数理解析研究所講究録
983巻 1997年 142-149

A method of desingularization for the study of operators with multiple characteristics

広島大・理　竹内　潔　(Kiyoshi Takeuchi)
東大数理　小清水　寛 (Hiroshi Koshimizu)

本講演では多重特性の，即ち特性多様体が特異点を有する偏微分作用素の可解性について報告する。特性多様体が simple な時は，S-K-K や河合先生の御仕事などでマイクロ函数での可解性についてもかなりよく解かっている。又、作用素が多重特性の場合についても、双曲型や部分楕円型の作用素の場合には、Bony-Schapira によって超函数での可解性が知られている。我々の出発点となったのは次の結果である。以下，$M=\mathbb{R}^n \hookrightarrow X=\mathbb{C}^n$ とせよ。

定理（柏原-河合）

$E, Q \in \mathcal{D}_X$，E：楕円型，Q：$\pm dx_1$-方向に双曲型とし、$P = E\cdot Q + (\text{lower})$ とおく。

この時、$P: \mathcal{B}_M \to \mathcal{B}_M$ は全射

この結果は、現在では、柏原－Schapira による micro-support の理論により簡単に再証明が可能で、次の様なシステムへの一般化が得られる。 $N=\{x_1=0\} \overset{\text{複素化}}{\hookrightarrow} Y=\{z_1=0\}$ とせよ。

<u>命題</u> $\mathcal{M}$ を coherent $\mathcal{D}_X$-module で、次の条件を満たすものとする。

(i) $\mathcal{M}$ は Y に対し非特性。

(ii) $\mathcal{M}$ は $\mathring{T}^*_M X$ 上 $\pm dx_1$-方向にマイクロ双曲型。

この時、

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M) \simeq 0 \quad \text{for } \forall j > \text{proj.dim}\, \mathcal{M}_Y$$

この命題は証明自身は簡単だが、次の様な見易い応用を得ることができる。

<u>例</u> $P=(P_{ij})$: $\mathcal{D}_X$ を成分にもつ $\ell \times \ell$ 次行列とし、$\exists n_i, \exists m_j \in \mathbb{Z}$ $(i,j=1,\cdots,\ell)$ s.t.

$$\begin{cases} \text{ord}\,(P_{ij}) \leq n_i + m_j \\ \det\,(\sigma_{n_i+m_j}(P_{ij})) \not\equiv 0 \end{cases}$$

とする。この様な $\mathcal{D}_X$ の元の行列 $P=(P_{ij})$ により定められる $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}=\mathcal{D}_X^\ell / \mathcal{D}_X^\ell P$ を考える。この時、佐藤－柏原の定めた行列式と $\det(\sigma_{n_i+m_j}(P_{ij}))$ は一致し、$\mathcal{M}$ の

特性多様体は T^*X の純余次元 1 の解析的集合 $\{(z;\zeta)\in T^*X \mid \det(\sigma_{n_i+m_j}(P_{ij}))=0\}$ になることが知られている。 更に、Andronikof 氏によって、この場合は、接方程式系 $\mathcal{M}_Y$ は locally free $\mathcal{D}_Y$-module であることが分かっている。 従って、$\{\sigma(P):=\det(\sigma_{n_i+m_j}(P_{ij}))=0\}\subset T^*X$ が $\mathring{T}_M^*X$ で $\pm dx_1$-方向にマイクロ双曲型ならば、

$$P:\mathcal{B}_M^{\ell}\longrightarrow\mathcal{B}_M^{\ell}\quad \text{は全射}$$

という簡明な結果を得る。 例えば、ある $m>0$ に対して、$\mathrm{ord}(P_{ii})=m$, $\mathrm{ord}(P_{ij})\leq m-1$ for $i\neq j$ が満たされ、P_{ii} は、$P_{ii}=E_i\cdot Q_i+(\text{lower})$ (E_i:楕円型, Q_i: $\pm dx_1$-方向に双曲型) という形とすれば、上の仮定は満たされる。

$$P=\begin{bmatrix} E_1\cdot Q_1+(\text{lower}) & & * \\ & E_2\cdot Q_2+(\text{lower}) & \\ * & & \ddots \end{bmatrix}$$

つまり、$\forall v\in\mathcal{B}_M^{\ell}$ に対して、$Pu=v$ の解 $u\in\mathcal{B}_M^{\ell}$ が存在するというのが、我々の得た結論である。 行列 P のサイズが 1×1 の時は、ちょうど柏原―河合の結果 (1 頁) に一致している。

<u>Remark</u> この例を考えるにあたって、D'Agnolo–Tonin 氏の最近の仕事 "Cauchy Problem for Hyperbolic $\mathcal{D}$-module with Regular Singularities" の中の佐藤―柏原の行列式につ

いての解説が大変参考になった。両氏に感謝したい。

本講演では、境界値問題についても、マイルド超函数での可解性などの結果について報告した。しかし、これらについては、既に3月の集会の報告記事に詳しい解説を書いたので、今回は省略させて頂く。

