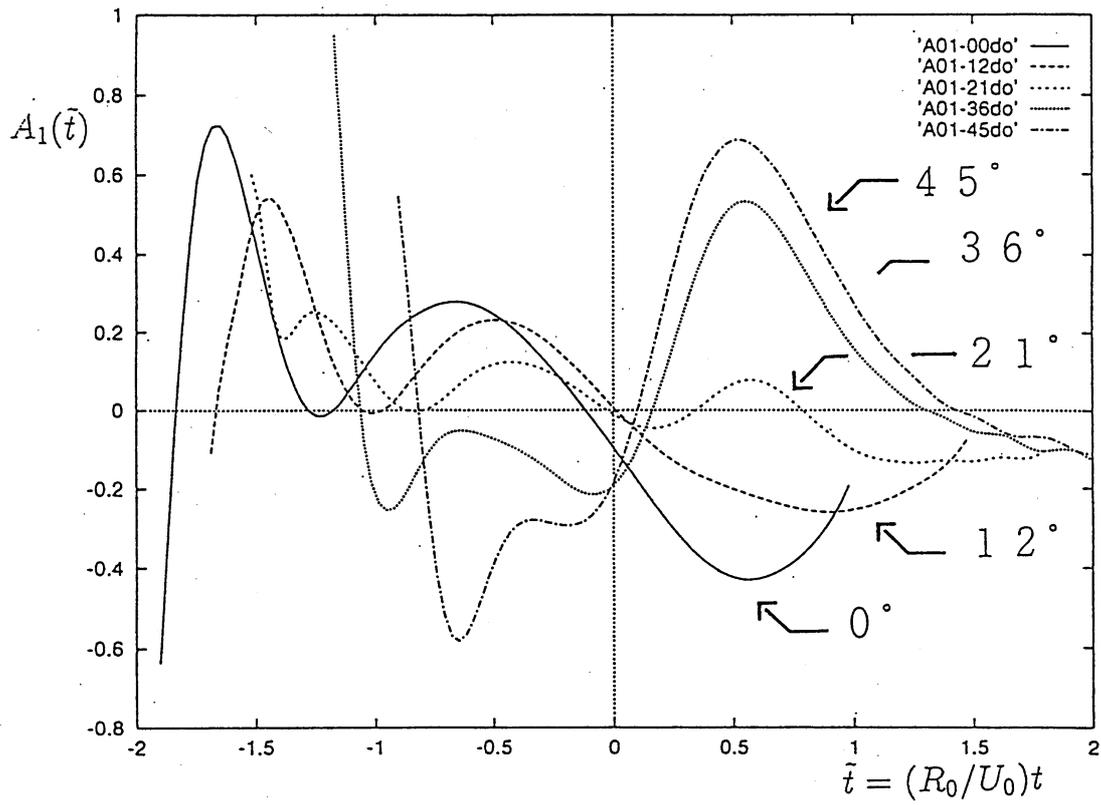


fig2 : Time-dependent of main mode amplitudes for  $A_1$  and  $A_2$

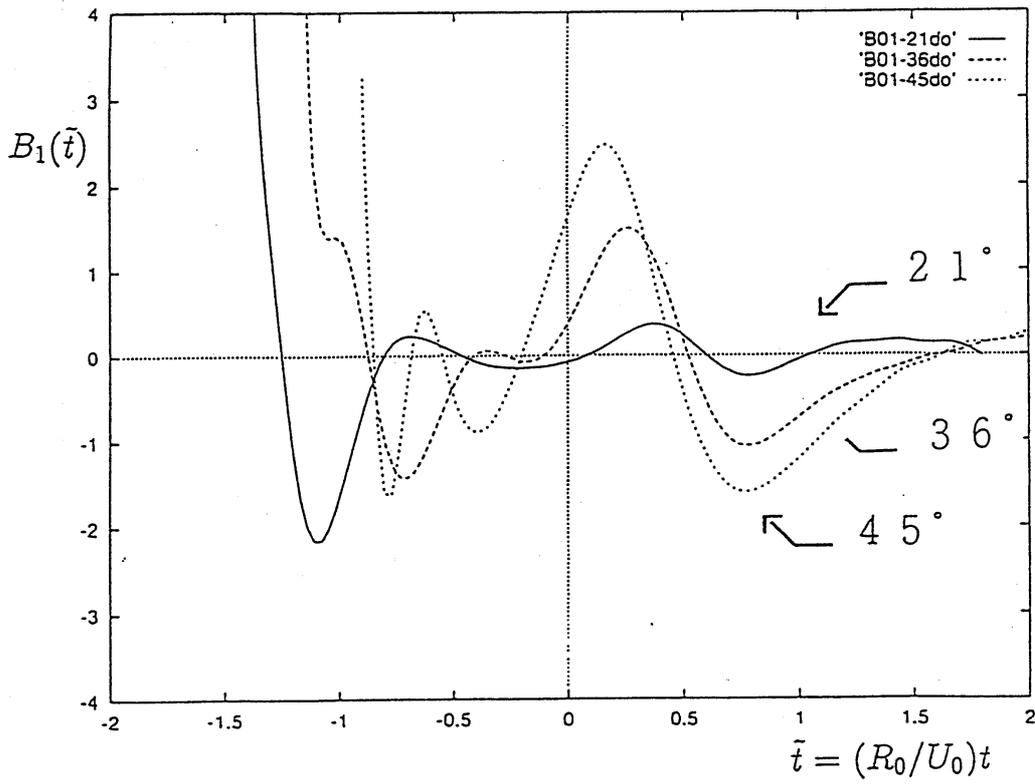


