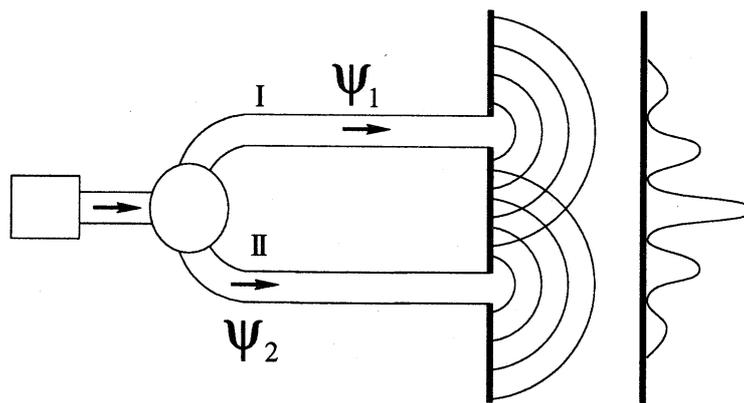


カオスの少数自由度系における デフェイジング

早大理工 佐々木 貴 (Takashi Sasaki)
早大理工 並木 美喜雄 (Mikio Namiki)

1 多ヒルベルト空間理論を用いた観測理論

町田・並木による多ヒルベルト空間理論 (Many Hilbert Space theory) を用いた観測理論について説明する。つぎのような2スリットの干渉実験を考える。

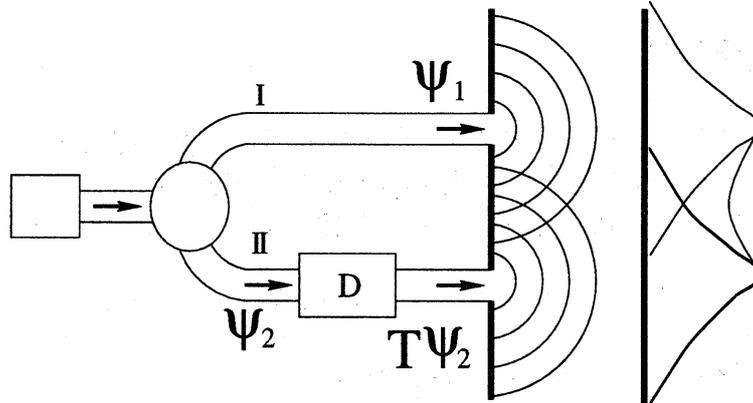


このとき量子力学的粒子の波動性によりスクリーン上で干渉縞が観測される。つまりスクリーン上のある点に粒子を見出す確率は

$$\begin{aligned} P &= |\psi_1 + \psi_2|^2 \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\text{Re}(\psi_1^* \psi_2) \end{aligned} \quad (1)$$

である。

しかし例えば一方の経路に測定器を置いたときには干渉縞が消えてスクリーン上では経路 I を通った確率と経路 II を通った確率の和があらわれる。(下図参照)



このときスクリーン上のある点に粒子を見出す確率は

$$P = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 \quad (2)$$

これを波動関数の収縮とよび、この現象を説明するのが観測理論である。

町田・並木の多ヒルベルト空間理論による説明では測定器の状態はマクロ的には同じでも測定器内部の局所系は実験試行毎に変化していると考ええる。

いま簡単のため分波 2 に対する測定器の影響を次のように考える。

$$\psi_2 \rightarrow T\psi_2 \quad (3)$$

試行毎のゆらぎがあることから

$$T \rightarrow T_j \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

とおける。この場合スクリーン上のある点で粒子を見出す確率は

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P^{(j)} \\ &= |\psi_1|^2 + |\bar{T}|^2 |\psi_2|^2 + 2\text{Re}(\psi_1^* \bar{T} \psi_2) \end{aligned} \quad (5)$$

$$|\bar{T}|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |T_j|^2, \quad \bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T_j \quad (6)$$

