数理解析研究所講究録
981 巻 1997 年 161-169

最適制御問題に対する conjugate point について

富山大学 経済学部 古賀 さゆり (Sayuri Koga)

次の最適制御問題を考える。

$$
\begin{array}{lll}
 & \text{Minimize} & J(x,u)=l(x(T))+\int_0^T L(t,x(t),u(t))dt \\
(C) & \text{subject to} & \dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)),x(0)=x_0,k(x(T))=0 \\
 & & u\in U=\{u|g(u)\leq 0,h(u)=0\}, \\
 & & x\in AC([0,T];R^n),\quad u\in L_\infty([0,T];R^m)
\end{array}
$$

但し、$U\subset R^m$, $L:[0,1]\times R^n\times R^m\to R$, $f:[0,1]\times R^n\times R^m\to R^n$

$f(t,\cdot,\cdot),L(t,\cdot,\cdot)$ は $\{(x,u)|\quad ||x-\bar{x}(t)||<\varepsilon,||u-\bar{u}(t)||<\varepsilon\}$ 上で (x,u) に関し2回連続微分可能。$g(\cdot),h(\cdot)$ は、$\{u|\quad ||u-\bar{u}(t)||<\varepsilon\}$ 上2回連族微分可能。$k:R^n\to R^r$、$l:R^n\to R$ は $\{x|\quad ||x-\bar{x}(T)||<\varepsilon\}$ 上 C^2-class。$g:R^m\to R^s,h:R^m\to R^s$ は $\{u|\quad ||u-\bar{u}(t)||<\varepsilon\}$ 上 C^2-class。また、x_0 は与えられた点、T は fix point とする。

$(\bar{x},\bar{u})$ 上のある近傍上で $J(x,u)\geq J(\bar{x},\bar{u})$ が成立する許容曲線 $(\bar{x},\bar{u})$ を最適制御問題 (C) の弱極値という。ここでは (C) の弱極値に対する最適性必要条件を与える。

以下簡単のため、解 $(\bar{x},\bar{u})$ に対し $\bar{L}(t)=L(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)),\bar{h}(t)=h(t,\bar{u}(t))$ etc. と書くこととする。

このような問題の解 $(\bar{x},\bar{u})\in PWS([0,T];R^n)\times PWC([0,T];R^m)$ に対し、Zeidan らは conjugate point に関する最適性必要条件を与えている [2]。しかしながらそこで与えられた最適性条件は、次の非常に強い三つの仮定を満たす事が前提となっている。

1.strengthened Legendre condition

$$v\bar{H}_{uu}(t)v>0\ \ ^\forall v \text{ satisfying } \bar{h}_u(t)v=0,\ \bar{g}_{ju}(t)v\leq 0\ \ (j\in I(t))$$

但し、$I(t):=\{j\in\{1,2,\cdots,m\}|\ \ \bar{g}_j(t)=0\}$

2.$[0,t]({}^\forall t\in[0,T])$ 上 strengthened normality condition

$$\left\{\begin{array}{l}-\dot{p}=\bar{f}_x^*p \\ p^*\bar{f}_uv=0\ \ ^\forall v \text{ satisfying } \bar{h}_uv=0,\ \bar{g}_{ju}v\leq 0\ (j\in I(t)) \text{ on } [0,t]\end{array}\right. \implies p\equiv 0$$

3.$[t,T]({}^\forall t\in[0,T])$ 上 strengthened normality condition

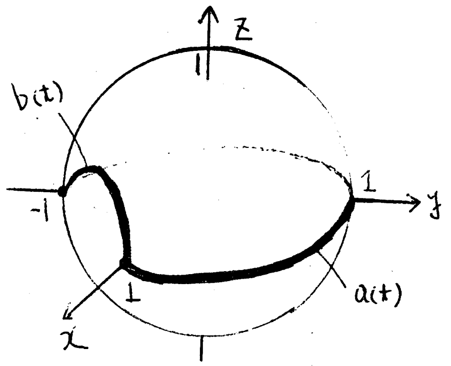
$$\left\{\begin{array}{l}-\dot{p}=\bar{f}_x^*p \\ p(T)=\nabla\bar{k}(T)^\exists\nu \\ p^*\bar{f}_uv=0{}^\forall v \text{ satisfying } \bar{h}_uv=0,\ \bar{g}_{ju}v\leq 0\ (j\in I(t)) \text{ on } [t,T]\end{array}\right. \implies p\equiv 0$$