fig3 : Time-dependent of main mode amplitudes for  $B_1$

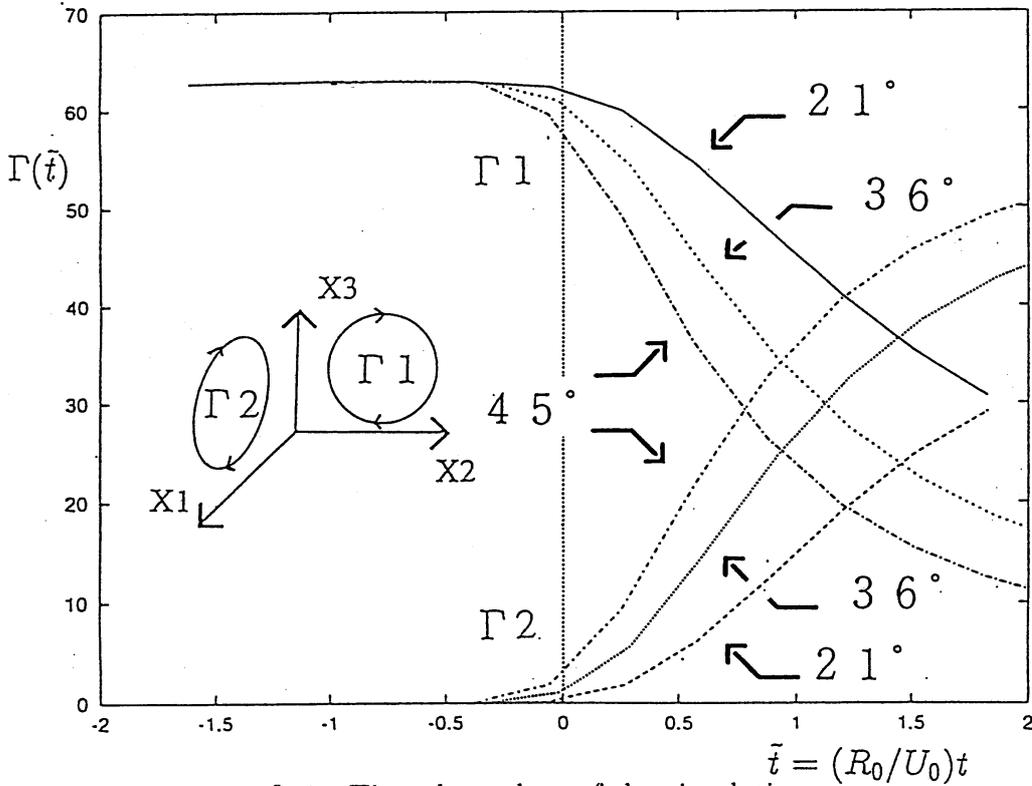
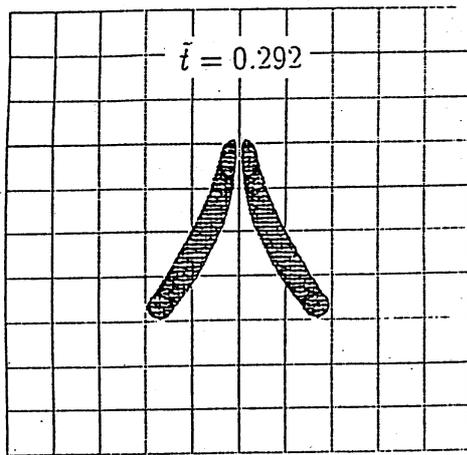


