数理解析研究所講究録
984巻 1997年 1-15

ある生態系モデルの周期アトラクターについて

島根大学総合理工学部　杉江実郎 (Jitsuro Sugie)

Ivlev 型応答関数をもつ捕食者・被食者モデル

$$\begin{aligned}\dot{x} &= rx(1-x)-(1-e^{-ax})y \\ \dot{y} &= y\big((1-e^{-ax})-D\big)\end{aligned} \tag{1}$$

について考える。ただし、a, r, D は正の定数である。

$$D < 1-e^{-a} \tag{2}$$

ならば、方程式系 (1) は第1象現に critical point (λ, ν) をもつ。ここで

$$\lambda = -\frac{1}{a}\log(1-D), \qquad \nu = \frac{r}{D}\lambda(1-\lambda)$$

である (λ は a と D に depend し、ν は a, r, D に depend する)。

この生態系モデルの limit cycle の存在性や一意性に関する研究が行われている (例えば、[1], [2], [5], [6])。最近、Kooij and Zegeling [3] によって、次の結果が報告された。

THEOREM 1. (i) $a > 2$ ならば、方程式系 (1) は高々一つの limit cycle をもつ。(ii) $0 < a \leq 2$ ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

この結果は、方程式系 (1) が limit cycle を2個以上はもたないことと、$a \leq 2$ ならば limit cycle は存在しないことを示しているだけで、limit cycle の一意性のための必要十分条件を与えていない。本講演では、limit cycle が分岐する条件を報告する。

まず、$a > 2$ の場合でも、方程式系 (1) は limit cycle をもたないことがあるのか? について考える。そのために、Bendixson の判定法を用いる。即ち

$$\phi(x) \equiv r(1-2x)-D+1-e^{-ax} < 0 \qquad \text{for } x > 0$$

ならば、方程式系 (1) には limit cycle が存在しない。このとき

$$\phi'(x) = -2r + ae^{-ax}$$

である。まず、$2r \geq a$ の場合、$\phi(x)$ は単調減少であり

$$\phi(x) < \phi(0) = r - D \qquad \text{for } x > 0$$

より

$$\frac{a}{2} \leq r \leq D \tag{3}$$

ならば、limit cycle は存在しない。しかし、条件 (2) と合わせて考えると、$a < 2$ となる。次に、$2r < a$ の場合、$\phi(x)$ は

$$x^* = -\frac{1}{a}\log\frac{2r}{a}$$

で最大値となる。したがって

$$\phi(x^*) = r(1-2x^*) - D + 1 - \frac{2r}{a} < 0 \tag{4}$$

ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

次の例では、(4) が満たされないので、Bendixson の判定法は使えない。しかし、limit cycle は存在しない。

EXAMPLE 1. $a=3$, $r=1$, $D=\frac{9}{10}$ のとき、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

この場合

$$D = \frac{9}{10} < 0.95 < 1 - e^{-3} = 1 - e^{-a}$$

であるから、(2) は成立する。$2r < a$ も明らか。しかし

$$x^* = -\frac{1}{3}\log\frac{2}{3} < \frac{1}{5};$$

$$\begin{aligned}\phi(x^*) &= 1 + \frac{2}{3}\log\frac{2}{3} - \frac{9}{10} + 1 - \frac{2}{3}\\ &= \frac{13}{30} + \frac{2}{3}\log\frac{2}{3} > \frac{13}{30} - \frac{2}{5} = \frac{1}{30}\end{aligned}$$

であるから、(4) は成立しない。しかし、Figure 1 から limit cycle が存在しないことがわかる。

ところで、方程式系 (1) は変数変換

$$u = x - \lambda, \qquad v = \log y - \log \nu, \qquad d\tau = (e^{-ax} - 1)dt$$

によって

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= \nu(e^v - 1) - F(u)\\ \frac{dv}{d\tau} &= -g(u)\end{aligned} \tag{5}$$

に書き直せる。ただし、$u > -\lambda$ に対して

$$\begin{aligned}F(u) &= \frac{r(u+\lambda)(1-u-\lambda)}{1-e^{-a(u+\lambda)}} - \nu = \frac{r(u+\lambda)(1-u-\lambda)}{1-(1-D)e^{-au}} - \nu;\\ g(u) &= 1 - \frac{D}{1-e^{-a(u+\lambda)}}\end{aligned}$$