となる。ここで次のようなデコヒーレンスパラメータ ϵ を導入する。

$$|\bar{T}|^2 = |\bar{T}|^2 (1 - \epsilon) \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (7)$$

$\bar{T} = |\bar{T}| e^{i\beta}$ として (5) 式を ϵ を用いて書き直すと

$$\bar{P} = |\psi_1|^2 + |\bar{T}|^2 |\psi_2|^2 + 2\sqrt{|\bar{T}|^2} \sqrt{1 - \epsilon} \text{Re}(\psi_1^* e^{i\beta} \psi_2) \quad (8)$$

と表せる。

この ϵ を用いると分波間の位相相関の消失を定量的に記述することができる。 $\epsilon = 1$ のときは完全に位相相関が切れた状態で (8) 式で干渉項は完全におちる。 $\epsilon = 0$ のときは完全に位相相関が保存されている場合で $0 < \epsilon < 1$ のときが不完全測定に対応している。

2 モデルの設定

本研究室ではこれまで多数の自由度をもつ測定器モデルを設定し解析を行ってきたが今回は少数自由度系のモデルを設定し、測定器となりうるか考察する。

そのモデルとして今回は時間に依存して中心位置が変化するようなポテンシャルを考える。

$$V(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) \quad (9)$$

このポテンシャルに対する Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) \right] \psi_j(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_j(\mathbf{r}, t) \quad (10)$$

ここで

$$e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_j(t)} \mathbf{r} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_j(t)} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_j(t) \quad (11)$$

であることを用いて

$$\bar{\psi}_j(\mathbf{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_j(t)} \psi_j(\mathbf{r}, t) \quad (12)$$

なるユニタリー変換を考える。

このとき $\bar{\psi}_j(\mathbf{r}, t)$ に関する Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \bar{\psi}_j(\mathbf{r}, t) = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{v}_j \cdot \nabla \right] \bar{\psi}_j(\mathbf{r}, t) \quad (13)$$

$$\mathbf{v}_j = \frac{d\mathbf{r}_j(t)}{dt} \quad (14)$$

となる。

今回は断熱近似として $\mathbf{v}_j = 0$ の場合を考える。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \bar{\psi}_j(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi}_j(\mathbf{r}, t) \quad (15)$$

いま入射波として平面波に極めて近い波束を考えれば

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) \simeq e^{(-\frac{i}{\hbar} E_k t)} u_{\mathbf{k}(j)}^{(+)}(\mathbf{r}) \quad (16)$$

$$\bar{\psi}_j(\mathbf{r}, t) \simeq e^{(-\frac{i}{\hbar} E_k t)} \bar{u}_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \quad (17)$$

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (18)$$

$$u_{\mathbf{k}(j)}^{(+)}(\mathbf{r}) = e^{(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_j)} \bar{u}_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \quad (19)$$

$$(20)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \right] u_{\mathbf{k}(j)}^{(+)}(\mathbf{r}) = E_k u_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \quad (21)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \bar{u}_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) = E_k \bar{u}_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \quad (22)$$

$$(23)$$

このとき散乱振幅は

$$\begin{aligned} F_j(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | U(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_j) | u_{\mathbf{k}(j)}^{(+)} \rangle \\ &= \langle u_{\mathbf{k}'}^{(0)} | e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j} U(\hat{\mathbf{r}}) | \bar{u}_{\mathbf{k}}^{(+)} \rangle \end{aligned} \quad (24)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right] u_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}) = E_k u_{\mathbf{k}}^{(0)}(\mathbf{r}) \quad (25)$$

$$U = \frac{2m}{\hbar^2} V \quad (26)$$

となる。

いま短距離力による低エネルギー散乱を考えるとS波近似より

$$F_j(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = e^{[-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j]} k b_j \quad (27)$$