しかし、これらの仮定 1, 2, 3 は非常に強い条件であるので $U = R^m$ の場合ですら満たさない事が多い。

Example 1

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \int_0^1 \sqrt{\dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t)\cos^2\alpha(t)}dt \\ \text{subject to} & \alpha(0) = 0, \beta(0) = 0, \alpha(1) = 0, \beta(1) = \frac{3}{2}\pi \end{array}$$

この例は球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上の曲線の中で、二点 $(1, 0, 0)$、$(0, -1, 0)$ を通る最短曲線を求める問題である。例えば、以下の図の曲線 $a(t)$ は Euler equation、Legendre condition を満たしている。しかしながら、最適解ではない。例えば、曲線 $b(t)$ は、Euler equation は満たしていないが、曲線 $a(t)$ より二点間の距離は短い。



$$a(t) = \begin{cases} \alpha(t) \equiv 0 \\ \beta(t) = \frac{3}{2}\pi t \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} \alpha(t) = \pi t \\ \beta(t) = \frac{1}{2}\pi t \end{cases}$$

- Euler-equation $(\frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{\alpha}} = \bar{L}_\alpha, \frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{\beta}} = \bar{L}_\beta)$

$$\bar{L}_\alpha = \frac{-\dot{\beta}^2(t)\cos\alpha\sin\alpha}{\sqrt{\dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t)\cos^2\alpha(t)}}, \quad \bar{L}_{\dot{\alpha}}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{\sqrt{\dot{\alpha}^2(t) + \dot{\beta}^2(t)\cos^2\alpha(t)}},$$

$$\bar{L}_\beta(t) = 0, \quad \bar{L}_{\dot{\beta}}(t) = \frac{\dot{\beta}(t)\cos^2\alpha(t)}{\sqrt{\dot{\alpha}^2(t)\sin^2\beta(t) + \dot{\beta}(t)^2}}$$

より、曲線 $a(t)$ に対しては

$$\bar{L}_{\dot{\alpha}} = \bar{L}_\alpha = \bar{L}_\beta = 0, \quad \bar{L}_{\dot{\beta}} \equiv 1$$

であるので Euler-equation を満たしている。曲線 $b(t)$ に対しては

$$\bar{L}_\beta = 0, \quad \bar{L}_{\dot{\beta}} = \frac{\cos^2\pi t}{\sqrt{4 + \cos^2\pi t}}$$

であるので、

$$\frac{d}{dt}\bar{L}_{\dot{\beta}}(\frac{1}{4}) \neq \bar{L}_\beta(\frac{1}{4})$$

即ち、曲線 $b(t)$ は Euler-equation は満たさない。

- Legendre condition $((\xi,\eta)\nabla^2_{(\dot\alpha,\dot\beta)}L\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\geq 0$ for all $(\xi,\eta)\in R^2)$

$$\bar{L}_{\dot\alpha\dot\alpha}=\frac{\dot\beta^2(t)\cos^2\alpha(t)}{\sqrt{\dot\alpha^2(t)+\dot\beta^2(t)\cos^2\alpha(t)}^3},\quad \bar{L}_{\dot\alpha\dot\beta}=\frac{\dot\alpha(t)\dot\beta(t)\cos^2\alpha(t)}{\sqrt{\dot\alpha^2(t)+\dot\beta^2(t)\cos^2\alpha(t)}^3},$$

$$\bar{L}_{\dot\beta\dot\beta}=\frac{\dot\alpha^2(t)\cos^2\alpha(t)}{\sqrt{\dot\alpha^2(t)+\dot\beta(t)^2\cos^2\alpha(t)}^3}$$

