数理解析研究所講究録
983巻 1997年 171-174

分岐特性Cauchy問題の解の真性特異点

HIDESHI YAMANE 山根　英司[1]

§1. 結果

SとKを$\mathbb{C}_x^n$, $x=(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,x_2,x')$の超曲面で, それぞれ$x_1=x_2^q$と$x_1=0$で定義されるものとする。ここで$q$は2以上の整数。$x=0$における多価関数のクラス$\mathcal{N}_{q,K}$を導入する。その定義は

$$f(x)\in\mathcal{N}_{q,K}\Longleftrightarrow f(x)=\sum_{j=0}^{q-1}f_j(x)x_1^{j/q},\qquad f_j\text{ は }x=0\text{ の近傍で正則。}$$

また,

$$\mathcal{N}_{q,K}^l=\{f(x)\in\mathcal{N}_{q,K};\quad f\text{ は }S\text{ 上で }l\text{ 回消える }\}\qquad(l\geq 0)$$

とおく。さらに次のようにおく:

$$\sum_{j=0}^{q-1}x_1^{j/q}\varinjlim_{X\ni 0}\mathcal{O}(X\backslash K)\text{。}$$

$\tilde{\mathcal{N}}_{q,K}$ は多価関数や真性特異点を持つ関数を含む。Cauchy 問題を設定するために次のクラスを導入する:

$$\tilde{\mathcal{N}}_{q,K}^l=\{f\in\tilde{\mathcal{N}}_{q,K};\quad f\text{ は }S\text{ 上で }l\text{回消える }\}\quad(l\geq 0)\text{。}$$

次が主定理である。

定理 1. $P(x,D)$を原点の近傍で定義された微分作用素で次の形のものとする:

$$P(x,D)=D_1^{A_1}D_2^{A_2}-\sum_{|\alpha|<A_1+A_2}D^\alpha a_\alpha(x),\quad A_1\geq 0,\ A_2\geq 0\text{。}$$

ここで $a_\alpha(x)$ は原点の近傍で正則で x_1 と x_2 について多項式とする。この時, 任意の $v(x)\in D_1^{A_1}\mathcal{N}_{q,K}^{A_1}$ に対し, $\tilde{\mathcal{N}}_{q,K}^{A_1+A_2}$ の元 $u(x)$ がただ一つ存在して

$$Pu=v$$

が成り立つ。

注意. もし$\sum_{|\alpha|<A_1+A_2}D^\alpha a_\alpha(x)$ が D_1に関して高々A_1-1階ならば, 解 u は $\mathcal{N}_{q,K}^{A_1+A_2}$に属する。

[1]Department of Mathematics, Chiba Institute of Technology, 2-1-1 Shibazono, Narashino, Chiba 275, Japan. e-mail address:BYY03467@niftyserve.or.jp　（冒険小説&ハードボイルド・フォーラム）

定理 2. (岡田靖則-山根) $A_1 \geq 1$ と仮定する。この時
(A) $x_1^{-\frac{q-1}{q}} \mathcal{N}_{q,K} \subset D_1^{A_1} \mathcal{N}_{q,K}^{A_1}$. さらに $A_1 = 1$ の時は等号が成り立つ。
(B) もし $l \geq q$ ならば $x_1^{-\frac{l}{q}} \notin D_1^{A_1} \mathcal{N}_{q,K}^{A_1}$ 。

§2. 浜田の例

浜田 ([H]) は次の例を与えた。

$$\begin{cases} (D_2^2 - D_1)u(x) = 0 \\ u|_S = \gamma_1 x_2^3,\ D_1 u|_S = \gamma_2 x_2\text{。} \end{cases}$$

ただし

$$S = \{x_1 = x_2^2\}, \quad \gamma_1 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(m - \frac{3}{2})}{(2m)!}, \quad \gamma_2 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\Gamma(m - \frac{1}{2})}{(2m)!}\text{。}$$

解 $u(x)$ は

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(m - \frac{3}{2})}{(2m)!} x_1^{\frac{3}{2}-m} x_2^{2m}$$

で与えられる。これは分岐しており, さらに真性特異点を持っている。この現象を我々の観点から解釈しよう。まず問題を次の形のものに帰着する:

$$\begin{cases} (D_2^2 - D_1)u(x) = v(x), \quad v \in \mathcal{O}_{x=0} \text{ は既知} \\ u|_S = 0, \quad D_1 u|_S = 0\text{ 。} \end{cases}$$