となる (b_j は scattering length)。

このときデコヒーレンスパラメータ ϵ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 - \frac{|\bar{F}|^2}{|F|^2} \\ &= 1 - \frac{|\bar{b}|^2}{|b|^2} \end{aligned} \quad (28)$$

b に j 依存性がないとすると

$$\epsilon = 1 - \overline{e^{[-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j]}} \quad (29)$$

$\mathcal{T}_j = e^{[-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_j]}$ として

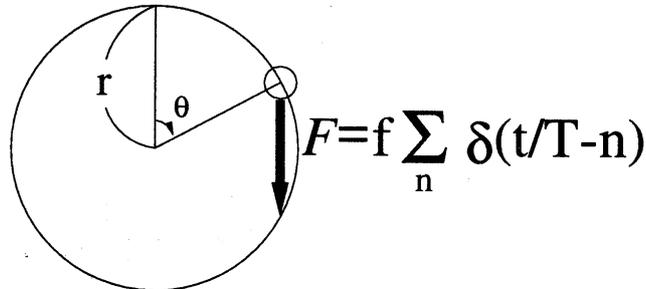
$$\mathcal{T}_j = e^{-i \Delta K R \theta_j} \quad (30)$$

$$\Delta K = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}| \quad (31)$$

と変数をかえて θ_j にランダムネスをいれて数値シミュレーションを行う。 ($\Delta K R = \alpha$ とする。)

3 kicked rotator

θ_j にいろいろランダムネスとしてカオスをしめす力学系である kicked rotator を用いる。



kicked rotator は回転振子に周期的にパルス状の力が加わる系で次のようなハミルトニアンで表される。

$$H = \frac{p^2}{2 M r^2} + M r^2 \omega_0^2 \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) \quad (32)$$

$$p = M r^2 \dot{\theta} \quad (33)$$

$$\omega_0^2 = \frac{f r}{I} \quad (34)$$

$$I = M r^2 \quad (35)$$

正準方程式を離散的な時間について積分することで次のような漸化式が得られる。

$$P_{n+1} = P_n + K \sin \theta_n \quad (36)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + P_n \quad (-\pi \leq \theta_n \leq \pi) \quad (37)$$