fig4 : Time-dependent of the circulation  $\gamma$



$A_1$ のピーク付近での  
渦輪のダイナミクス

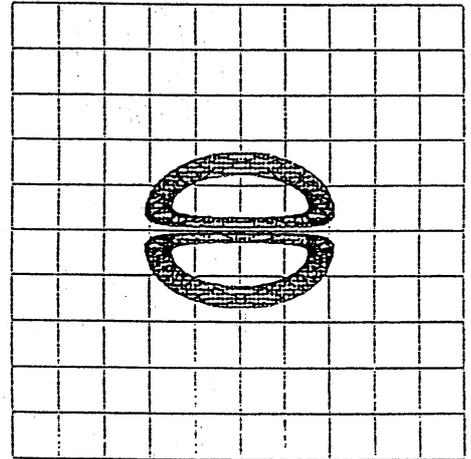
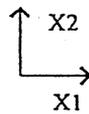
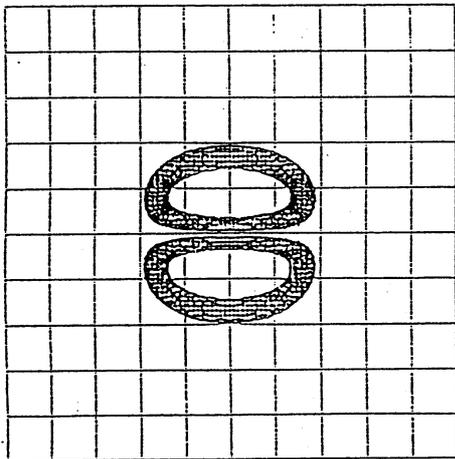
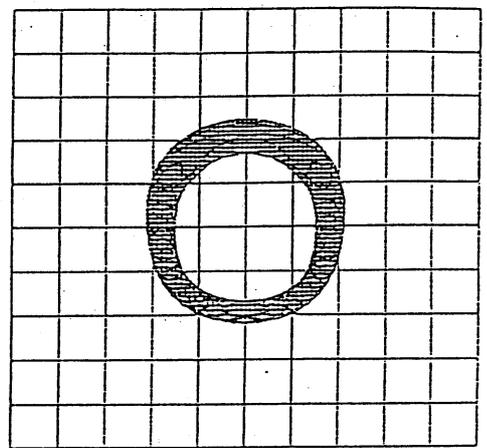
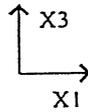
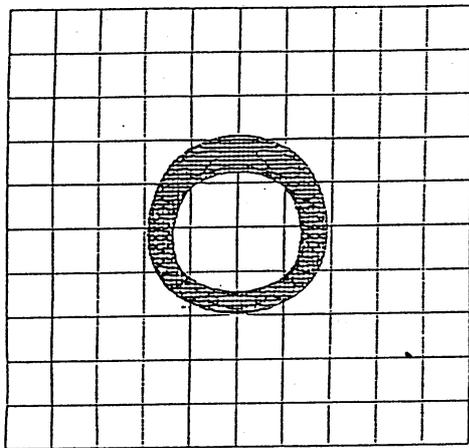
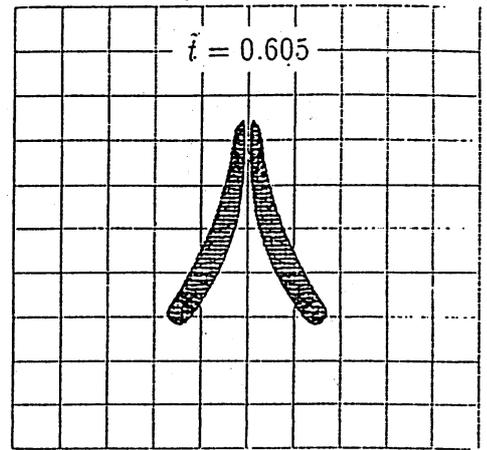
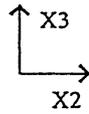
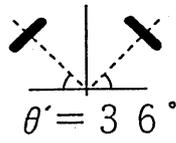


fig5 : Computed front views, side views and top views of the collision of two vortex rings at  $\theta' = 36^\circ$

