数理解析研究所講究録
981 巻 1997 年 180-192



# A duality classification for max-flow min-cut problems of Strang and Iri

Ryôhei Nozawa
札幌医科大学医学部　野澤 亮平

## 1. Introduction

連続型最大流最小切断問題の Strang [12] および伊理 [4] による定式化は, ともに, 離散ネットワーク上の問題を $R^n$ の領域 $\Omega$ へ拡張したもので, 無限次元空間上の凸計画問題とその双対問題の例である。これらの問題では, 流れ (Flow) として, 本質的に有界なベクトル場で発散が $L^n(\Omega)$ に含まれるものを考え, 切断 (Cut) として, その特性関数が有界変動の関数となる $\Omega$ の部分集合を考えることによって, 有界で連続な容量の制約下では厳密な意味で最大流最小切断定理が証明できる。

一方, 非有界な容量の制約下では duality gap が起こり得る, すなわち, 最大流最小切断定理が成り立たないことがある。一般の凸計画問題に対して, duality gap を埋めるために Duffin, Ben Israel, Charnes, Kortanek らは asymptotic dual を導入した。asymptotic dual を用いた duality の詳細な分類は [7] にまとめられている。そこで, この分類を応用して, 連続型最大流最小切断問題の duality について, 起こり得る場合を検討し, それぞれの場合に当てはまる例を示したい。なお, 本研究は Kortanek 氏との共同研究であり, 詳細は [10] を参照されたい。

はじめに asymptotic dual を用いた凸計画問題の分類について述べる。局所凸 Hausdorff 空間 $X, Y$ の点 $x \in X$, $y \in Y$ に対して定義される 2 変数の下半連続, proper な凸関数 $G(x,y)$ とその共役 $G^*(u,v)$ を考える ($u, v$ はそれぞれ $X, Y$ の双対空間 $X^*, Y^*$ の要素)。$h(u) = \inf_{v\in Y^*} G^*(u,v)$ とおくとき, Rockafellar の双対定理により, $h(u)$ の下半連続 regularization を $\tilde{h}(u)$ とすると, $\tilde{h}(0) = \sup_{x\in X} -G(x,0)$ である。今, 主問題 $(P)$ が $\sup_{x\in X} -G(x,0)$, 双対問題 $(P^*)$ が $\inf_{v\in Y^*} G^*(0,v)$ の形で表されるとき, $\tilde{h}(0)$ を値とする最適問題を考え, これを $(P^*)$ の asymptotic problem と定義する。

以下, $(P^*)$ の分類について概略を述べよう。まず, $(P^*)$ の許容解を $v \in \operatorname{dom} G^*(0,\cdot)$ と考えて, 許容解が存在するとき **CONS**istent, 存在しないとき **INC**onsistent と呼ぶ。さらに, asymptotic problem の許容解は $\lim_i u_i = 0$ を満たす ネット $\{u_i, v_i\} \subset \operatorname{dom} G^*$ と定義し, それが存在するとき, $(P^*)$ は **AC**, 存在しないとき **SINC** であるという。この, AC はさらに 2 通りに分類される: $\tilde{h}(0) < \infty$ のとき **PAC**, $\tilde{h}(0) = \infty$ のとき **IAC** と呼ぶ。さらに補助的な問題 (Homogenized program) を定義して, その feasibility から**HCONS**, **HINC**, **HSINC** などの分類を加える。以上の分類は, 主問題についても同様に定義できる。

feasibility に関する以上の分類と, 問題の値が有限か無限かを考慮して, 主問題と双対問

題の関係で起こり得る場合をまとめた表が [7] にある。関係する部分を抜き出して得られる表をこの節の最後に Table として掲げる。

次に Strang の問題の定義を述べる。$\Omega$ を Lipschitz 連続な境界 $\partial\Omega$ をもつ $R^n$ の 有界領域とし, $F \in L^n(\Omega), f \in L^\infty(\partial\Omega)$ は流れの発散を制約する関数で

$$\int_\Omega F dx + \int_{\partial\Omega} f ds = 0$$

を満たすものとする。これは Strang が保存則と呼んだ関係式で, このときに限り実質的な流れが存在するので, これを仮定しても一般性を失わない。さらに流れの容量制約を表す $\Omega$ から $R^n$ への集合値写像 $\Gamma$ を考える。任意の $x \in \Omega$ に対して $\Gamma(x)$ は $R^n$ の原点中心の球を含む compact 凸集合であるとし, $\Gamma$ は Hausdorff の距離に関して連続であるとする。このとき, Strang の最大流問題は

$$\begin{array}{ll} (MF) & \text{Maximize } \lambda \\ & \text{subject to } \lambda \geq 0,\ \sigma \in L^\infty(\Omega; R^n),\ \sigma(x) \in \Gamma(x) \quad \text{for a.e. } x \in \Omega, \\ & \operatorname{div} \sigma = -\lambda F \quad \text{a.e. on } \Omega \text{ and } \sigma \cdot \nu = \lambda f \quad s\text{–a.e. on } \partial\Omega \end{array}$$

と表される。ただし $\sigma \cdot \nu$ は $\sigma$ の $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線方向の成分であるが, 関数空間の取り方から察せられるように, 通常の意味でなく, 弱い意味で考える。正確な定義は [6, 9] を参照せよ。