であるので、曲線 $a(t)$, $b(t)$ に対する Legendre condition はそれぞれ次の式で与えられる。

$$(\xi,\eta)\begin{pmatrix}\frac{2}{3\pi} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\frac{2}{3\pi}\xi^2,$$

$$(\xi,\eta)\begin{pmatrix}\frac{2\cos^2\pi t}{\sqrt{4+\cos^2\pi t}^3} & \frac{4\cos^2\pi t}{\sqrt{4+\cos^2\pi t}^3}\\ \frac{4\cos^2\pi t}{\sqrt{4+\cos^2\pi t}^3} & \frac{8\cos^2\pi t}{\sqrt{4+\cos^2\pi t}^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\frac{2(\xi+2\eta)^2\cos^2\pi t}{\sqrt{4+\cos^2\pi t}^3}\geq 0$$

よって、曲線 $a(t)$, $b(t)$ は Legendre condition を満たす。しかしながら、曲線 $a(t)$ に対し

$$(0,1)\begin{pmatrix}\frac{2}{3\pi} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=0$$

であるので、条件 1 の strengthened Legendre condition は満たしていない。それゆえ、曲線 $a(t)$ に対しこれ以上の判定は出来なかった。

特に strengthened normality conditions は非常に強い仮定であるにもかかわらず、それらの一つでも欠くことはできない事を Zeidan らは示している [4]。最近、Loewen らが「generalized conjugate point」を定義し、[1] において control 領域 U が凸で与えられる最適制御問題の解 $(x,u)\in PWS([0,T];R^n)\times PWC([0,T];R^m)$ に対し generalized conjugate point に関する最適性必要条件を与えられている。この generalized conjugate point は それらの 3 つの強い仮定 (strengthened Legendre condition, strengthened normality conditions) を満たさなくても取り扱うことができる。勿論、それらの仮定の元では conjugate point は generalized conjugate point である。即ち、従来の conjugate point の定義が特殊な点を表すものであったために強い仮定をせざるをえなかったといえる。しかしながら Loewen らは generalized conjugate point を定義する際にある条件

を加えていない。これは、それらの強い仮定のもとでは自動的に満たしている条件である。ここで、次の仮定をする。

Assumption A

$\bar{g}_{ju}(t)(j \in I(t)), \bar{h}_u(t)$ は $[0,T]$ 上 full rank を持つ。

但し、$I(t) = \{j | \bar{g}_j(t) = 0\}$

Theorem 1 (*Pontryagin's principle*) *Assumption A* を満たす (C) の弱極値 $(\bar{x}, \bar{u})$ に対し次の条件を満たす

$(p, \lambda, \lambda_0, \gamma) \in AC([0,1]; R^n) \times L_\infty([0,1]; R^s) \times R \times R^r$ が存在する。

$$\begin{array}{ll} (a) & \lambda_0 \geq 0, \lambda_0 + ||\gamma|| + ||\lambda||_\infty \neq 0 \\ (b) & -\dot{p} = \bar{H}_x, \quad \dot{\bar{x}} = \bar{H}_p \\ (c) & p(T)^* = \gamma^* \nabla \bar{k}(T) + \lambda_0 \nabla \bar{l}(T) \\ (d) & Min\{\lambda_0 L(t, \bar{x}, u) + p^* f(t, \bar{x}, u) | u \in U, ||u - \bar{u}(t)|| < \varepsilon\} \\ & \qquad = \lambda_0 \bar{L} + p^* \bar{f} \ \ on\ [0,T] \end{array}$$

但し、$H = \lambda_0 L(t,x,u) + p(t)^* f(t,x,u) + \mu(t)^* h(u) + \lambda(t)^* g(u)$

この λ に対し、$D(t) := \{j \in I(t) | \lambda(t) > 0\}, {}^{\exists}\bar{I}(t) \subset I(t)$ とし、次の admissible direction を考える。

$$V(t) := \left\{ \begin{array}{ll} v \in R^m & |\bar{h}_u(t) = 0, \ \bar{g}_{ju}(t)v = 0, \ \ j \in D(t) \\ & |\bar{g}(t) + \bar{g}_{ju}(t)v \leq 0, \ \ j \in \bar{I}(t) \backslash D(t) \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{V} := \{\alpha v | \alpha \geq 0, v(t) \in V(t)\}$$