$$P_n = \frac{p_n T}{M r^2} \quad (38)$$

$$K = (\omega_0 T)^2 \quad (39)$$

ここで K はキックの強さとよばれる力学系の様子を決定するパラメータである。この関係式から得られた θ_n を前節で求めた ϵ にいれる。

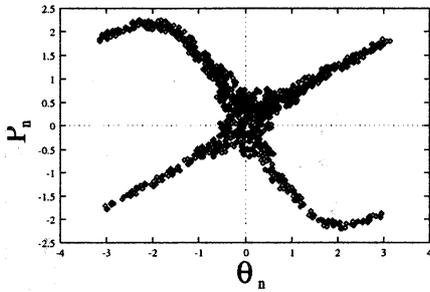
4 結果

4.1 kicked rotator の初期値依存性

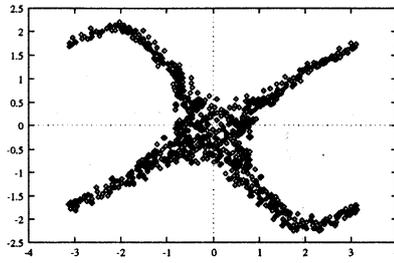
カオスの特徴である初期値依存性が現れるか、みしてみる。

$$K=1.0 \quad P_0 = \frac{\pi}{40} \quad \alpha=1$$

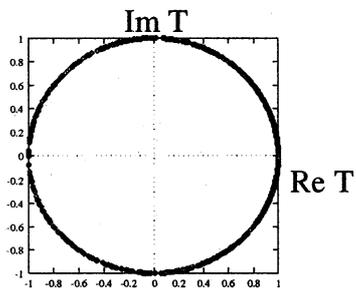
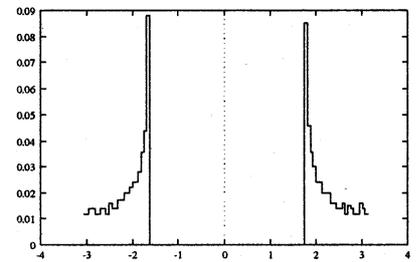
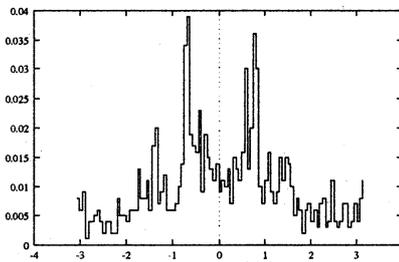
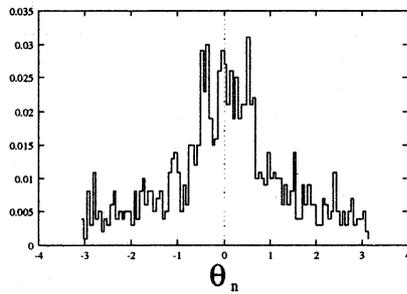
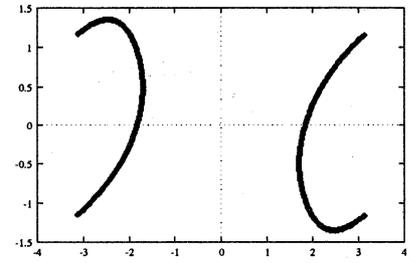
$$\theta_0 = 0$$



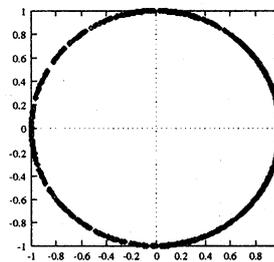
$$\theta_0 = \frac{\pi}{5}$$



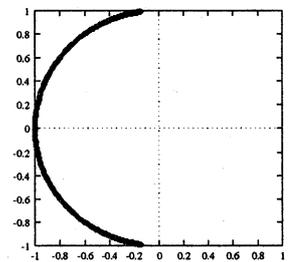
$$\theta_0 = \frac{3}{5} \pi$$



$$\epsilon = 0.833$$



$$\epsilon = 0.903$$



$$\epsilon = 0.716$$

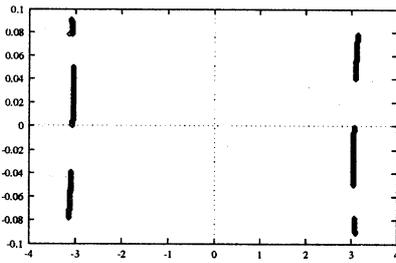
上段がそれぞれの初期値 θ_0 に対する位相空間図、中段が θ_n の度数分布、下段が T_j の複素平面図である。 θ_n の分布が一様な初期値ほど ϵ が1にちかい(つまりデコヒーレンスがおこっている)ことがわかる。