である。また、このとき

$$G(u) = u - \frac{D}{a}\log\frac{1-(1-D)e^{-au}}{De^{-au}} = u - \frac{D}{a}\log\frac{e^{au}-(1-D)}{D}$$

となる。

方程式系 (5) が limit cycle をもたないための十分条件として、次のものがよく知られている（例えば、[1], [7], [8]）。

THEOREM 2. u をパラメータとする曲線 $(F(u), G(u))$ が自分自身と交わらないならば、方程式系 (5) は limit cycle をもたない。

Example 1 では、$a=3$, $r=1$, $D=\frac{9}{10}$, $\lambda=-\frac{1}{3}\log\frac{1}{10}$ であるから

$$F(u)=\frac{(u-\frac{1}{3}\log\frac{1}{10})(1-u+\frac{1}{3}\log\frac{1}{10})}{1-\frac{1}{10}e^{-3u}}+\frac{10}{27}\left(1+\frac{1}{3}\log\frac{1}{10}\right)\log\frac{1}{10};$$
$$G(u)=u-\frac{3}{10}\log\frac{10e^{3u}-1}{9}$$

となるので、Figure 2 より、曲線 $\big(F(u),G(u)\big)$ は交点をもたないことがわかる。Figure 2 の矢印はパラメータ u が増える方向を意味している。当然、$u=0$ のとき曲線は原点を通る。

考察を進めるため、別の例を挙げる。

EXAMPLE 2. $a=3$, $r=1$, $D=\frac{7}{10}$ のとき、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

この場合、$x^*=-\frac{1}{3}\log\frac{2}{3}<\frac{1}{5}$;

$$\begin{aligned}\phi(x^*)&=1+\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}-\frac{7}{10}+1-\frac{2}{3}\\&=\frac{19}{30}+\frac{2}{3}\log\frac{2}{3}>\frac{19}{30}-\frac{2}{5}=\frac{7}{30}\end{aligned}$$

であるから、(4) は成立しない。しかし、Figure 3 が示すように、曲線 $\big(F(u),G(u)\big)$ は交点をもたないので、limit cycle は存在しない。実際、解軌道図は Figure 4 のようになり、limit cycle は存在しない。

さて、Theorem 2 を使って、方程式系 (1) が limit cycle をもたないための十分条件を求める。まず、$G(u)$ の性質について考える。$G(0)=0$ で、$G(u)$ は $-\lambda<u<0$ において単調減少、$u>0$ において単調増加である。したがって、Figures 2, 3 において、曲線 $\big(F(u),G(u)\big)$ は次第に下がり、一度原点を通り（これには $F(0)=0$ も必要)、その後上がっている。また

$$\begin{aligned}G(u)&=u-\frac{D}{a}\log\frac{1-(1-D)e^{-au}}{De^{-au}}\\&=(1-D)u-\frac{D}{a}\log\big(1-(1-D)e^{-au}\big)+\frac{D}{a}\log D\end{aligned}$$

より、$1-D=e^{-a\lambda}$ に注意すると

$$G(u)\to\infty\quad\text{as}\quad u\to\infty;\qquad G(u)\to\infty\quad\text{as}\quad u\to-\lambda$$

であることがわかる。

次に、$F(u)$ の性質について調べる。

$$\begin{aligned}F'(u)=&\frac{r}{\big(1-(1-D)e^{-au}\big)^2}\Big\{(1-2u-2\lambda)\big(1-(1-D)e^{-au}\big)\\&\qquad-a(1-D)(u+\lambda)(1-u-\lambda)e^{-au}\Big\}\\=&\frac{r}{\big(1-(1-D)e^{-au}\big)^2}\Big[1-2u-2\lambda\\&\qquad-(1-D)e^{-au}\big\{(1-2u-2\lambda)+a(u+\lambda)(1-u-\lambda)\big\}\Big]\end{aligned}$$