さて最後に柏原－河合の結果を相対化したものともいえる、我々の主結果について説明しよう。簡単の為、

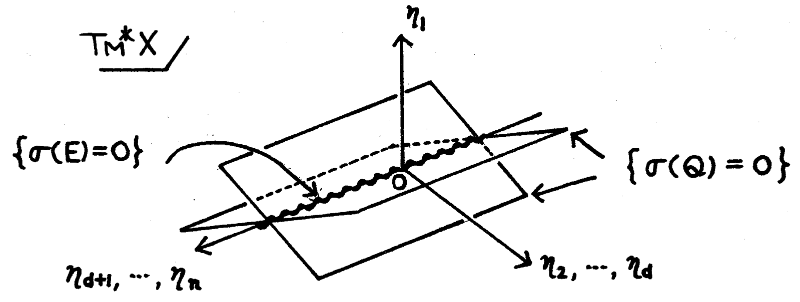
$$\begin{cases} M = M' \times M'' = \mathbb{R}^d_{x'} \times \mathbb{R}^{n-d}_{x''}, \quad x' = (x_1, \cdots, x_d) \\ X = X' \times X'' = \mathbb{C}^d_{z'} \times \mathbb{C}^{n-d}_{z''} \quad : M\text{の複素化} \end{cases}$$

とする。E, $Q \in \mathcal{D}_{X'}$: X'上の微分作用素, E : 楕円型, Q : $\pm dx_1$－方向に双曲型とせよ。この時、低階項を $\mathcal{D}_X$ よりとることにより、

$$P := E \cdot Q + (\text{lower})$$

の形にあらわされる作用素の族 $P \in \mathcal{D}_X$ を考えよう。

P の特性多様体を T_M^*X の中でみると次の様な形をしている。



$$\{\sigma(P)=0\} = \{\sigma(E)=0\} \cup \{\sigma(Q)=0\}.$$

即ち、T_M^*X の正則包合的部分多様体 $\Lambda = \{(x;i\eta) \mid \eta_1=\cdots=\eta_d=0\}$ 上では、部分楕円因子 $\{\sigma(E)=0\}$ と双曲因子 $\{\sigma(Q)=0\}$ が複雑に交叉している為、そこでの P のマイクロ函数可解性は一般論からは従わない。 我々はこの問題を考えるにあたり、次の様な図式を利用した。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}\mathcal{O}_{\Xi'}|_\Lambda & \longrightarrow & \mathcal{C}_M|_\Lambda & \longrightarrow & \mathring{\pi}_*\mathcal{C}_{ML} & \longrightarrow & 0 \quad (\text{exact}) \\
 & & \text{①}\big\downarrow P\times & & \text{②}\big\downarrow P\times & & \text{③}\big\downarrow P\times & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}\mathcal{O}_{\Xi'}|_\Lambda & \longrightarrow & \mathcal{C}_M|_\Lambda & \longrightarrow & \mathring{\pi}_*\mathcal{C}_{ML} & \longrightarrow & 0 \quad (\text{exact})
\end{array}$$

ここで $\mathcal{C}_{ML}$ とは、片岡－戸瀬により導入され、Schapira－竹内により functorial な操作が可能にされた層のことで、

$$L = \mathbb{C}^d_{z'} \times \mathbb{R}^{n-d}_{x''} \supset M \supset N = \{x_1 = 0\}$$

$$\mathring{\pi} : \mathring{T}_M^*L \underset{L}{\times} T_L^*X \twoheadrightarrow M \underset{L}{\times} T_L^*X = \Lambda \hookrightarrow T_M^*X$$

である。

まず、first vertical arrow ① は、Schapira の Cauchy－Kowalevski type の定理により全射である。 又、third vertical arrow ③ も、$T_N^*L \underset{L}{\times} T_L^*X$ 上の新しい層 $\mathcal{C}_{NL}$ の助けを借りて層の Cauchy 問題を解くことにより、かなり大変なことだが示すことができる。 以上により ② も全射であって、次の定理が成り立つ。

定理

(i) $P: \mathcal{C}_M \longrightarrow \mathcal{C}_M$ は $\mathring{T}_M^*X$ で全射。

(ii) $P: \mathcal{B}_M \longrightarrow \mathcal{B}_M$ は全射.