一方, $\Omega$ 上の有界変動関数の全体 $BV(\Omega)$ を

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega);\ \nabla u \text{ is a Radon measure of bounded variation on } \Omega\},$$

で定義し,

$$Q = \{S \subset \Omega;\ \chi_S \in BV(\Omega)\}$$

とおく。ただし, $\nabla u = (\partial u/\partial x_1, \cdots, \partial u/\partial x_n)$ は超関数の意味で考え, $\chi_S$ は $S$ の特性関数である。このとき, $u \in BV(\Omega)$ に対して $\partial\Omega$ 上の trace $\gamma u$ が $L^1(\partial\Omega)$ として定まり, また, $u \in L^{n/(n-1)}(\Omega)$ でもあるので $L(u) = \int_\Omega Fu dx + \int_{\partial\Omega} f\gamma u ds$ とおくことができる。$(MF)$ の定義に用いた $L^\infty(\Omega; R^n)$, $L^n(\Omega)$, $L^\infty(\partial\Omega)$ は $BV(\Omega)$ との関係から採用されたものである。

さて, $S \in Q$ を切断とみなすのであるが, その cut capacity を定義するために $v \in R^n$ に対して $\beta(v, x) = \sup_{w \in \Gamma(x)} v \cdot w$ とおき, $\nabla u$ の $|\nabla u|$ に関する Radon-Nikodym derivative を $\nabla u/|\nabla u|$ として $u \in BV(\Omega)$ に対して

$$\psi(u) = \int_\Omega \beta(\nabla u/|\nabla u|, x) d|\nabla u|(x)$$

とおく。このとき $S$ の cut capacity $C(S)$ を $C(S)=\psi(\chi_S)$ で定義する。これは $\partial S$ が滑らかならば $\partial S\cap\Omega$ 上の $\beta(-\nu,\cdot)$ の積分であり, $\Gamma(x)$ が非負連続関数 $c(x)$ を用いて

$$\Gamma(x)=\{w\in R^n\ ;\ |w|\le c(x)\} \tag{1}$$

と表されるときは $c(x)$ の積分である。この論文中で示される例はすべてこの場合である。以上の準備のもとに最小切断問題は次のように述べられる:

$$(MC)\qquad \text{Minimize } C(S)/L(\chi_S)$$
$$\text{subject } S\in Q \text{ and } L(\chi_S)>0$$

$(MF)$ は凸計画問題である。また, $(MC)$ の定義中の特性関数を通常の関数族で置き換えることにより, $(MC)$ と同値な凸計画問題が導かれる。そこで, $(MF)$ を主問題とし, その双対問題と $(MC)$ が(同値と)なるような 2 変数の凸関数 $G(\cdot,\cdot)$ を考えることができる。$(MF)$ は常に $\lambda=0$ が許容解なので CONS に属する。一方, $(MC)$ についても, $(F,f)\neq(0,0)$ のときは必ず普通の意味の許容解をもつが, $(MF)$ を主問題として, 前項の設定に当てはまるような $G(\cdot,\cdot)$ をとって分類を行えば, $L(\chi_S)>0$ かつ $C(S)$ が有限となる $S$ を許容解と考える方が自然で, これにより CONS, INC の区別を行う (命題 2 を参照)。さらに, 先に述べたように AC,PAC,IAC,SINC,HCONS,HINC といった分類を加味した結果, $(MF)$ と $(MC)$ の duality で起こり得る場合というのは次の表の 1,5,7,8 で示される。なお, asymptotic problems や HCONS の定義など, 詳細は Appendix に述べることにする。

<table>
<tr><td colspan="7">INC</td><td colspan="4">CONS</td></tr>
<tr><td colspan="3" rowspan="2">SINC</td><td colspan="8">AC</td></tr>
<tr><td rowspan="2">IAC</td><td colspan="7">PAC</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">HAC</td><td rowspan="3">HSINC</td><td colspan="2">AUBD</td><td rowspan="2">ABD</td><td colspan="3">AUBD</td><td>ABD</td></tr>
<tr><td rowspan="2">HSINC</td><td colspan="2">HAC</td><td>HCONS</td><td colspan="2">HINC</td><td>HSINC</td></tr>
<tr><td>HCONS</td><td>HINC</td><td>HCONS</td><td>HINC</td><td>HSINC</td><td colspan="2">UBD</td><td colspan="2">BD</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>8</td><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>

Table: Duality States for Program $(P^*)$ with 0 Designating an Impossible State

## 2. Examples

この節では Table 中の 1,5,7,8 に属する例について述べる。まず 1 は $(MF)$, $(MC)$ の両方の値が有限の場合であるが, そのときも duality gap が起こり得ることはすでに [9] に示してある。8 の場合は, $(MF)$ が HCONS であることと $(F,f)=(0,0)$ であることが同値なので, $(F,f)=(0,0)$ 場合と一致する。7 の場合は両者とも $\infty$ の場合であるが, $\sup(MF)=\infty$ であれば自動的に $\inf(MC)=\infty$ となるので, そのような例を作るのは容易である。たとえば次の例では具体的に流れ $\sigma$ の列を与えて $\sup(MF)=\infty$ を見ることができる:

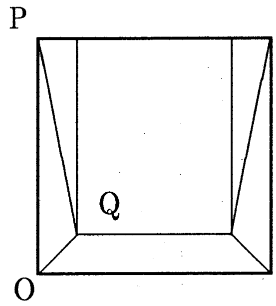


図 1: Example 1

**EXAMPLE 1.** $n=2$, $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ とし, $\Omega$ 上で恒等的に $F=0$ とする。また, $A=\{0\}\times(0,1)$, $B=\{1\}\times(0,1)$ とし, $A$ 上 $f=1$, $B$ 上 $f=-1$ , $\partial\Omega-(A\cup B)$ 上 $f=0$ とする。さらに

$$c(x_1,x_2)=1+(1/x_1^2+1/(1-x_1)^2)(1/x_2^2) \tag{2}$$

とおくと, (1) で与えられる $\Gamma$ に対して $\sup(MF)=\infty$ であることを示そう。

いま, $0<\epsilon<1/2$ とし, $\sigma_\epsilon$ を次のように定める: $E$ を 3 点 O(0,0), P(0,1), Q$(\epsilon,\epsilon)$ を頂点とする三角形の領域（図 1 を参照）として $E$ 上$\sigma_\epsilon(x_1,x_2)=(-\epsilon,1-\epsilon)$ とおく。また, $(1,1)$, $(1,0)$, $(1-\epsilon,\epsilon)$ を頂点とする三角形の領域で$\sigma_\epsilon(x_1,x_2)=(-\epsilon,-1+\epsilon)$ とおく。さらに 4 点 O, Q, $(1-\epsilon,\epsilon)$, $(1,0)$ を頂点に持つ台形の領域で $\sigma_\epsilon(x)=(-1,0)$ とおき, $\Omega$ のその他の部分で $\sigma_\epsilon=(0,0)$ とおけば $\operatorname{div}\sigma=0$ で $\sigma_\epsilon\cdot\nu=\epsilon f$ が成り立つ。

$\Omega_\epsilon=(\epsilon,1-\epsilon)\times(\epsilon,1)$ とすると $\inf_{\Omega-\Omega_\epsilon}c(x_1,x_2)\geq\epsilon^{-2}$ だから, $\epsilon^{-2}\sigma_\epsilon$ は許容流で $\sup(MF)\geq\epsilon^{-1}$ が得られる。$\epsilon\to0$ として $\sup(MF)=\infty$ がわかる。

最後に 5 の場合であるが, これは $MF$ が有限で $MC$ が $\infty$ のときである。そのような例を示そう。

**EXAMPLE 2.** 伊理の問題に対して示した [9] にある例を修正する。Example 1 と同じ $\Omega$, $F$, $f$ および $A=\{0\}\times(0,1)$, $B=\{1\}\times(0,1)$ を用いる。$c(x_1,x_2)$ を定義するために, $\Omega$ の部分集合をいくつか考える。$k=3,4,\ldots$ として

$$\begin{aligned}F_k &= [2\cdot2^{-k}+2^{-k-2},3\cdot2^{-k}-2^{-k-2}]\times[2\cdot2^{-k}+2^{-k-2},1),\\ G_k &= [2\cdot2^{-k},3\cdot2^{-k}]\times[2\cdot2^{-k},1)\end{aligned}$$

とおく。($G_k$ については図 2 を参照。また $F_k\subset G_k$ である。) $h(x)$ は $\Omega$ 上 $0\leq h\leq1$ を満たす連続関数で, $\cup_{k=3}^{\infty}F_k$ 上 $h(x)=0$ , $\Omega-\cup_{k=3}^{\infty}G_k$ 上 $h(x)=1$ とし,

$$c(x_1,x_2)=1+h(x_1,x_2)(1/x_1^2+1/(1-x_1)^2)(1/x_2) \tag{3}$$

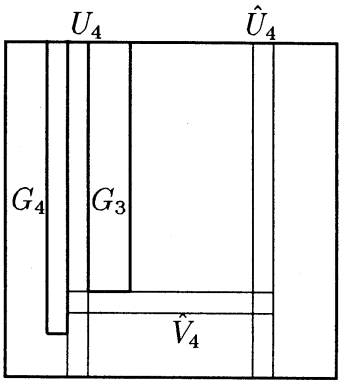


図 2: Example 2

とおく。このとき (1) で与えられる $\Gamma$ を考えると, 次の定理が成り立つ。

**定理 1** 上に述べた $\Omega, F, f, c, \Gamma$ に対応する $(MF), (MC)$ に対して $a_1 = \sup(MF)$, $b_1 = \inf(MC)$ とおくと $a_1 = 1$, $b_1 = \infty$ が成り立つ。

**証明** $\sigma = (-1, 0)$ は 許容流だから, $a_1 \geq 1$ である。自然数 $n$ に対して $c_n(x) = \min(c(x), n)$ とおくと, [9, Lemma 3.4] と同様の方法で $a_1 = 1$ が証明できる。

