数理解析研究所講究録
978 巻 1997 年 21-27

ある配置ゲームについて

張 永新　寺岡義伸
Yongxin Zhang　Yoshinobu Teraoka
大阪府立大学総合科学部

1 Introduction

空間競争配置問題 (Location Problem of Spatial Competition) は最初に Hotelling[3] によって研究され、そこでは、同一製品を生産する二つの企業がある直線上の市場に分布している顧客に商品を提供し、互いに配置位置および商品価格を選び、自分の利益を最大にするために競争するモデルが取り扱われました。Hotelling[3] は一つ純戦略価格平衡点を求めた上で、両企業が選んだ配置位置は市場の中心に近づく (back -to- back) 傾向がある (i.e. The Principle of Minimum Differentiation) と言う現象を発見しました。しかし、d'Aspremont,Gabszewicz & Thisse[4] は両企業の配置位置がかなり接近していると、純戦略の中で価格平衡点が存在しないことを示した。又、Osborne & Pitchik[12] はこの問題に対して、Dasgupta & Maskin[11] の定理を用い、混合戦略の中に価格平衡点が存在することを証明し、Helmut Bester[1] は2次関数を持つ移動費用の Hotelling 配置問題に関して、無限の混合戦略配置平衡点が存在することを示した。一方、Eaton & Lipsey[10] は企業側が共通な価格で顧客に商品を提供すると仮定して、位置を選択する n 人配置問題の配置平衡点の存在性を解析した。

本報告では、差別化価格 (discriminatory price: a firm can charge each customer a different price) を導入し、一つ一般顧客分布関数による空間競争配置モデルを考え、そのモデルを2段非協力2人ゲームとして取り扱い、ゲームの配置平衡点及び価格平衡点の存在性について考察する。

2 The model

差別化価格(discriminatory price)とは player が各場所の顧客に対して、異なる価格を見積もる価格である。

モデル:

(1) 売手である player A , B は長さ1の線分の上にそれぞれ $x, y (0 \leq x \leq 1, x < y \leq 1)$ の所に店を配置する。ここでは、x, yはパラメーターである。同じ商品を顧客に提供する。商品の生産コストは0である。

(2) 顧客はこの線分上で確率分布関数 F に従って分布していて、F の密度関数 f は連続である。各顧客は一回毎に商品を一つだけ買う。

(3) 顧客は常に総価格が一番低いplayerの商品を買う。総価格は商品の値段プラス移動費用である。移動費用は線形で単位距離あたり 1 とする。(i.e $c(d) = d$、 d は顧客の場所から player の場所までの距離である。) 移動費用は顧客側が負担する。総価格が等しくなる場合には、近くのplayerの商品を買う、もし距離も同じであるならば、確率 $\frac{1}{2}$ で両playerの商品を買う。

(4) 両 player A , B は最初に同時に配置 (x, y) を選び、次に商品の価格 (p_A, p_B) を選択し、自分の利得を最大にしようとする。ここでは、$p_A \in [0,1]$; $p_B \in [0,1]$ を仮定する。

われわれは、この配置ゲームを2段非協力ゲーム (two-stage non-cooperative game) として考える。最初段階には両 player が同時に (x, y) の所に配置する。第二段階には商品の価格 (p_A, p_B) を選択する。各 player の利得は第二段階の後でえられる。

z 場所の顧客に対して、両 player の差別化価格 $p_A(z), p_B(z)$ とおく。又、両player A,B が顧客を獲得する領域をそれぞれC_A,C_Bとおく、C_A,C_Bは次のようになる：

$$
\begin{aligned}
C_A &= \{z \in [0,1]: p_A(z) + |z-x| \leq p_B(z) + |z-y| \ \textit{and} \ |z-x| \leq |z-y|\} \\
C_B &= \{z \in [0,1]: p_B(z) + |z-y| \leq p_A(z) + |z-x| \ \textit{and} \ |z-y| \leq |z-x|\}
\end{aligned}
$$

player A,B の利得は次の様になる：

$$\pi_A(p_A, p_B, x, y) = \int_{C_A} p_A(z) f(z) dz$$
$$\pi_B(p_A, p_B, x, y) = \int_{C_B} p_B(z) f(z) dz$$

3 The equilibrium analysis

先ず z 場所の顧客に対して、両 player の平衡価格 $(p_A^*(z), p_B^*(z))$ を求める。player A にとって z 場所の顧客を獲得する為に次の条件を満たさなければならない：