ここで、$\mathcal{V}$ は $\bar{I}(t)$ のとりかたによるが、例えば区分的に定数値をとる u に対しては、$\bar{I}(t) = I(t)$ ととれる。[1]

Theorem 1 の (d) より、次の条件を得ることができる。

$$\begin{array}{ll} (d') & \bar{H}_u = 0 \ \ a.e.[0,T] \\ & w^T \bar{H}_{uu}(t) w \geq 0 \text{ for all } w \text{ satisfying } \bar{h}_u(t)w = 0, \ \bar{g}_{ju}(t)v \leq 0 \ (j \in I(t)) \end{array}$$

Definition 1 *Theorem*1 の条件 $(a), (b), (c), (d')$ を満たす$\lambda_0, p, \gamma, \lambda$ が存在する許容曲線 $(\bar{x}, \bar{u})$ を *extremal* と呼ぶ。

Definition 2 次の条件を満たす関数 p は $p \equiv 0$ だけであるとき *extremal* $(\bar{x}, \bar{u})$ は $[0,T]$ 上 $\nabla\bar{k}(T)$*-controllable* ($[0,T]$ 上 *strongly normal*) であるという。

$$
\begin{aligned}
&-\dot{p}(t) = \bar{f}_x(t)^* p(t) \\
&p(T) = \nabla\bar{k}(T)^* r, \ {}^\exists r \in R^r \\
&p(t)^* \bar{f}_u(t) v(t) = 0 \ \textit{for all } v \textit{ satisfying } v \in \mathcal{V} \textit{ on } [\prime, T]
\end{aligned}
$$

特に問題 (C) の解 $(\bar{x}, \bar{u})$ が $[0,T]$ 上 $\nabla\bar{k}(T)$-controllable であれば Theorem 1 において $\lambda_0 \neq 0$ とできる。

Definition 3 以下の条件を満たす関数が存在するとき $\tau \in [0,T)$ を T の *generalized conjugate point* と呼ぶ。

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad {}^\exists(y,q,v) \in AC \times AC \times \mathcal{V}, \quad \underline{y \not\equiv 0 \ on \ [\tau, T]} \\
&\quad s.t. \quad \dot{y} = \bar{f}_x y + \bar{f}_u v, \quad y(\tau) = \nabla\bar{k}(T) y(T) = 0, \\
&\qquad\quad -\dot{q} = \bar{f}_x^* q + \bar{H}_{xx} y + \bar{H}_{xu} v \\
&\qquad\quad q(\tau) \neq 0, \quad q(T) = \{\nabla^2 \bar{l}(T) + \gamma^* \nabla^2 \bar{k}(T)\} y(T) + {}^\exists\, l^* \nabla\bar{k}(T) \\
&\qquad\quad < \bar{f}_u^* q + \bar{H}_{xu} y + \bar{H}_{uu} v, v > \leq 0 \quad on \ [\tau, T]
\end{aligned}
$$

(ii) (i) で存在する関数 (y,q,v) に対し次のいずれかの条件を満たす。

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad {}^\exists M \subset [0,T], \ \mu(M) > 0 \\
&\qquad\qquad s.t. < \bar{f}_u^* q + \bar{H}_{xu} y + \bar{H}_{uu} v, v > < 0 \ on \ M \\
&(b) \quad {}^\exists(\bar{y}, \bar{v}) \in AC \times \mathcal{V} \\
&\qquad s.t. \dot{\bar{y}} = \bar{f}_x \bar{y} + \bar{f}_u \bar{v}, \ \bar{y}(0) = \nabla\bar{k}(T) \bar{y}(T) = 0, \ \bar{y}(\tau)^* q(\tau) < 0 \\
&\qquad\quad < \bar{f}_u^* q + \bar{H}_{xu} y + \bar{H}_{uu} v, \bar{v} > \leq 0 \quad on \ [0,T]
\end{aligned}
$$

Theorem 2 コントロール領域 U が 凸で与えられているとする。このとき区分的に滑らかな解$\bar{x}$、区分的に連続な解 $\bar{u}$ が、*Assumption A* を満たし、$[0,T]$ 上 $\nabla\bar{k}(T)$*-controllable* であれば $(0,T)$ 上 *generalized conjugate point* が存在しない。