従って $b_1 = \infty$ を証明すればよい。そのためには

$$\int_{\partial\Omega\cap\partial^*S} f(x)dH_1(x) > 0 \tag{4}$$

を満たす任意の $S \in Q$ に対して

$$C(S) = \int_{\Omega\cap\partial^*S} c(x)dH_1 = \infty$$

を証明すれば十分である。[9] と同様に, $k \geq 3$ に対して $U_k = (3 \cdot 2^{-k}, 4 \cdot 2^{-k}) \times (0, 1)$ とおく。$(x_1, x_2) \in U_k$, $k \geq 3$ のとき, $c(x_1, x_2) = 1 + (1/x_1^2 + 1/(1-x_1)^2)(1/x_2) \geq 1/(x_1^2 x_2)$ である。

いま $S \in Q$ は (4) を満たすと仮定する。もし 無限個の $k$ に対して $H_1(\partial^*S \cap U_k) \geq 2^{-2k}b$ を満たすような $b > 0$ があれば [9, Lemma 3.6] で示したようにして, $C(S) = \infty$ が得られる。

従って任意の $b > 0$ に対して $H_1(\partial^*S \cap U_k) < 2^{-2k}b$ が有限個の $k$ を除いて成り立つとしてよい。[9, Lemma 3.5] によって, そのような $k$ については

$$\min(m_2(U_k \cap S), m_2(U_k - S)) \leq 2^k \cdot \kappa \cdot 2^{-4k}b^2 = 2^{-3k}\kappa b^2$$

が成り立つ。ただし $m_2$ は 2-次元 Lebesgue 測度を表すとし, $\kappa$ は $k$ に無関係な正の定数である。しかし, ある $b > 0$ に対して $m_2(U_k \cap S) \leq 2^{-3k}\kappa b^2$ が無限個の $k$ について成り立

つときは, [9, Lemma 3.6] のようにして $H_1(A\cap\partial^*S)=0$ が示され, これは (4) によって $\int_{A\cap\partial^*S}f(x)dH_1(x)>0$ でなければならないことに反する。従って, 有限個の $k$ をぞいて

$$m_2(U_k-S)\le 2^{-3k}\kappa b^2 \tag{5}$$

が成り立つとしてよい。

$U_k$ と対称に $\hat{U}_k=(1-4\cdot 2^{-k},1-3\cdot 2^{-k})\times(0,1)$ とおく。同様に

$$\min(m_2(\hat{U}_k\cap S),m_2(\hat{U}_k-S))\le 2^{-3k}\kappa b^2$$

と仮定してよいことがわかる。さらにもし無限個の $k$ に対して $m_2(\hat{U}_k-S)\le 2^{-3k}\kappa b^2$ ならば

$$H_1(B\cap\partial^*(\Omega-S))=H_1(B-\partial^*S)=0$$

が証明でき, これはやはり (4) に反するので

$$m_2(\hat{U}_k\cap S)\le 2^{-3k}\kappa b^2 \tag{6}$$

が有限個の $k$ をのぞいて成り立つと仮定してよい。

ゆえに, (5) と (6) を満たす $S\in Q$ に対して $C(S)=\infty$ を証明する。$k\ge 3$ に対し

$$\hat{V}_k=(3\cdot 2^{-k},1-3\cdot 2^{-k})\times(3\cdot 2^{-k},4\cdot 2^{-k})$$

とおく ( 図 2 を参照)。このとき

$$\begin{aligned} m_2(U_k\cap\hat{V}_k\cap S) &= m_2(U_k\cap\hat{V}_k)-m_2(U_k\cap\hat{V}_k-S)\\ &\ge 2^{-2k}(1-2^{-k}\kappa b^2)\end{aligned}$$

および

$$m_2((\hat{U}_k\cap\hat{V}_k)\cap S)\le m_2((\hat{U}_k\cap S)\le 2^{-3k}\kappa b^2$$

が十分大きい $k$ で成り立つ。一方 Fubini の定理 と [9, Lemma 3.7] によって 2 直線 $l_k:x_1=t_k$ と $\hat{l}_k:x_1=\hat{t}_k$ で

$$\begin{aligned} H_1(l_k\cap S) &= H_1(l_k\cap\partial^*\hat{S}_k)\ge 2^{-k}(1-2^{-k}\kappa b^2),\\ H_1(\hat{l}_k\cap S) &= H_1(\hat{l}_k\cap\partial^*\hat{S}_k)\le 2^{-2k}\kappa b^2,\end{aligned}$$

$$3\cdot 2^{-k}<t_k<4\cdot 2^{-k},\quad 1-4\cdot 2^{-k}<\hat{t}_k<1-3\cdot 2^{-k}$$

を満たすものがある。ただし $\hat{S}_k=\{x=(x_1,x_2)\in\hat{V}_k\cap S;\ t_k<x_1<\hat{t}_k\}$ である。いま

$$\hat{\gamma}_k=\{x=(x_1,x_2)\in\partial^*\hat{S}_k\cap\hat{V}_k;\ t_k<x_1<\hat{t}_k\}.$$

とおけば $\hat{\gamma}_k \subset \partial^* S$ が成り立つ。$\hat{S}_k$ の Federer の normal を $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ で表せば Green の公式により,

$$\int_{\hat{V}_k \cap \partial^* \hat{S}_k} -\nu_1 dH_1 = \int_{\partial^* \hat{S}_k} -\nu_1 dH_1 = 0$$