となる。ここで、$u\in\mathbf{R}$ に対して

$$h(u)=1-2u-2\lambda-(1-D)e^{-au}\big\{(1-2u-2\lambda)+a(u+\lambda)(1-u-\lambda)\big\}$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
h'(u) &= -2 + a(1-D)e^{-au}\{(1-2u-2\lambda) + a(u+\lambda)(1-u-\lambda)\} \\
&\quad - (1-D)e^{-au}\{-2 + a(1-2u-2\lambda)\} \\
&= -2 + (1-D)e^{-au}\{2 + a^2(u+\lambda) - a^2(u+\lambda)^2\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h''(u) &= -a(1-D)e^{-au}\{2 + a^2(u+\lambda) - a^2(u+\lambda)^2\} + (1-D)e^{-au}\{a^2 - 2a^2(u+\lambda)\} \\
&= (1-D)e^{-au}\{a^3(u+\lambda)^2 - a^2(a+2)(u+\lambda) - a(2-a)\}
\end{aligned}
$$

となる。したがって

$$h(-\lambda) = h'(-\lambda) = 0$$

である。

もし、$0 < a \leq 2$ ならば $h''(-\lambda) = -a(2-a) \leq 0$ かつ

$$k(u) = a^3(u+\lambda)^2 - a^2(a+2)(u+\lambda) - a(2-a)$$

の判別式が $a^4(a^2+12) > 0$ であるから

$$h''(u) < 0 \quad (-\lambda < u < u_*); \qquad h''(u_*) = 0; \qquad h''(u) > 0 \quad (u > u_*)$$

となる u_* が存在する。また

$$h'(u) \to -2 \quad \text{as} \ u \to \infty$$

であるから、$h'(u) < 0 \quad \text{for} \ u > -\lambda$, 即ち $h(u)$ は単調減少である。したがって

$$h(u) < h(-\lambda) = 0 \qquad \text{for} \ u > -\lambda$$

となり、$F(u)$ も単調減少であることがわかる。故に、$G(u)$ の性質と合せて考えると、曲線 $(F(u), G(u))$ は自分自身に交わらない。この事実と Theorem 2 より、方程式系 (1) は limit cycle をもたないことになる。これは Theorem 1 (ii) の別証明である。

もし、$a > 2$ ならば $h''(-\lambda) = -a(2-a) > 0$ であり、$k(u)$ の判別式は $0 < a \leq 2$ の場合と同じく正であるから、$-\lambda < u^* < u_*$ なる u^*, u_* が存在して、$h''(u^*) = h''(u_*) = 0$;

$$h''(u) > 0 \quad (-\lambda < u < u^*); \qquad h''(u) < 0 \quad (u^* < u < u_*); \qquad h''(u) > 0 \quad (u > u_*)$$

となる。$h'(-\lambda) = 0$, $h'(u) \to -2 \quad \text{as} \ u \to \infty$ に注意すれば、$h'(u)$ は $u = u^*$ で最大値を、$u = u_*$ で最小値をとり

$$h'(u) > 0 \quad (-\lambda < u < \bar{u}); \qquad h'(\bar{u}) = 0; \qquad h'(u) < 0 \quad (u > \bar{u})$$

となる $\bar{u}$: $u^* < \bar{u} < u_*$ が存在することがわかる。したがって、$h(u)$ は $u = \bar{u}$ で最大値をとる。$h(-\lambda) = 0$, $h(u) \to -\infty \quad \text{as} \ u \to \infty$ であるから

$$h(u) > 0 \quad (-\lambda < u < \hat{u}); \qquad h(\hat{u}) = 0; \qquad h(u) < 0 \quad (u > \hat{u})$$

となる $\hat{u} > \bar{u}$ が存在する。$F'(u)$ と $h(u)$ の正負は同じであるから、$F(u)$ は $-\lambda < u < \hat{u}$ において単調増加、$u > \hat{u}$ において単調減少である。

ところで、$F(0)=0$;

$$\begin{aligned}\lim_{u\to-\lambda}F(u)&=\lim_{u\to-\lambda}\frac{r(u+\lambda)(1-u-\lambda)}{1-e^{-a(u+\lambda)}}-\nu\\&=\lim_{u\to-\lambda}\frac{r(1-2u-2\lambda)}{ae^{-a(u+\lambda)}}-\nu=\frac{r}{a}-\nu;\\\lim_{u\to\infty}F(u)&=-\infty\end{aligned}$$