Loewen らは generalized conjugate point を定義する際に、(i) において条件 $y \not\equiv 0$ on $[\tau, T]$ を加えていなかった。この条件がないと最適解に対しても generalized conjugate point が存在することがある。これは、3つの強い仮定 (strengthened Legendre condition, $[0,t], [t,T]$($^\forall t \in [0,T]$ 上strengthened normality condition) のもとでは自動的に満たしている条件である。

Example 2

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \textstyle\int_0^1 \{\frac{1}{2} x u_1^2\} dt \\
\text{subject to} \quad & \dot{x} = -u_1 + u_2, \\
& x(0) = 0, u_2 \geq u_1
\end{aligned}
$$

$\dot{x} = u_2 - u_1 \geq 0$ より x は単調増加であり、かつ $x(0) = 0$ であるので $x \geq 0$ 即ち

$$\int_0^1 \{\frac{1}{2}xu_1^2\}dt \geq 0$$

よって $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{x}) = (1, 1, 0)$ は、この問題の解である。今、$f = -u_1 + u_2$, $H = p(-u_1 + u_2) + \frac{1}{2}xu_1^2 + \lambda(u_1 - u_2)$ より

$$\bar{f}_x = 0,\ \bar{f}_u = (-1, 1),\quad \bar{H}_{xx} = \bar{H}_{uu} = 0,\quad \bar{H}_{xu} = (1, 0)$$

ところで、この問題の解 $(\bar{u}, \bar{x})$ に対し、$(y, q, v) = (0, t-1, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix})$ は以下の式を満たす。

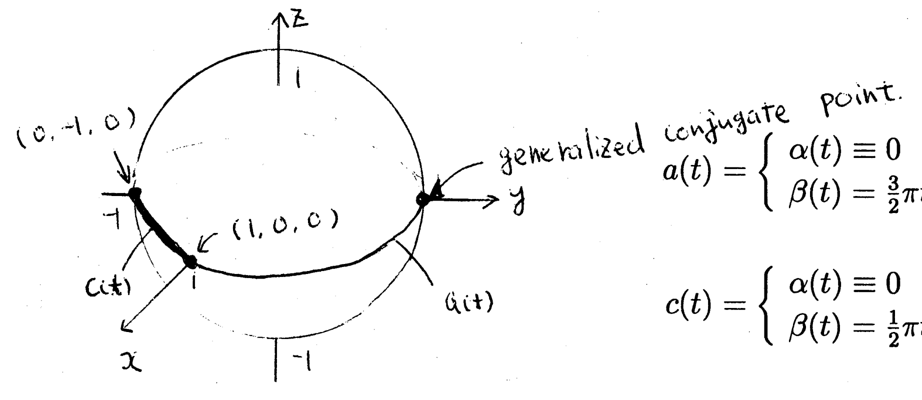
$$\begin{aligned} &\dot{y} = \bar{f}_x y + \bar{f}_u v,\quad y(\tfrac{1}{2}) = 0,\quad q(\tfrac{1}{2}) \neq 0, \\ &-\dot{q} = \bar{f}_x^* q + \bar{H}_{xx} y + \bar{H}_{xu} v \\ &< \bar{f}_u^* q + \bar{H}_{xu} y + \bar{H}_{uu} v, v > \leq 0 \ \text{ on } [\tfrac{1}{2}, 1] \end{aligned}$$

この q に対し、$(\bar{y}, \bar{v}) = (t, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ は以下の式を満たす。

$$\begin{aligned} &\dot{y} = \bar{f}_x \bar{y} + \bar{f}_u \bar{v}, \bar{y}(0) = 0,\ \bar{y}(\tfrac{1}{2})^* q(\tfrac{1}{2}) < 0 \\ &< \bar{f}_u^* q + \bar{H}_{xu} y + \bar{H}_{uu} v, \bar{v} > \leq 0 \end{aligned}$$

この例でもわかる様に、generalized conjugate point の定義の (i) において $y \not\equiv 0$ on $[\tau, T]$ は必要である。即ち、最適解に対しても $y \equiv 0$ on $[\tau, T]$ なる点 τ が存在することがある。