であるから

$$\begin{aligned} H_1(\hat{\gamma}_k) &\geq \int_{\hat{\gamma}_k} \nu_1 dH_1 = -\int_{l_k \cap \partial^* \hat{S}_k} \nu_1 dH_1 - \int_{\hat{l}_k \cap \partial^* \hat{S}_k} \nu_1 dH_1 \\ &= H_1(l_k \cap \partial^* \hat{S}_k) - H_1(\hat{l}_k \cap \partial^* \hat{S}_k) \\ &\geq 2^{-k}(1 - 2^{-k}\kappa b^2) - 2^{-2k}\kappa b^2 = 2^{-k} \end{aligned}$$

となり, 従って

$$C(S) = \int_{\Omega \cap \partial^* S} c(x) dH_1(x) \geq \sum_k \int_{\hat{\gamma}_k} c dH_1 \geq \sum_k (4 \cdot 2^{-k})^{-1} \cdot 2^{-k} = \infty$$

である。ここで, 和は十分大きいすべての $k$ について取るものとする。

## 3. Appendix

この節では流れや切断の空間に位相を考えて, asymptotic problems を定義し, PAC, IAC, HCONS について, より詳しく説明する。

$\Omega, F, f$ は第1節で述べたものとし, 実線形空間 $X, Y$ を

$$\begin{aligned} X &= X_0 \times R = \{\sigma\ ;\ \sigma \in L^\infty(\Omega; R^n),\ \operatorname{div}\sigma \in L^n(\Omega)\} \times R, \\ Y &= \{(y_1, y_2)\ ;\ y_1 \in L^n(\Omega),\ y_2 \in L^\infty(\partial\Omega)\} \end{aligned}$$

とおく。$X_0$ では

$$\|\sigma\| = \|\sigma\|_\infty + \|\operatorname{div}\sigma\|_n$$

で定義されるノルムを考える。ただし $\|\sigma\|_\infty$ は $|\sigma|$ の $\Omega$ 上での本質的な上限で $\|\cdot\|_n$ は $L^n(\Omega)$ での通常のノルムである。このとき $X_0$ は Banach 空間になる。その双対空間を $X_0^*$ で表す。また $X$ 上では積位相を考えて, これも Banach 空間となり, その双対空間を $X^*$ で表す。$Y$ の位相を定義するために

$$W^{1,1}(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega);\ \nabla u \in L^1(\Omega; R^n)\}$$

とおく。このとき $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$ だから $W^{1,1}(\Omega) \subset L^{n/(n-1)}(\Omega)$ で, さらに Gagliardo [3] によって

$$\{\gamma u;\ u \in W^{1,1}(\Omega)\} = L^1(\partial\Omega)$$

である。$Y \times W^{1,1}(\Omega)$ 上の双線形形式

$$\langle (y_1, y_2), u \rangle = \int_\Omega y_1 u dx + \int_\Omega y_2 \gamma u dH_{n-1}$$

に関する弱位相を $Y$ の位相とする。

このとき $Y$ の双対空間 $Y^*$ は $W^{1,1}(\Omega)$ と同一視される。$\sigma \cdot \nu$ は §1 に述べたように弱い意味で定義される関数とし,

$$T(\sigma, \lambda) = (\operatorname{div} \sigma + \lambda F, -\sigma \cdot \nu + \lambda f)$$

によって $X$ から $Y$ への線形写像 $T$ を定義する。Green の公式

$$\int_\Omega \sigma \cdot \nabla u dx + \int_\Omega u \operatorname{div} \sigma dx = \int_{\partial\Omega} \gamma u \sigma \cdot \nu dH_{n-1} \tag{7}$$

が $\operatorname{div} \sigma \in L^n(\Omega)$ を満たす $\sigma \in L^\infty(\Omega; R^n)$ と $u \in W^{1,1}(\Omega)$ に対して成り立つので, $X$ と $Y$ の位相の定義から, $T$ は連続で, $T$ の共役写像 $T^*$ が $W^{1,1}(\Omega)$ から $X^*$ への写像として定義される。ところで Green の公式は, [6] により, $u \in BV(\Omega)$ に対しても

$$(\sigma \nabla u)(\Omega) + \int_\Omega u \operatorname{div} \sigma dx = \int_{\partial\Omega} \gamma u \sigma \cdot \nu dH_{n-1} \tag{8}$$

の形で成り立つ。ただし $(\sigma \nabla u)$ は $\Omega$ 上の有界な測度で [6] で述べられているものである。

次に $0_{X_0^*}$ を $X_0^*$ の原点とし, $e = (0_{X_0^*}, 1) \in X^*$ とおく。このとき $x \in X$, $x^* \in X^*$ に対して $x^*(x)$ を $\langle x, x^* \rangle$ で表すと

$$\langle (\sigma, \lambda), e \rangle = \lambda$$

である。さらに $0_Y$ を $Y$ の原点とし,

$$K_\Gamma = \{\sigma \in L^\infty(\Omega; R^n);\ \sigma(x) \in \Gamma(x) \text{ for a.e. } x \in \Omega\}$$