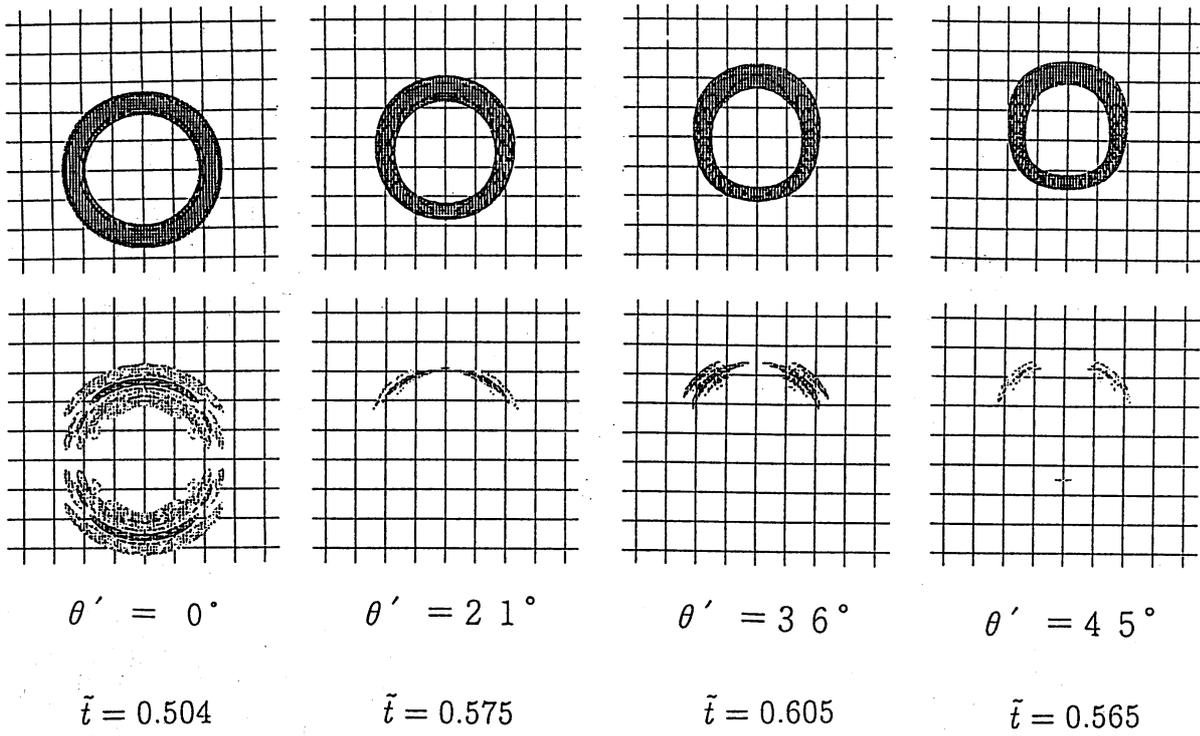


fig6 : The spatial distribution of main mode amplitudes  $a_1$

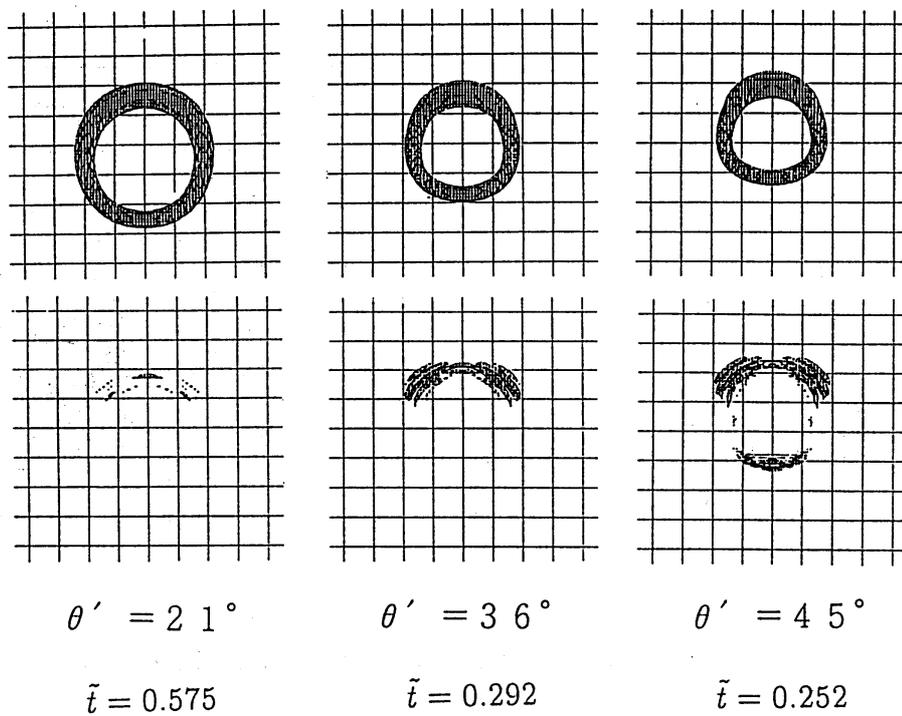


fig7 : The spatial distribution of main mode amplitudes  $b_1$