再び、Example 1 を考える。下の図の曲線 $c(t)$ は最適解であるが、曲線 $a(t)$ は最適解ではない。



$$a(t) = \begin{cases} \alpha(t) \equiv 0 \\ \beta(t) = \frac{3}{2}\pi t \end{cases}$$

$$c(t) = \begin{cases} \alpha(t) \equiv 0 \\ \beta(t) = \frac{1}{2}\pi t \end{cases}$$

曲線 $a(t)$, $b(t)$ は共に Euler equation Legendre condition は満している。しかしながら、$a(t)$ は generalized conjugate point $t = \frac{1}{3}$ を持つが、曲線 $c(t)$ は $(0, 1)$ 上 generalized conjugate point は持たない。

即ち、曲線 $a(t)$ に対し $x := (\alpha, \beta), u := (\dot{\alpha}, \dot{\beta})$ とおくと、

$$\bar{H}_{xx} = \begin{pmatrix} \frac{-3\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{H}_{xu} = 0, \quad \bar{H}_{uu} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3\pi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より、次の曲線

$$(y, q, v) = (\begin{pmatrix} \sin\frac{3\pi}{2}(1-t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{2}(1-t) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2}(1-t) \\ 0 \end{pmatrix})$$

は以下の式 (generalized conjugate point の条件 (i)) を満たす。

$$\begin{aligned}
&\dot{y} = \bar{f}_x y + \bar{f}_u v = v, \quad y(\tfrac{1}{3}) = y(1) = 0 \\
&q(\tfrac{1}{3}) = -1 \neq 0, \quad q(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \nabla\bar{k}(1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&-\dot{q} = \bar{f}_x^* q + \bar{H}_{xx} y + \bar{H}_{xu} v \\
&q^T \bar{f}_u v + v^T \bar{H}_{xu} y + v^T \bar{H}_{uu} v = q_1 v_1 + q_2 v_2 + \frac{v_1^2(t)\sin^2\beta(t)}{\dot{\beta}(t)} \\
&\quad = v_1\{\tfrac{2}{3\pi} v_1 + q_1\} = 0
\end{aligned}$$

この関数 q に対し曲線 $(\bar{y}, \bar{v}) = (\begin{pmatrix} \sin\pi(1-t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\pi\cos\pi(1-t) \\ 0 \end{pmatrix})$ は以下の式 (generalized conjugate point の条件 (ii) の (b)) を満たす。

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{y}} = \bar{f}_x \bar{y} + \bar{f}_u \bar{v} = \bar{v}, \quad \bar{y}(0) = \bar{y}(1) = 0, \quad y(\tfrac{1}{3})^* q(\tfrac{1}{3}) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} < 0 \\
&< \bar{f}_u^* q + \bar{H}_{xu} y + \bar{H}_{uu} v, \bar{v} >= \bar{v}_1\{q_1 + \tfrac{2}{3\pi} v_1\} = 0 \quad \text{on } [0,1]
\end{aligned}$$

よって、曲線 $a(t)$ は Example 1 の最適解ではない。

もし、control 領域が等式 $U = \{u | h(t) = 0\}$ により与えられた最適制御問題 (C) の弱極値 $(\bar{x}, \bar{u}) \in AC([0,T]; R^n) \times L_\infty([0,T]; R^n)$ に対しは、次のより弱い仮定 Assumption B のもとで generalized conjugate point に関する最適性必要条件を与える事ができる。

Assumption B

(i) $\nabla\bar{k}(T)$: は full rank を持つ

(ii) $\bar{h}_u(t)\bar{h}_u(t)^*$: $[0,T]$ 上正則。

Theorem 3 コントロール領域が等式 $U = \{u | h(u) = 0\}$ により与えられたとする。このとき (C) の解 $(\bar{x}, \bar{u})$ において *Assumption B* を満たし、$[0,T]$ 上 $\nabla\bar{k}(T)$*-controllable* であるとする。このとき、$(0,T)$ 上 *generalized conjugate point* が存在しない。