とするとき, $K = (K_\Gamma \times R) \cap X$ とおくと, これは凸集合である。$\operatorname{div} \sigma = -\lambda F$ かつ $\sigma \cdot \nu = \lambda f$ は $T(\sigma, \lambda) = 0_Y$ と同値であるから, $(X, Y, T, e, 0_Y, K)$ を用いて, $(MF)$ は次のように表せる:

$$(P) \qquad \begin{aligned} &\sup\ \langle (\sigma, \lambda), e \rangle \\ &\text{subject to } (\sigma, \lambda) \in K, \quad T(\sigma, \lambda) = 0_Y \end{aligned}$$

そして, その双対問題は

$$(P^*) \qquad \begin{aligned} &\inf\ \eta \\ &\text{subject to } u \in W^{1,1}(\Omega),\ \eta \in R^+ \text{ and} \\ &\langle (\sigma, \lambda), T^* u - e \rangle \geq -\eta \text{ for all } (\sigma, \lambda) \in K \end{aligned}$$

となる。ただし $R^+$ は 0 以上の実数全体である。この $(P^*)$ は形式的には有限次元の問題 (I), [1, page 678] から導くことができる。

$((X \times R) \times (Y \times R)) \times (Y \times R)$ 上の関数 $G((p,q),z)$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned} P_S &= \{(t(\sigma,\lambda),t);\ t \geq 0,\ (\sigma,\lambda) \in K\} \subset X \times R, \\ Q_S &= \{0\} \times \{0\} \subset Y \times R, \\ c_0 &= (e,0) \in X \times R, \\ d_0 &= (0_Y,1) \in Y \times R, \\ A_S((\sigma,\lambda),t) &= (T(\sigma,\lambda),t) \end{aligned}$$

とおき

$$\begin{aligned} G((p,q),z) &= \langle -(c_0,0),(p,q) \rangle \\ &\quad +\delta(\ (p,q) \mid (p,q) \in P_S \times Q_S,\ z \in Y \times R,\ [A_S, I] \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = d_0 + z). \end{aligned} \tag{9}$$

とする。ここで, $(X \times R) \times (Y \times R)$ の部分集合 $V$ に対して $(p,q) \in V$ のとき $\delta((p,q) \mid V) = 0$, $(p,q) \notin V$ のとき $\delta((p,q) \mid V) = \infty$ である。すると, $X' = (X \times R) \times (Y \times R)$, $Y' = (Y \times R)$ とおいて主問題 $(P)$ が $\sup_{x \in X'} -G(x,0)$, 双対問題 $(P^*)$ が $\inf_{v \in Y'^*} G^*(0,v)$ の形であることが確かめられるので §1 に述べた意味で asymptotic problem を考えることができる。

$(P^*)$ の許容解 $(u,\eta)$ が存在するとき $(P^*)$ は consistent であると言い。また, そうでないときは inconsistent と言う。それぞれ CONS, INC と略記する。我々の目的の一つは perfect duality となる $(MF)$ の双対問題, すなわち $\sup(MF)$ と等しい値をもつ問題, を求めることである。基本的な考え方は Richard J. Duffin [2] に拠っているが, 摂動 に基づいた凸計画問題への拡張が [11, 1, 5, 7] によって与えられている。それに従って $(P)$ の asymptotic problem を求めると次にようになる。

$$(AP) \qquad \mathrm{Sup}_{\{(\sigma_i,\lambda_i)_i \in AFP\}} \{\limsup_i \lambda_i\},$$

ここで $AFP$ は $(P)$ の **asymptotically feasible solutions** 全体で, 次のように与えられる:

$$\{\ (\sigma_i,\lambda_i)_i \subset K;\ \lim_i\ (\operatorname{div} \sigma_i + \lambda_i F, -\sigma_i \cdot \nu + \lambda_i f) = (0,0)\}$$

ただし, 極限は $Y$ の位相で取るものとする。$(P)$ 自身は consistent だから当然 asymptotically consistent でもあるが , $(AP)$ 自身にも興味がある。もし $(AP)$ が有限ならば, $(P)$ は

**asymptotically bounded** であるという。$Y$ の位相の定義により, $L^n(\Omega)$ と $L^\infty(\partial\Omega)$ の通常の*弱位相に関して $\operatorname{div}\sigma_i + \lambda_i F \to 0$ かつ $-\sigma_i \cdot \nu + \lambda_i f \to 0$ ならば $(\sigma_i, \lambda_i)_i \subset K$ は asymptotically feasible solution である。$AFP \neq \emptyset$ のとき $(P)$ は **asymptotically consistent**, AC, であると言い, そうでないとき **strongly inconsistent**, SINC と言う。SINC のとき $\sup(AP) = -\infty$ とみなす。

**命題 2** $\sup(AP) = \inf(P^*) = \inf(MC)$ が成り立つ。さらに, $(P^*)$ が *consistent* であるためには $C(S)$ が有限な許容切断 $S \in Q$ が存在することが必要十分である。

