数理解析研究所講究録
979巻 1997年 120-123

非有界作用素の正規拡大について

九州芸工大　太田昇一（Schôichi Ôta）

1. 非有界な作用素の正規拡大については、微分作用素の研究から、Kilpi (1953年) や Davis (1955年) が同じ空間上への正規拡大について考察している。Coddington (1960年前後) も同じ立場から、Neumann の対称作用素の自己共役拡大の方法を用いて、同じ空間への拡張問題を考えている。一方、Bargmann は creation operator $\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{d}{dx})$ in $L^2(\mathbb{R})$ が、空間の外への正規拡大をもつことを示した (1961年)。近年では、非有界な Toeplitz 作用素や非有界な weighted shift に関連して、非有界な正規拡大問題が研究されている。

2. T をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上稠密な定義域を持つ線形作用素とする。このとき、

(1) T が formally normal $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(T^*)$

$\|Tx\|=\|T^*x\|$ $(x\in\mathcal{D}(T))$;

(2) T が normal $\Longleftrightarrow$ T が formally normal で $\mathcal{D}(T)=\mathcal{D}(T^*)$;

(3) T が subnormal $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{H}$ を閉部分空間として含む適当なヒルベルト空間 $\mathcal{K}$ と、$\mathcal{K}$ 上の normal な作用素 N が存在

して、

$$\circledast \cdots\cdots \mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{H} \quad ,$$

かつ、 $\quad T\eta = N\eta \quad (\eta \in \mathcal{D}(T))$ を満たす：

のように定義する。

この定義に関連して、Mcdonald and Sundberg（1986年）は、subnormalの定義において、⊛ではなくもっと強い条件：

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{H} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad \circledast\circledast$$

のもとで、有界作用素におけるPutnamの結果を非有界subnormalに拡張している。（注：⊛⊛を満たすsubnormalは必ずclosed）

1940年代に、Naimarkは対称作用素の拡大問題（空間の外への拡大も含めて）を第1種、2種、3種に分類して論じている。閉対称作用素は、⊛⊛を満たすような自己共役拡大を必ずもつ（i.e., Naimarkの言葉で言うと、第2種の拡大をもつ）。それでは、「一般にclosedなsubnormal作用素は、第2種の拡大をもつのか？」と言う問（Stochel and Szafraniec（1989））が自然に出るが、「第2種のnormal拡大を持たないclosed subnormal作用素が存在する」ことは、講究録（903巻，pp.138-141）で述べた。この例は、一方で、同じ空間上へのuniqueなnormal拡大をもつが、それ自身normalでないclosed作用素になっている。closed対称作用素がuniqueな自己共役拡大を同じ空間にもてば、それ自身が自己共役になっていることに注意しておく。

3. 作用素Tに対して、$T=T_1+iT_2$ ただし、T_1, T_2 は対称作用素で $\mathcal{D}(T_1)=\mathcal{D}(T_2)$ をTのCartesian分解という。自己共役作用素A, Bに対して、AとBのそれぞれのspectral projectionが互いに可換な時、AとBは強可換と言い、$A \smile B$ と書くことにする。

<u>定理1</u> formally normal作用素 $T=T_1+iT_2$ (Cartesian分解) において、T_1 と T_2 はessentially自己共役とする。このとき、次は同値：

1. Tがsubnormal；
2. $\overline{T_1} \smile \overline{T_2}$ ；
3. Tが同じ空間上への一意的なnormal拡大をもつ。

上のとき、一意的なnormal拡大は $\overline{T_1}+i\overline{T_2}$ で与えられる。

第2種のnormal拡大を持たないsubnormal作用素は、上の形で、$\overline{T_1+iT_2} \subsetneq \overline{T_1}+i\overline{T_2}$ の例でもある。

ここで、等号が成り立つ場合の特徴づけは、次で与えられる。

<u>命題2</u> 定理1の仮定のもとに、Tがsubnormalとすると、$\overline{T}=\overline{T_1}+i\overline{T_2}$ なるための必要十分条件は、

$$C^s(T_2)'\mathcal{D}(\overline{T}) \subset \mathcal{D}(\overline{T})$$

$$(\Leftrightarrow C^s(T_1)'\mathcal{D}(\overline{T}) \subset \mathcal{D}(\overline{T}))$$

である。ここに $C^s(T_2)=\{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H});\ BT \subset TB\}$, で

$C^s(T_2)'$は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$における $C^s(T_2)$の通常の可換子である。

4. 同じ空間への uniqueな normal 拡大をもつ作用素を考える際、定理1で特にT_2が有界な場合を最初に考えてみる。すなわち、$T = A + Bi$ ($A \subseteq A^*$, $B=B^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$) において、

<u>補題3</u> Tが$\mathcal{H}$へ normal 拡大をもつならば、$B \in C^w(A)$.
ここに $C^w(A) = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : XA \subset A^*X\}$.

(注: $B \in C^w(A)$でも $A+Bi$は一般に normal 拡大を持たない例は存在する).

<u>命題4</u> $B \in C^w(A)$かつ Bが cyclic ベクトルをもつならば、Tは$\mathcal{H}$上 uniqueな normal 拡大をもつ。

もっと一般に、次の定理が成り立つ:

<u>定理5</u> ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の稠密な定義域をもつ作用素Tが$\mathcal{H}$に normal 拡大Nをもち、その imaginary part $\mathrm{Im}\,N$の closure B_0が simple spectrum を持つならば、Tは$\mathcal{H}$上 uniqueな normal 拡大 A_0+iB_0 をもつ:

ただし、
$$\mathcal{D}(A_0) \equiv \left\{ \sum A_i \xi_i : A_i \in C^s(B_0)',\ \xi_i \in \mathcal{D}(A) \right\}$$
$$A_0\left(\sum A_i \xi_i\right) \equiv \sum A_i A \xi_i$$
。