数理解析研究所講究録
979 巻 1997 年 50-56

L^∞ の恒等作用素近似

新潟大・理　泉池敬司 (Keiji Izuchi)

1953年 Korovkin [7] は次の有名な結果を証明した。

<u>Korovkinの定理</u>. $C([0,1])$ 上の有界線形作用素列 $\{T_n\}_n$ に対して,

1) $T_n \geq 0$,

2) $T_n x^j \to x^j$ for $j = 0, 1, 2$,

が成立するならば, $T_n f \to f$ $\forall f \in C([0,1])$ である。

Wulbert [11] は条件 1) を

1') $\|T_n\| \leq 1$

に換えても成立することを示した。それ以来, 今日まで Korovkin 型の定理は広く研究され, 1994年にその途中結果が Altomare-Campiti [1] の本にまとめられている。(国内における最近の結果を参考文献に入れた。)

ここでは X を compact Hausdorff space とする。$S \subset C(X)$ に対して (sequential type) Korovkin の定理が成立するとは

「 $\|T_n\| \leq 1$, $T_n f \to f$ $\forall f \in S$ ならば

$$T_n g \to g \quad {}^\forall g \in C(X) \quad \square$$

となる時にいうことにする。上の定義において，作用素列をnetに置換えて定義されたものは，高橋 & [10] 等により研究されていて，net type Korovkinの定理が成立するための必要十分条件として

(☆)「${}^\forall x \in X$ に対して，$\int_X f\,d\mu = f(x)$ ${}^\forall f \in \mathcal{S}$ となるのは $\mu = \delta_x$」

が知られている。また

net type で成立 $\Longrightarrow$ sequential type で成立

である。特に $\mathcal{S}$ が separable の時は逆が成立することが示されているが [5]，一般には逆は成立せず，ここでは (sequential type) Korovkin の定理がどのような $\mathcal{S}$ に対して成立するのかを議論したい。特に $\mathcal{S}$ が $C(X)$ の C^*-subalgebra の時を考えてみる。この時は $\mathcal{S}$ は (☆) をみたさないから，net typの Korovkin の定理が成立しない。

[1]　$\mathcal{S}$ が closed ideal の時。

この時

$$\mathcal{S} = \{f \in C(X)\,;\, f = 0 \text{ on } \Gamma\}$$

と表わせる。ここで $\Gamma \subsetneqq X$ closed で $\Gamma \neq \phi$ とする。

Scheffold [9] は $L^\infty([0,1]) \cong C(X)$, $\Gamma = \{x_0\}$ の時，$\mathcal{S}$ に対して Korovkin の定理が成立することを示した。これを一般にす

ると次の定理になる。

定理1[6]。closed ideal $\mathcal{S}$ に対して Korovkin の定理が成立する必要十分条件は Γ が quasi-G_δ 集合を含まないことである。

ここで $E \subset X$ が quasi-G_δ 集合であるとは,

$$\exists U_n \text{ open} \downarrow \text{ s.t. } E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$$

と表わせる時にいう。この定理で満足できない点は, Γ が quasi-G_δ 集合を含まない時は Γ は非常に小さい集合であり, $\mathcal{S}$ が非常に大きい, つまり $C(X)$ に近くなり, この $\mathcal{S}$ に対して Korovkin の定理が成立することが分かっても, 驚きを感じない所にある。

[2] $\mathcal{S}$ が C^*-subalgebra の時。

$\mathbb{T} = \{|z| = 1\}$ とする。単位開円板上の有界解析関数とその境界関数を同一視してその集合を H^∞ とする。C を $\mathbb{T}$ 上の連続関数の空間とすると, Sarason により, $H^\infty + C$ は $L^\infty(\mathbb{T})$ の (essential) sup-norm closed subalgebra となる。

$$QC \equiv (H^\infty + C) \cap \overline{(H^\infty + C)}$$

と定義する。QC は $L^\infty(\mathbb{T})$ 上の C^*-subalgebra になる。

$$C \subsetneq QC = [(H^\infty + C) \cap \overline{H^\infty}] + C \subsetneq H^\infty + C$$

となり, 関数論的立場から QC を考察するとかなり空間 C に

近いことが想定される。又実解析立場で QC を表わすと,

$$QC = L^\infty(\mathbb{T}) \cap VMO$$

となり,これからも QC はある意味で C に近いことが分かる。$L^\infty \cong C(X)$ と考えた時,C に対して Korovkin の定理が成立しないことを注意しておく。

<u>定理2</u> [4]. QC に対して Korovkin の定理が成立する。

注1) Korovkin の定理が成立する本格的に小さな C^*-subalgebra の例として始めてのものである。

注2) $\forall x \in X$ に対して $\exists y \in X$ s.t. $x \neq y$, $f(x) = f(y)$ $\forall f \in QC$.