**証明** [2], [11, Corollary 30.2.2] により $\sup(AP) = \inf(P^*)$ である。

次に consistency について考える。$(u, \eta)$ を $(P^*)$ の許容解とする。Green の公式 (7) により

$$\begin{aligned}
&\langle(\sigma,\lambda), T^*u - e\rangle = \langle T(\sigma,\lambda), u\rangle - \langle(\sigma,\lambda), e\rangle \\
&= \int_\Omega (\operatorname{div}\sigma + \lambda F)udx + \int_{\partial\Omega}(-\sigma\cdot\nu + \lambda f)\gamma u dH_{n-1} - \lambda \\
&= \int_\Omega \operatorname{div}\sigma \cdot udx + \int_{\partial\Omega} -\sigma\cdot\nu\gamma u dH_{n-1} + \lambda\Big(\int_\Omega Fudx + \int_{\partial\Omega} f\gamma u dH_{n-1} - 1\Big) \\
&= -\int_\Omega \sigma\cdot\nabla udx + \lambda(L(u) - 1) \geq -\eta
\end{aligned}$$

がすべての $(\sigma, \lambda) \in K$ について成り立つ。

ゆえに $L(u) - 1 = 0$ で

$$\int_\Omega \sigma\cdot\nabla udx \leq \eta$$

がすべての $\sigma \in K_\Gamma \cap X_0$ に対して成り立つ。従って $(H1)$ と [8, Lemma 2.6] から

$$\psi(u) = \sup_{\sigma\in K_\Gamma}\int_\Omega \sigma\cdot\nabla udx = \sup_{\sigma\in K_\Gamma\cap X_0}\int_\Omega \sigma\cdot\nabla udx \leq \eta$$

が得られる。$u \in W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$ だから $u$ は $(MF^*)$ の許容解で $\inf(MC) = \inf(MF^*) \leq \inf(P^*)$ となる。

Green の公式 (8) を用いて, $\inf(MC) \geq \sup(AP)$ が容易に示されるので $\sup(AP) = \inf(P^*)$ から逆向きの不等式も証明できる。

最後に $\inf(MC) = \inf(P^*)$ によって $(P^*)$ が consistent であることと $C(S)$ が有限な $S \in Q$ が存在することが同値であることも示されるので証明が終わる。

この命題により, $C(S)$ が有限な $S \in Q$ が存在するとき $(MC)$ は consistent であると言うことにする。

次に $(P^*)$ に対応する $(AP^*)$ の asymptotic program について考えよう。**asymptotically feasible solutions** の全体 $AFAP^*$ を

$$\{\ (u_i, \sigma_i^*, \eta_i)_i \subset W^{1,1}(\Omega)\times X_0^*\times R;\ \lim_i\Big(\int_\Omega \sigma\cdot\nabla u_i dx + \langle\sigma,\sigma_i^*\rangle\Big) = 0 \text{ for each } \sigma\in X_0,$$

$$\text{and } L(u_i) \to 1,\ \langle \sigma, \sigma_i^* \rangle \geq -\eta_i \text{ for each } \sigma \in K_\Gamma \cap X_0 \ \}$$

として, $(AP^*)$ は次で定義される:

$$(AP^*) \qquad \inf_{\{(u_i,\sigma_i^*,\eta_i)_i \in AFAP^*\}} \{\liminf_i \eta_i\}$$

$\inf(AP^*)$ が有限のとき $(P^*)$ は **asymptotically bounded** であるという。また, $AFAP^* \neq \emptyset$ のとき $(P^*)$ は **asymptotically consistent** (AC) であるといい, $AFAP^* = \emptyset$ のとき **strongly inconsistent** (SINC) と言う。SINC のときは $\inf(AP^*) = +\infty$ と見なす。

さらに, $AFAP^*$ の定義中の $W^{1,1}(\Omega)$ を $BV(\Omega)$ で, また

$$\int_\Omega \sigma \cdot \nabla u_i dx \quad を \quad (\sigma \nabla u_i)(\Omega)$$

で置き換えて得られる集合を $AFAP_{BV}^*$ とて, $(AP^*)$ とわずかに異なる問題

$$(AP_{BV}^*) \qquad \inf_{\{(u_i,\sigma_i^*,\eta_i)_i \in AFAP_{BV}^*\}} \{\liminf_i \eta_i\}$$

を考えることができる。すなわち $AFAP_{BV}^*$ は $AP_{BV}^*$ の許容解全体で

$$\{\ (u_i, \sigma_i^*, \eta_i)_i \subset BV(\Omega) \times X_0^* \times R;\ \lim_i((\sigma \nabla u_i)(\Omega) + \langle \sigma, \sigma_i^* \rangle) = 0 \text{ for each } \sigma \in X_0,$$

$$L(u_i) \to 1,\ \langle \sigma, \sigma_i^* \rangle \geq -\eta_i \text{ for each } \sigma \in K_\Gamma \cap X_0 \ \}$$

のことである。[2] , [11, Corollary 30.2.2] により $\sup(P) = \inf(AP^*)$ であり, Green の公式 (8) を用いて, $\sup(MF) \leq \inf(AP_{BV}^*)$ を示すことは容易であるから 次の命題が示される。