この結果は、Bony - Schapira の部分楕円型作用素の可解性定理を、第二超局所的に non-trivial な場合へ自然に拡張したものといえよう。 これは比喩的に言えば、「Λ 上での部分楕円因子と双曲因子の複雑な交叉を(層 $\mathcal{C}_{ML}$ の力で)代数的に Blow-up を行って解消する」 ことにより、証明がなされたといえるだろう。

実際の証明では、次の同型を $(N \underset{M}{\times} \mathring{T}_M^*L) \underset{L}{\times} T_L^*X$ 上で、$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P$ に対して示すことが重要である。:

$$\delta_* \varpi^{-1} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{ML}) \simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{NL})[1].$$

ここで、

$$T_N^*L \underset{L}{\times} T_L^*X \overset{\delta}{\longleftarrow} (N \underset{M}{\times} T_M^*L) \underset{L}{\times} T_L^*X \overset{\varpi}{\longrightarrow} T_M^*L \underset{L}{\times} T_L^*X$$

を用いた。

最後に、最近の進展について述べよう。

$N = \{x_1 = \cdots = x_\ell = 0\}$ $(\ell \leq d)$, $Y = \{z_1 = \cdots = z_\ell = 0\} \subset X$, および $V = X' \times T^*X'' \hookrightarrow T^*X$ とすると、次のうめこみがある。

$$T_Y^*X \underset{X}{\times} V \hookrightarrow T^*(X/X'') \simeq T_V(T^*X).$$

又、$\mathring{\pi}_V : \mathring{T}_Y^*X \underset{X}{\times} V \twoheadrightarrow V$ とおく。

筆者らの1人，竹内は、プレプリント“Edge of the Wedge type Theorems for Hyperfunctions.”の中で．$T_N^*L \underset{L}{\times} T_L^*X$ 上の新しい層 $\mathcal{C}_{NL}$ についてのある予想について述べたが、それは最近竹内自身により、次の様に解決された。

<u>定理</u>　$\mathcal{M}$ は Y に対し非特性な coherent $\mathcal{D}_X$-module で点 $p \in N \underset{L}{\times} T_L^*X \hookrightarrow \Lambda\ (\subset V)$ に於て次の条件を満たすとする。：

$$\mathring{\pi}_V^{-1}(p) \cap C_V(\mathrm{Ch}\,\mathcal{M}) = \phi.$$

（即ち, $\mathcal{M}$ は V に沿って non-microchar for Y at p ということ。）

すると、$\pi_L^{-1}(p)$ 上で（$\pi_L : T_N^*L \underset{L}{\times} T_L^*X \twoheadrightarrow N \underset{L}{\times} T_L^*X$）

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{NL}) = 0 \quad \text{for } \forall j < l$$

が成り立つ.

この結果は $\mathcal{C}_{NL}$ が．$\mathcal{C}_{N|X}$ の様に正則パラメータを持った“堅い”層であることを示しており．Edge of the Wedge type の解の延長定理が成立する偏微分方程式系のクラスの条件を随分弱めることができた。

又、そこで使われたアイデアを用いると．次の様な結果も示すことができる。

例　E, Q $\in \mathcal{D}_{X'}$: X'上の作用素で前と同様,
E_1, $Q_1 \in \mathcal{D}_X$: X上の作用素で、E_1 : 楕円型, Q_1は $\pm dx_1$-方向に双曲型として、

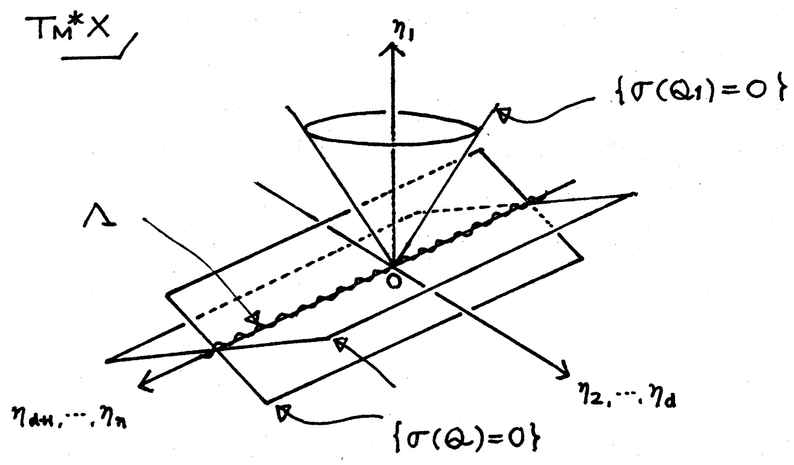
$$P_1 = (E \cdot Q) \cdot (E_1 \cdot Q_1) + (\text{lower}) \in \mathcal{D}_X$$

とおく。　更に条件

$$\Lambda \cap \{\sigma(Q_1) = 0\} \subset T^*_X X$$

を仮定する。　この時、

$$P_1 : \mathcal{B}_M \longrightarrow \mathcal{B}_M \quad \text{は全射である。}$$



つまり、講演の時は、本質的に d 変数の(X'の)シンボルを持つ作用素についてしか $\mathcal{B}_M$-可解性が示せなかったが、上の図の様に n 変数の双曲因子 $\{\sigma(Q_1) = 0\}$ や、楕円因子 $\{\sigma(E_1) = 0\}$ がシンボルに混じってくる様な作用素 $P_1 \in \mathcal{D}_X$ の族に対しても、同様の結果が示せる様になったのである。