Example 3

$$\begin{array}{rl} \text{Minimize} & \int_0^1 \{u_1 + xu_2\} dt \\ \text{subject to} & \dot{x} = u_1 + u_2, \\ & x(0) = \frac{1}{2},\ x(1) = \frac{3}{2},\ u_1 u_2 = 0 \end{array}$$

$$\bar{u}_1 = \begin{cases} 1 & \text{on } [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{on } (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \bar{u}_2 = \begin{cases} 0 & \text{on } [0, \frac{1}{2}] \\ 1 & \text{on } (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \bar{x} = t + \frac{1}{2}$$

に対し、

$$\bar{h}_u = (\bar{u}_2, \bar{u}_1) = \begin{cases} (0,1) & \text{on } [0, \frac{1}{2}] \\ (1,0) & \text{on } (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

であるので

$$\bar{h}_u \bar{h}_u^* = \begin{cases} (0,1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 & \text{on } [0, \frac{1}{2}] \\ (1,0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 & \text{on } (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

即ち、$[0,1]$ 上 $\bar{h}_u \bar{h}_u^*$ は正則。また、この問題のハミルトン関数は

$$H = p(u_1 + u_2) + u_1 + xu_2 + \lambda u_1 u_2$$

また、関数

$$p = \begin{cases} -1 & \text{on } [0, \frac{1}{2}] \\ -t - \frac{1}{2} & \text{on } (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \lambda = \begin{cases} -t + \frac{1}{2} & \text{on } [0, \frac{1}{2}] \\ t - \frac{1}{2} & \text{on } (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \nu = -\frac{3}{2}$$

は以下の式を満たすので、$(\bar{x}, \bar{u})$ は extremal。

$$\begin{cases} -\dot{p} = \bar{H}_x = \bar{u}_2, \quad p(1) = \nu \\ 0 = \bar{H}_{u_1} = p + 1 + \lambda \bar{u}_2 \\ 0 = \bar{H}_{u_2} = p + x + \lambda \bar{u}_1 \end{cases}$$

しかしながら generalized conjugate point が存在するので、$(\bar{x}, \bar{u})$ は解ではない。即ち、

$$\bar{f}_x = 0,\ \bar{f}_u = (1,1),\ \bar{H}_{xx} = \bar{H}_{uu} = 0,\ \bar{H}_{xu} = (0,1)$$

より、

$$y = \begin{cases} 2t - \frac{1}{2} & \text{on } [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ -t + 1 & \text{on } (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, q = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{on } [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ t - 1 & \text{on } (\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

$$v_1 = \begin{cases} 2 & \text{on } [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{on } (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, v_2 = \begin{cases} 0 & \text{on } [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ -1 & \text{on } (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

は以下の式 (generalized conjugate point の (i) 及び (ii) の (a)) を満たすので、$t=\frac{1}{4}$ は generalized conjugate point

$$\begin{aligned}
&\dot{y}=\bar{f}_x y+\bar{f}_u v,\quad y(\tfrac{1}{4})=0,\quad q(\tfrac{1}{4})\neq 0,\\
&-\dot{q}=\bar{f}_x^* q+\bar{H}_{xx}y+\bar{H}_{xu}v\\
&<\bar{f}_u^* q+\bar{H}_{xu}y+\bar{H}_{uu}v, v>\begin{cases}<0 & \text{on } [\frac{1}{4},\frac{1}{2}]\\ =0 & \text{on } (\frac{1}{2},1]\end{cases}
\end{aligned}$$

generalized conjugate point $t=\frac{1}{4}$ が存在するので、$(\bar{x},\bar{u})$ は解ではない。

参考文献

[1] P. D. Loewen and H. Zheng, "Generalized conjugate points for optimal control problems", *Nonlinear Anal., Theory, Methods and Appl.*, 22, (1994) pp,771–791

[2] V.Zeidan and P.Zezza, "The conjugate point condition for smooth control sets", *J. Math. Anal. Appl.*, 132 (1988), pp.572–589

[3] V.Zeidan and P.Zezza, "Necessary conditions for optimal control problems : conjugate points", *SIAM J.Contr. Optim.*, 26, (1988), pp.592–608

[4] V.Zeidan and P.Zezza, "Conjugate points and optimal control : counter-examples, *IEEE Trans. Auto. Contr.* 34, (1989) pp.254–256