である。したがって

$$\frac{r}{a}-\nu\geq 0$$

ならば $F(u)$ の増減を考慮すると、$\hat{u}<0$ かつ

$$F(u)>0\quad(-\lambda<u<0);\qquad F(u)<0\quad(u>0)$$

であることがわかる。このとき、曲線 $\bigl(F(u),G(u)\bigr)$ は自分自身に交わらないので、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。条件 $\frac{r}{a}-\nu\geq 0$ を書き直すと

$$a\leq-\frac{\bigl(\log(1-D)\bigr)^2}{D+\log(1-D)}\equiv\Gamma(D)\tag{6}$$

となる。この $\Gamma(D)$ は D に関して単調増加かつ $\Gamma(D)>2$ for $0<D<1$ であることがわかる。したがって、$0<a\leq 2$ の場合も含めて、条件 (6) が満たされれば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

ここで、Examples 1, 2 において、条件 (6) が成り立つかどうかを調べる。
Example 1 ($a=3$, $D=\frac{9}{10}$)：

$$aD+a\log(1-D)+\bigl(\log(1-D)\bigr)^2=\frac{27}{10}+3\log\frac{1}{10}+\left(\log\frac{1}{10}\right)^2\approx 1.094142831>0.$$

Example 2 ($a=3$, $D=\frac{7}{10}$)：

$$aD+a\log(1-D)+\bigl(\log(1-D)\bigr)^2=\frac{21}{10}+3\log\frac{3}{10}+\left(\log\frac{3}{10}\right)^2\approx -0.06236789942<0.$$

Example 1 では、条件 (6) が満たされるので、limit cycle が存在しないことが確認できる (Bendixson の判定法から導いた条件 (4) は Example 1 には適用できなかった)。しかし、条件 (6) も不完全で、Example 2 において limit cycle が存在しないことを説明できない。

先に述べたように、条件 (6) が成り立つならば $F(u)$ は単調減少であるか $\hat{u}<0$ において最大値をとる。したがって、どちらの場合も $F'(0)\leq 0$ (正確には $F'(0)<0$) になっている。反対に $F'(0)>0$ の場合

$$\lim_{u\to-\lambda}F(u)=\frac{r}{a}-\nu;\qquad\lim_{u\to\infty}F(u)=-\infty$$

に注意すれば、曲線 $\bigl(F(u),G(u)\bigr)$ は必ず自分自身に交わることになる。したがって、Theorem 2 を用いて、方程式系 (1) が limit cycle をもたないことを示すには少なくとも

$$F'(0)\leq 0$$

でなければならない。整理すると

$$a\leq-\frac{2D+(1-D)\log(1-D)}{D+(1-D)\log(1-D)}\log(1-D)\equiv\Delta(D)\tag{7}$$

となる。この $\Delta(D)$ も D に関して単調増加かつ $\Delta(D) > 2$ for $0 < D < 1$ であることがわかる。条件 (2), (6), (7) を a–D 平面に描くと Figure 5 のようになる。

今までの議論によって、次の事実が判明した。

RESULT 1. $a \leq \Gamma(D)$ ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

以後、$a > \Gamma(D)$ の場合について考える。このとき、$\hat{u}$ が存在して、$F(u)$ は $-\lambda < u < \hat{u}$ において単調増加、$u > \hat{u}$ において単調減少であることを思い出そう（正確には、$a > 2$ であるだけで、$F(u)$ は同じ性質をもつ）。

さて、$w = G(u)\,\mathrm{sgn}\,u$ の逆関数を $G^{-1}(w)$ とおくとき、Theorem 2 は次のように書ける。

THEOREM 2′. 任意の $w: 0 < w < G(-\lambda + 0)$ に対して

$$F\bigl(G^{-1}(-w)\bigr) \neq F\bigl(G^{-1}(w)\bigr)$$

ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

関数 $G(u)$ は複雑であるから、逆関数 $G^{-1}(w)$ を求めることは困難である。しかし、$G(u)$ は次の性質をもっていることが証明できる。

LEMMA 1. $G(-u) > G(u)$ for $0 < u < \lambda$.