4.2 キックの強さに対する依存性

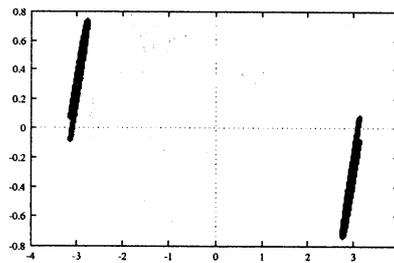
今度は初期値を同じにしてキックの強さ K を変えていった時の様子を見てみる。

$$P_0 = \frac{\pi}{40} \quad \theta_0 = -\pi \quad \alpha = 1$$

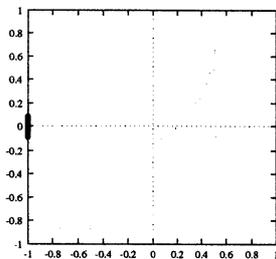
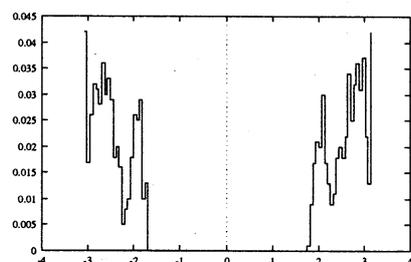
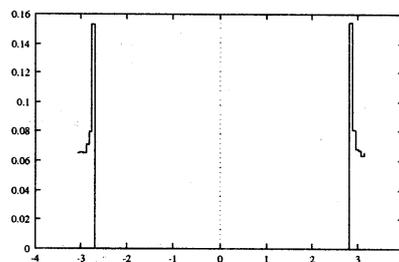
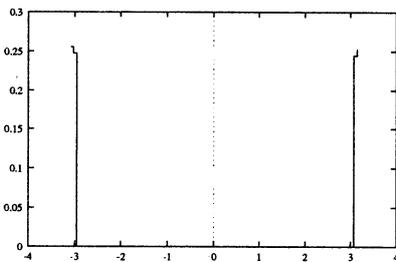
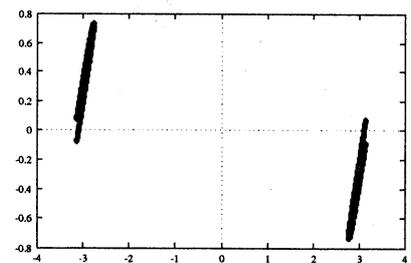
$K=1.0$