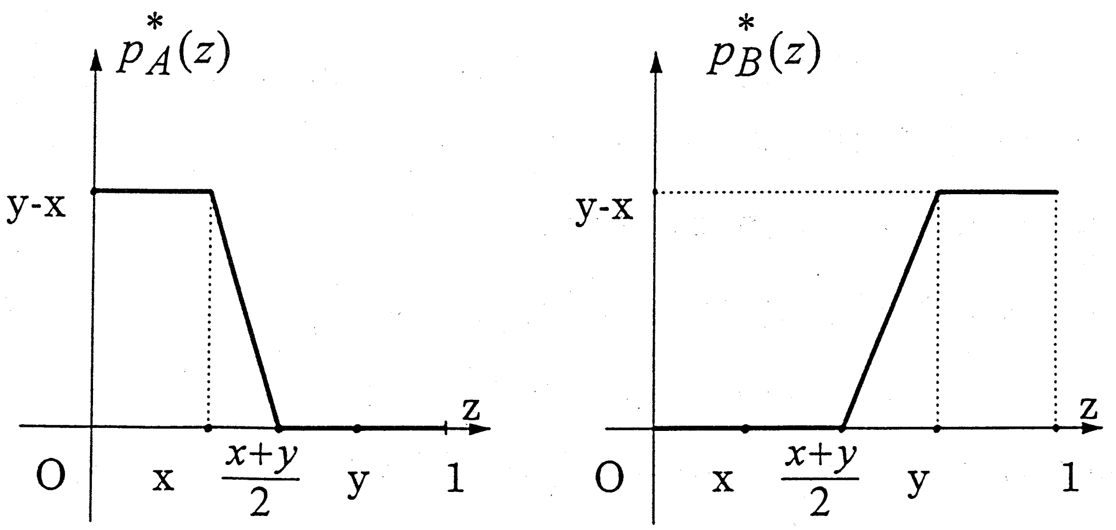
$$p_A(z) + |z - x| \leq p_B(z) + |z - y|$$

即ち、$p_A(z) \leq p_B(z) + |z - y| - |z - x|$ 、一方、player B は z場所の顧客を獲得する為に価格を下げていく：

$$p_B(z) \to 0 \quad p_A(z) \leq |z - y| - |z - x|$$

だから、$p_A^*(z) = max\{|z - y| - |z - x|, 0\}$ 、同様に、$p_B^*(z) = max\{|z - x| - |z - y|, 0\}$

$p_A^*(z)$,$p_B^*(z)$ の図は次のようになる：



Proposition 1 : 差別化価格戦略 (p_A^*, p_B^*) は Nash 平衡点ある。i.e

$$\begin{cases} \pi_A(p_A^*, p_B^*, x, y) \geq \pi_A(p_A, p_B^*, x, y) & for\ \forall p_A \in [0,1] \\ \pi_B(p_A^*, p_B^*, x, y) \geq \pi_B(p_A^*, p_B, x, y) & for\ \forall p_B \in [0,1] \end{cases}$$

Proof: 一般性を失わないから、次の式だけを示す。

$$\pi_A(p_A^*, p_B^*, x, y) \geq \pi_A(p_A, p_B^*, x, y) \qquad for\ \forall p_A \in [0,1]$$

$$\begin{aligned} C_A^* &= \{z \in [0,1]: p_A^*(z) + |z-x| \leq p_B^*(z) + |z-y| and |z-x| \leq |z-y|\} \\ C_A^{'} &= \{z \in [0,1]: p_A(z) + |z-x| \leq p_B^*(z) + |z-y| and |z-x| \leq |z-y|\} \end{aligned}$$

とおくと、明らかに、 $C_A^* = C_A^{'}$

$$\begin{aligned} \pi_A(p_A, p_B^*, x, y) &= \int_{C_A^{'}} p_A(z) f(z) dz \\ &\leq \int_{C_A^{'}} [p_B^* + |z-y| - |z-x|] f(z) dz \\ &= \int_{C_A^{'}} [|z-y| - |z-x|] f(z) dz \\ &= \int_{C_A^*} p_A^*(z) f(z) dz \\ &= \pi_A(p_A^*, p_B^*, x, y) \qquad\qquad Q.E.D. \end{aligned}$$

次に、平衡差別化価格戦略 (p_A^*, p_B^*) のもとで、平衡配置 (x, y) を求める。

$$\begin{aligned} C_A &= \{z \in [0,1]: p_A^*(z) + |z-x| \leq p_B^*(z) + |z-y| and |z-x| \leq |z-y|\} \\ C_B &= \{z \in [0,1]: p_B^*(z) + |z-y| \leq p_A^*(z) + |z-x| and |z-y| \leq |z-x|\} \end{aligned}$$

とおくと、player A,B の利得は次の様になる：

$$\begin{aligned} \pi_A(p_A^*, p_B^*, x, y) &= \int_{C_A} p_A^*(z) f(z) dz = \int_0^x (y-x) f(z) dz + \int_x^{\frac{x+y}{2}} (x+y-2z) f(z) dz \\ &= (y-x)F(x) + (x+y)[F(\frac{x+y}{2}) - F(x)] - 2\int_x^{\frac{x+y}{2}} z f(z) dz \\ \pi_B(p_A^*, p_B^*, x, y) &= \int_{C_B} p_B^*(z) f(z) dz = \int_{\frac{x+y}{2}}^y (2z-x-y) f(z) dz + \int_y^1 (y-x) f(z) dz \\ &= 2\int_{\frac{x+y}{2}}^y z f(z) dz - (x+y)[F(y) - F(\frac{x+y}{2})] + (y-x)[F(1) - F(y)] \end{aligned}$$