Theorem 2′ と Lemma 1 を用いれば、次の結果が得られる。

THEOREM 3. $a > \Gamma(D)$ であるとする。このとき

$$F(-u) > F(u) \quad \text{for } 0 < u < \lambda \tag{8}$$

ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

証明　$F\bigl(G^{-1}(-w_0)\bigr) = F\bigl(G^{-1}(w_0)\bigr)$ となる $w_0 > 0$ が存在すると仮定する。

$$\alpha = -G^{-1}(-w_0) > 0, \qquad \beta = G^{-1}(w_0) > 0$$

とおくと

$$F(-\lambda + 0) < F(-\alpha) = F(\beta) < 0, \qquad G(-\alpha) = w_0 = G(\beta)$$

となる。先に述べたように、$a > \Gamma(D)$ ならば、$F(u)$ は $u = \hat{u}$ で最大になるから

$$-\alpha < \hat{u} < \beta < \lambda$$

である。Lemma 1 より

$$G(-\beta) > G(\beta)$$

であるから、$G(u)$ の単調性より

$$-\beta < -\alpha$$

であることがわかる。また、$F(u)$ は $-\lambda < u < \hat{u}$ において単調増加であるから

$$F(-\beta) < F(-\alpha) = F(\beta)$$

である。一方、条件 (8) より

$$F(\beta) < F(-\beta)$$

であるから矛盾が生じる。したがって、Theorem 2′ によって、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

Theorem 3 が示すように、方程式系 (1) が limit cycle をもたないための条件は

$$H(u) \equiv F(-u) - F(u)$$

が $0 < u < \lambda$ において正になる条件に帰着される。

Result 2. $a \le -2\log(1-D)$ ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

証明

$$\frac{1}{r}H(u) = \frac{(-u+\lambda)(1+u-\lambda)}{1-(1-D)e^{au}} - \frac{(u+\lambda)(1-u-\lambda)}{1-(1-D)e^{-au}}$$

であり、$0 < u < \lambda$ に対して

$$1-(1-D)e^{au} < 1-(1-D)e^{-au}$$

である。また、条件は $\lambda \ge \frac{1}{2}$ に書き直せるから

$$(-u+\lambda)(1+u-\lambda) - (u+\lambda)(1-u-\lambda) = 2u(2\lambda-1) \ge 0$$

となる。したがって

$$H(u) > 0 \quad \text{for} \quad 0 < u < \lambda$$

である。故に、Result 1 と Theorem 3 より、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

Result 2 の条件 $a \le -2\log(1-D)$ は easygoing であり、sharp な条件ではない。しかし、これでも、Bendixson の判定法から導かれる条件 (4) を含んでいる。正確に言うと、r をパラメータとして、いろいろ値を変化させて

$$r\left(1+\frac{2}{a}\log\frac{2r}{a}\right) - D + 1 - \frac{2r}{a} = 0 \tag{4'}$$

が表す曲線族を a–D 平面に描くと（それぞれの曲線の定義範囲は $2r < a$ である）、その包絡線が $a = -2\log(1-D)$ である。

Result 1 と Ressult 2 には包含関係はない。これらの結果を改良するためには、$H(u)$ をもっと詳しく調べなければならない。

$$H(u) = \frac{r\{(-u+\lambda)(1+u-\lambda)\big(1-(1-D)e^{-au}\big) - (u+\lambda)(1-u-\lambda)\big(1-(1-D)e^{au}\big)\}}{\big(1-(1-D)e^{au}\big)\big(1-(1-D)e^{-au}\big)}$$

であるから、$u \in \mathbf{R}$ に対して

$$\begin{aligned} L(u) &\equiv (-u+\lambda)(1+u-\lambda)\big(1-(1-D)e^{-au}\big) - (u+\lambda)(1-u-\lambda)\big(1-(1-D)e^{au}\big) \\ &= -2(1-2\lambda)u + (1-D)(1-2\lambda)u(e^{au}+e^{-au}) \\ &\qquad + (1-D)\{\lambda(1-\lambda)-u^2\}(e^{au}-e^{-au}) \\ M(u) &\equiv \big(1-(1-D)e^{au}\big)\big(1-(1-D)e^{-au}\big) \end{aligned}$$