注3) 証明においては,今までに得られている $H^\infty(\mathbb{T})$ の結果が使われている[2,3]。

注4) 一般の $L^\infty \cong C(X)$ に対して,いかに QC 空間を定義し,それが Korovkin の定理が成立するようにできるか?特に $\ell^\infty \cong C(\beta\mathbb{N})$ の時は?

[3] 一様近似。

$L^\infty \cong C(X)$ 上の作用素列 $\{T_n\}_n$ で $\|T_n\| \le 1$, $T_n \to I$ strongly の時,$T_n \to I$ uniformly となることが証明できた。しかしこの結果は Lotz [8] により既に証明されていた。

<u>Lotz の定理</u>. $C(X)$ が Grothendieck space とし,$\|T_n\| \le 1$ とする。$T_n \xrightarrow{s} I$ ならば $T_n \xrightarrow{u} I$ である。

ここでBanach空間YがGrothendieck spaceであるというのは

「$Y^* \ni y_n \to y_0 \in Y^*$ w^* $\Rightarrow$ $y_n \to y_0$ weakly」

の時にいう。XがStonian（$\overline{\text{open}}$ は open）ならXはF-space（U, V open F_σ, $U \cap V = \phi \Rightarrow \overline{U} \cap \overline{V} = \phi$）であり，この時 $C(X)$ はGrothendieck spaceになることが知られている。

Banach空間YがLotzの定理が成立するとは

「T_n on Y, $\|T_n\| \le 1$, $T_n \xrightarrow[s]{} I \Rightarrow T_n \xrightarrow[u]{} I$」

の時にいうことにする。[2,3]の結果とextension propertyを用いると

系. $QC \subset B \subset L^\infty(\mathbb{T})$ なるclosed subalgebra B に対してLotzの定理が成立する。$QA = QC \cap H^\infty(\mathbb{T})$, $H^\infty(\mathbb{T})$ もLotzの定理が成立する。

問1. QC はGrothendieck spaceか？

問2. 一般の H^∞ 空間に対して，Lotzの定理が成立するか？

参考文献

[1] F. Altomare and M. Campiti, Korovkin-type approximation theory and its applications, W. de Gruyter, 1994.

[2] K. Izuchi, QC-level sets and quotients of Douglas algebras, J. Funct. Anal. 65 (1986), 293-308.

[3] K. Izuchi, Countably generated Douglas algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 299 (1987), 177–192.

[4] K. Izuchi, A sequential type Korovkin theorem on L^∞ for QC-test functions, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[5] K. Izuchi, H. Takagi and S. Watanabe, Sequential BKW-operators and function algebras, J. Approx. Th. 85 (1996), 185–200.

[6] ———, Sequential Korovkin type theorems and weighted composition operators, Acta Sci. Math. 62 (1996), 161–174.

[7] P. P. Korovkin, On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 90 (1953), 961–964.

[8] H. P. Lotz, Uniform convergence of operators on L^∞ and similar spaces, Math. Z. 190 (1985), 207–220.

[9] E. Scheffold, Über die punktweise Konvergenz von Operatoren in C(X), Rev. Acad. Ci. Zaragoza 28 (1973), 5–12.

[10] S.-E. Takahasi, (T, E)-Korovkin closures in normed spaces and BKW-operators, J. Approx. Th. 82 (1995), 340–351.

[11] D. E. Wulbert, Convergence of operators and Korovkin's theorem, J. Approx. Th. 1 (1968), 381–390.

追 加

1. T. Ishii and K. Izuchi, BKW-operators for Chebyshev systems, preprint.
2. K. Izuchi, Y. Matsugu and H. Takagi, BKW-operators on the polydisc and ball algebras, Far East J. Math. Sci. 3 (1995), 9-22.
3. K. Izuchi and S.-E. Takahasi, BKW-operators on the interval and the sequence spaces, J. Approx. Th. 87 (1996), 159-169.
4. ————, BKW-operators on the interval [0, 1], Rend. Circ. Mat. Palermo, to appear.
5. R. Sato and S.-E. Takahasi, A discrete Korovkin theorem and BKW-operators, J. Approx. Th. 84 (1996), 351-366.
6. S.-E. Takahasi, Bohman-Korovkin-Wulbert operators from a function into a commutative C^*-algebra for special test functions, Tôhoku Math. J. 48 (1996), 139-148.