マイクロ微分作用素

$$\begin{aligned} &(D_2^2 - D_1)^{-1} = (1 - D_1 D_2^{-2})^{-1} D_2^{-2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (D_1 D_2^{-2})^j D_2^{-2} = \sum_{j=0}^{\infty} D_1^j D_2^{-2j-2} \end{aligned}$$

を用いて, 解を

$$u(x) = \sum_{j=0}^{\infty} D_1^j D_2^{-2j-2} v(x)$$

のように表示できる。

$z = x_1^{1/2}$ とおくと, 次を得る:

$$u(z^2, x_2, x') = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2z} D_z \right)^j D_2^{-2j-2} v(z^2, x_2, \ldots, x_n)\text{ 。}$$

分岐はD_2^{-2j-2}のために起きる（←次のセクション参照)。真性特異点が現れるのは$\left(\frac{1}{2z}D_z\right)^j$という因子のせいである。

§3. マイクロ微分作用素と多価関数

D_2^{-1} の $\mathcal{O}_{x=0}$ への作用を定義しよう。$f(x) \in \mathcal{O}_{x=0}$ に対して $D_2^{-1}f$ は次の式で定義される:

$$D_2^{-1}f(x) = \int_{x_1^{1/q}}^{x_2} f(x_1, y_2, x')dy_2 \text{ 。}$$

積分の始点がこのようであるから,$f(x)$ が一価正則であっても, $D_2^{-1}f(x)$ は一価とは限らない。なお $D_2^{-1}f(x)$ は $x_2 = x_1^{1/q}$ の上で 0 になることに注意しよう。こうして

$$D_2^{-1}: \quad \mathcal{O}_{x=0} \to \mathcal{N}_{q,K}^1$$

が定義された。多価関数が気持ち悪ければ $z = x_1^{1/q}$ と置いてやって

$$D_2^{-1}: \quad \mathbb{C}\{z^q, x_2, x'\} \to \mathcal{O}^1_{(z,x_2,x')=0} = \{g(z, x_2, x') \in \mathcal{O}_{(z,x_2,x')=0}\,;\, g|_{z=x_2} = 0\}$$

と書けば良い。積分表示は容易に判る。こう書くと評価がしやすいし, また, D_2^{-2}, D_2^{-3}, ... の定義もしやすい。結局

$$D_2^{-1}: \quad \mathcal{N}_{q,K}^l \to \mathcal{N}_{q,K}^{l+1}$$

が定義される。

定理 1 も§2 と同様に微分作用素の逆を用いて証明される。詳細は [Y2] をご覧下さい。

References

[Bou-Kr] Boutet de Monvel, L. and Kreé, P., *Pseudodifferential operators and Gevrey classes*, Ann. Inst. Fourier, **17-1** (1967), 295–323.

[D] Dunau, J., *Un Problème de Cauchy Caractéristique*, J. Math. pures et appl. **69** (1990), 369-402.

[G-K-L] Gårding, L., Kotake, T. and Leray, J., *Problème de Cauchy, I bis et VI*, Bull. Soc. Math. de France **92** (1964), 263–361.

[H] Hamada, Y., *Les singularités des solutions du problème de Cauchy à données holomorphes*, Recent developments in hyperbolic equations (Pisa, 1987), Longman, 1988, pp. 82–95.

[K-K-K] Kashiwara, M., Kawai, T. and Kimura, T., *Foundation of Algebraic Analysis*, Kinokuniya, 1980 (in Japanese) ; English translation from Princeton, 1986.

[L] Leray, J., *Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy*, Bull. Soc. math. France **85** (1957), 389-429.

[N-S] Nakamura, G. and Sasai, T., *The singularities of the solutions of the Cauchy problem for second order equations in case the initial manifold includes characteristic points*, Tôhoku Math. Journ. **28** (1976), 523-539.

[O-Y] Okada, Y. and Yamane, H., *A characteristic Cauchy problem in the complex domain*, to appear in J. Math. pures et appl.

[Y] Yamane, H., *Branching of singularities for some second or third order microhyperbolic operators*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **2 (3)** (1996).

[Y2] Yamane, H., *The Essential Singularity of the Solution of a Characteristic Cauchy Problem*, Publ.RIMS, Kyoto Univ. **32** (1996), 541-556.