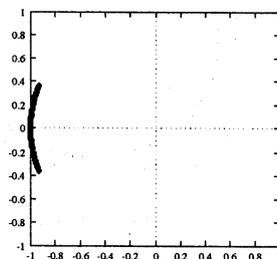
$K=4.0$



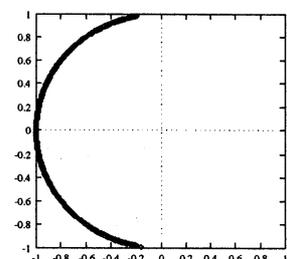
$K=4.5$



$\epsilon = 0.0041$



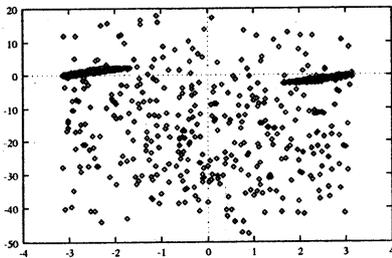
$\epsilon = 0.061$



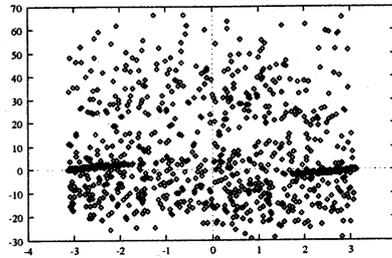
$\epsilon = 0.413$

$$P_0 = \frac{\pi}{40} \quad \theta_0 = -\pi \quad \alpha = 1$$

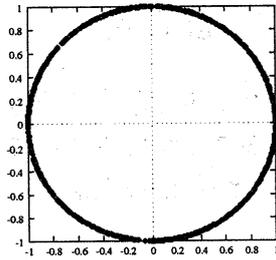
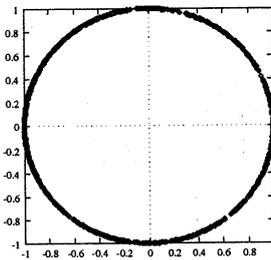
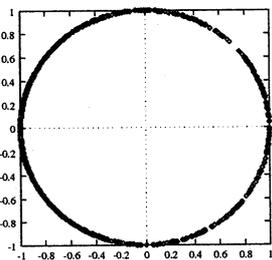
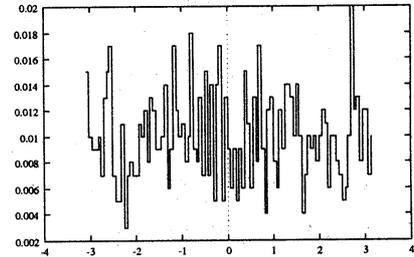
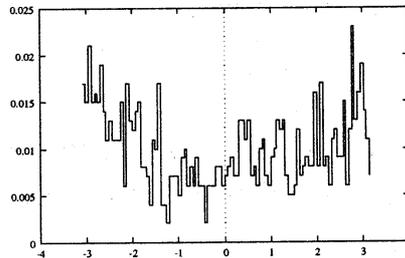
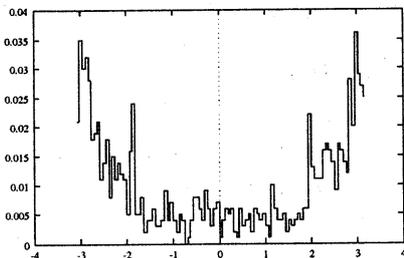
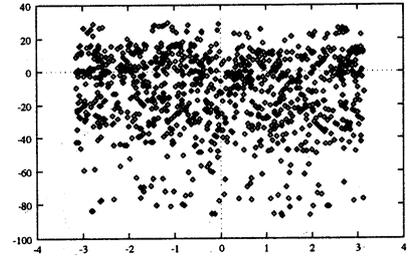
K=4.51



K=4.53



K=5.0

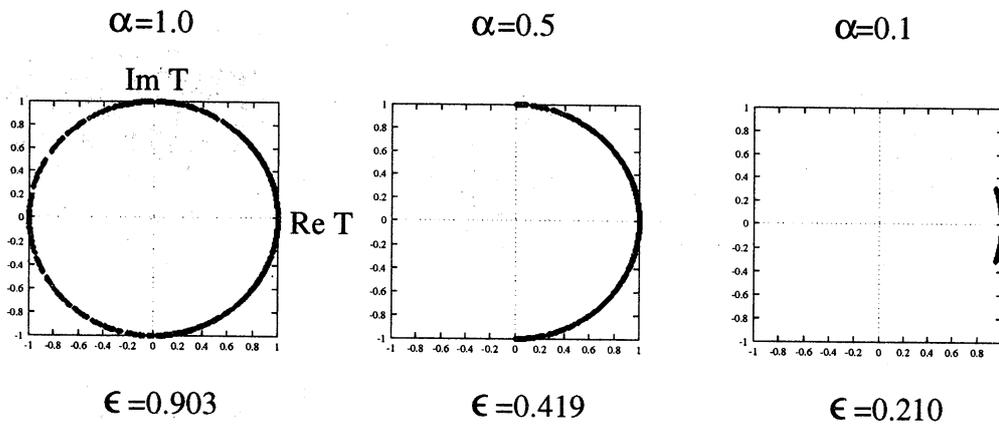
 $\epsilon = 0.413$ $\epsilon = 0.798$ $\epsilon = 0.973$

キックの強さを大きくしていくとある値に局在していた θ_n の分布が広がり、それによって ϵ が1に近付いていく様子がわかる。

4.3 α に対する依存性

さいごにパラメータ α に対する依存性をみしてみる。ここで α はポテンシャルの移動する領域の大きさを示す量である。

$$K=1.0 \quad P_0 = \frac{\pi}{40} \quad \theta_0 = \frac{\pi}{5}$$



$\alpha=1$ のとき $\epsilon \sim 1$ であるようなパラメータに対してでもオーダーが1ケタさがるとデコヒーレンスしなくなってしまう。このことからポテンシャルのゆらぎは大きくなければならないことがわかる。

5 まとめ

カオスを示すようなパラメータに対してはデコヒーレンスをおこすようなモデルを設定することができた。またその際にはゆらぎの大きさは、ある程度大きくなければならないことがわかった。