**命題 3** $\sup(MF) = \inf(AP_{BV}^*) = \inf(AP^*)$ が成り立つ。

$(P^*)$ が $(AC)$ のとき, もし $(P^*)$ の許容解 $(u_i, \sigma_i^*, \eta_i)_i$ で $\liminf \eta_i < \infty$ を満たすものがあれば $(P^*)$ は **properly asymptotically consistent**, (PAC) であると言い, そうでなければ **improperly asymptotically consistent**, (IAC) と言う。IAC のときはもちろん $\inf(AP^*) = +\infty$ である。

ここで, 分類に現れる *homogemeous consistency* の定義について述べておこう。

**定義** $O^+K$ を $K$ の asymptotic (or recession) cone とする:

$$O^+K = \{(\sigma, \lambda);\ t(\sigma, \lambda) + (\sigma_0, \lambda_0) \in K \text{ for all } t \in R^+\}$$

ただし $(\sigma_0, \lambda_0) \in K$ とする。( [11] を参照。) もし $T(\sigma, \lambda) = (0, 0)$ と $\langle (\sigma, \lambda), e \rangle > 0$ を満たす $(\sigma, \lambda) \in O^+K$ があるとき $(P)$ は *homogeneous consistent* であると言い, そうでない

とき $(P)$ は *homogeneous inconsistent* であるという。今は, $O^+K = \{0\} \times R$ だから, $(P)$ が homogeneous consistent であることと $(F, f) = (0, 0)$ が同値であることが証明できる。

最後に伊理の問題について述べる。伊理の問題は Iri [4] で示されたもので, 密なネットワークの近似をモデルとしている。$\Omega, \Gamma$ は Strang の問題と同様とし $A, B$ を互いに交わらない $\partial\Omega$ の Borel 部分集合とする。このとき伊理の最大流最小切断問題は次のように定式化される。

$$
\begin{aligned}
(MFI) \qquad & \sup \int_A \sigma \cdot \nu dH_{n-1} \\
& \text{subject to } \sigma(x) \in \Gamma(x) \text{ for a.e. } x \in \Omega, \\
& \operatorname{div} \sigma = 0 \text{ a.e. on } \Omega,\ \sigma \cdot \nu = 0\ H_{n-1}\text{–a.e. on } \partial\Omega - (A \cup B)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(MCI) \qquad & \inf C(S) \\
& \text{subject to } S \in Q, \\
& H_{n-1}(A - \partial^* S) = H_{n-1}(B \cap \partial^* S) = 0
\end{aligned}
$$

ここで $Q, C(S)$ も Strang の問題と同様のものである。$(MFI)$ の双対問題は

$$
\begin{aligned}
(MFI^*) \qquad & \inf \psi(u) \\
& \text{subject to } u \in W^{1,1}(\Omega), \\
& \gamma u = 1\ H_{n-1}\text{–a.e. on } A \text{ and } \gamma u = 0\ H_{n-1}\text{–a.e. on } B
\end{aligned}
$$

と表されるので $(MFI), (MFI^*)$ は凸最適問題で, Strang の問題と同様に asymptotic problems を導くことができる。

伊理の問題の場合には $O^+K$ にあたる集合が $\{0\}$ となり, ゆえに $\sigma \in O^+K$ に対しては $\int_A \sigma \cdot \nu ds = 0$ なので $(MFI)$ は常に HINC であるから 8 にあたる例が無く, 残りの 3 個の場合 (1,5,7) に当てはまる例が確かに存在することが [9] によりわかるので, こちらは 3 通りに場合分けされる。

## 参考文献


[1] A. Ben-Israel, A. Charnes, and K. O. Kortanek. Asymptotic duality over closed convex sets. *J. Math. Anal. Appl.*, 35:677–691, 1971. Erratum, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (1972).

[2] R. J. Duffin. Infinite programs. In H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors, *Linear Inequalities and Related Systems*, pages 157 – 170. Princeton University Press Princeton, 1956.

[3] E. Gagliardo. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 27:284 – 305, 1957.

[4] M. Iri. Theory of flows in continua as approximation to flows in networks. In A. Prekopa, editor, *Survey of Math. Programming*, pages 263 – 278, Amsterdam, The Netherlands, 1979. Mathematical Programming Society, North-Holland.

[5] C. Kallina and A. C. Williams. Linear programming in reflexive spaces. *SIAM Rev.*, 13:350 – 376, 1971.

[6] R. Kohn and R. Temam. Dual spaces of stresses and strains with applications to hencky plasticity. *Appl. Math. Optim.*, 10:1 – 35, 1983.

[7] K. O. Kortanek. Classifying convex extremum problems over linear topologies having separation properties. *J. Math. Anal. Appl.*, 46:725–755, 1974.

[8] R. Nozawa. A max–flow min–cut theorem in an anisotropic network. *Osaka J. Math.*, 27:805 – 842, 1990.

[9] R. Nozawa. Examples of max–flow and min–cut problems with duality gaps in continuous networks. *Mathematical Programming*, 63:213 – 234, 1994.

[10] R. Nozawa and K.O. Kortanek. A perturbation–based duality classification for max–flow min–cut problems of strang and Iri.. *in preparation.*

[11] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[12] G. Strang. Maximal flow through a domain. *Mathematical Programming*, 26:123 – 143, 1983.