配置 (x,y) は平衡点であれば、次の条件を満たさなければならない：

$$\begin{cases} \frac{\partial\pi_A}{\partial x} &= F(\frac{x+y}{2}) - 2F(x) = 0 \\ \frac{\partial\pi_B}{\partial y} &= 1 + F(\frac{x+y}{2}) - 2F(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) &= \frac{1}{2}F(\frac{x+y}{2}) \\ F(y) - F(x) &= \frac{1}{2} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\pi_A}{\partial x^2} &= \frac{1}{2}f(\frac{x+y}{2}) - 2f(x) \leq 0 \\ \frac{\partial^2\pi_B}{\partial y^2} &= \frac{1}{2}f(\frac{x+y}{2}) - 2f(y) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) &\geq \frac{1}{4}f(\frac{x+y}{2}) \\ f(y) &\geq \frac{1}{4}f(\frac{x+y}{2}) \end{cases} \tag{3.2}$$

以上の議論により、次の Proposition が得られる：

Proposition 2： 配置 (x,y) が平衡点である必要条件は式 (3.1), (3.2) を満たすことである。

Example 1 :顧客は一様分布に従って分布している。*i.e.* $f(z) = 1 \quad z \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \pi_A &= \frac{1}{4}(y-x)(y+3x) \\ \pi_B &= \frac{1}{4}(y-x)(4-x-3y) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\pi_A}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial\pi_B}{\partial y} &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{4} \\ y &= \frac{3}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2\pi_A}{\partial x^2} &= -\frac{3}{2} < 0 \\ \frac{\partial^2\pi_B}{\partial y^2} &= -\frac{3}{2} < 0 \end{cases}$$

配置 $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ は平衡点である。そして、平衡差別化価格は次の様になる:

$$p_A^*(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & if \;\; 0 \leq z \leq \frac{1}{4} \\ 1-2z & if \;\; \frac{1}{4} \leq z \leq \frac{1}{2} \\ 0 & o.w \end{cases} \qquad p_B^*(z) = \begin{cases} -1+2z & if \;\; \frac{1}{2} \leq z \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & if \;\; \frac{3}{4} \leq z \leq 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

両 player の利得:

$$\pi_A = \pi_B = \frac{3}{16}$$

Example 2 :顧客は次のような密度関数 f をもつ確率分布関数 F に従って分布している。*i.e.*

$$f(z) = 12(z - \frac{1}{2})^2 \qquad z \in [0,1]$$

配置 $(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}},\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}})$ は平衡点である。そして平衡差別化価格は次の様になる：

$$p_A^*(z)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{2}} & if\ \ 0\leq z\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\\ 1-2z & if\ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\leq z\leq\frac{1}{2}\\ 0 & o.w\end{cases}\qquad p_B^*(z)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt[3]{2}} & if\ \ \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\leq z\leq 1\\ 2z-1 & if\ \ \frac{1}{2}\leq z\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\\ 0 & o.w\end{cases}$$

両 player の利得:

$$\pi_A=\pi_B=\frac{7}{16\sqrt[3]{2}}$$

参考文献

[1] Helmut Bester,André de Palma,Wolfgang Leininger,Jonathan Thomas,E-L.Thadden. *A noncooperative analysis of Hotelling's location game, Games and Economics Behavior, vol.12,pp.165-186,1996.*

[2] J.J. Gabszewicz and J.-F.Thisse, Masahisa Fujita,Urs Schweizer. *Location Theory, Harwood Academic Publishers, 1986.*

[3] Hotelling,H. *stability in competition , Economic Journal vol. 39, pp.41-57, 1929.*

[4] d'Aspremont,C.,J.J. Gabszewicz and J.-F. Thisse. *on Hotelling's stability in competition , Econometrica vol.47, pp. 1145-1150, 1979.*

[5] Hoover. *Spatial Price Discriminatory , Review of Economic Studies vol. 4. 182-191, 1936.*

[6] Gabaszewice,J.J. and J.-F.Thisse. *Location in :R.J.Aumann and S.Hart,eds., Handbook of game theory vol. 1, pp. 281-304, 1992.*

[7] Selten,R., *Reexamination of the perfetness conceptt for equilibrium points in extensive form games, International Journal of Game Theory vol. 4, pp. 25-55, 1976.*

[8] Kats,A., *Location-price equilibria in a spatial model of discriminatory, Economics Letters vol.25, pp. 105-109, 1987.*

[9] Shilony,Y., *Hotelling's competition with general customer distributions, Economics Letters vol. 8, pp 39-45, 1981.*

[10] Eaton,B.C. and R.G.Lipsey. *The principle of mininum differentiation reconsidered some new developments in the theory of spatial competitoin, Review of Economic Studies vol.42, pp. 27-49, 1975.*

[11] Dasgupta,P.and E. Maskin. *The existence of equilibrium in discontinus economic games, Theory and applications, Review of Economic Studies vol 53, pp. 1-41,1986.*

[12] Osborne,M.J. and C.Pitchik. *Equilibrium in Hotelling's model of spatial competition, Econometrica vol 55, pp. 911-923,1987.*