とおく。このとき、$L(0) = L(\lambda) = 0$ であり

$$L'(u) = -2(1-2\lambda) + (1-D)\{(1-2\lambda) + a\lambda(1-\lambda) - au^2\}(e^{au} + e^{-au}) \\ + (1-D)\{a(1-2\lambda) - 2\}u(e^{au} - e^{-au})$$

となる。また、いくつかの補題が得られる。

LEMMA 2. $M(u) > 0$ for $0 < u < \lambda$.

LEMMA 3. $n \geq 2$ に対して

$$L^{(n)}(u) = (1-D)\Big[a^{n-1}\{a(1-2\lambda) - 2n\}u\big(e^{au} + (-1)^n e^{-au}\big) \\ + a^{n-2}\{an(1-2\lambda) - n(n-1) + a^2\lambda(1-\lambda) - a^2u^2\}\big(e^{au} + (-1)^{n+1}e^{-au}\big)\Big].$$

LEMMA 4. $\Delta(D) < 2 - 2\log(1-D)$ for $0 < D < 1$.

Lemma 4 は、条件 (7) が満たされるとき

$$a(1-2\lambda) - 2 < 0$$

であることを示している。したがって、Lemma 3 より、$n \geq 2$ かつ

$$an(1-2\lambda) - n(n-1) + a^2\lambda(1-\lambda) \leq 0$$

即ち

$$a \leq \frac{n(n-1) - 2n\log(1-D) + \big(\log(1-D)\big)^2}{n - \log(1-D)} \equiv \Omega_n(D) \tag{9$_n$}$$

ならば、$L^{(n)}(u) < 0$ for $0 < u < \lambda$ となる。また、$u = 0$ における $L(u)$ の $n(\geq 2)$ 次導関数の値は次のようになる。

$$L^{(n)}(0) = 0 \qquad (n : \text{偶数})$$

$$L^{(n)}(0) = 2(1-D)a^{n-2}\{an(1-2\lambda) - n(n-1) + a^2\lambda(1-\lambda)\} \qquad (n : \text{奇数})$$

さらに、条件 (7) は

$$D(1-2\lambda) - (1-D)a\lambda(1-\lambda) \leq 0$$

に書き換えられるから、条件 (7) が満たされるならば

$$L'(0) = -2(1-2\lambda) + 2(1-D)\{(1-2\lambda) + a\lambda(1-\lambda)\} \\ = -2\{D(1-2\lambda) - (1-D)a\lambda(1-\lambda)\} \geq 0$$

である。

関数 $\Omega_n(D)$ について、次の関係が成り立つ。

LEMMA 5. $\Omega_n(D) < \Omega_{n+1}(D)$ for $0 < D < 1$.

Lemma 5 によって、条件 $(9)_n$ が満たされれば、任意の自然数 $m \geq n$ に関する条件 $(9)_m$ も成立することがわかる。別の言い方をすれば、a–D 平面 $\{(a, D) : a > 0,\ 0 < D < 1\}$ が曲線

$$a = \Omega_n(D) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

によって分割されることを意味する。

漸く、Result 2 を含む次の結果を証明する準備が整った。

RESULT 3. $\Gamma(D) < a \le \Delta(D)$ ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

証明　$a > \Gamma(D)$ であるから、Theorem 3 と Lemma 2 により

$$L(u) > 0 \quad \text{for } 0 < u < \lambda \tag{10}$$

を示しさえすればよい。便宜上、場合分けを行う。

Case 1: $a \le \Omega_2(D)$. このとき、$0 < u < \lambda$ に対して $L''(u) < 0$ であるから、$L'(u)$ は単調減少関数である。また、条件 $a \le \Delta(D)$ より $L'(0) \ge 0$ であるから、$L'(u)$ は常に正である or ある $\mu_1 \ge 0$ が存在して

$$L'(u) > 0 \quad (0 < u < \mu_1); \qquad L'(\mu_1) = 0; \qquad L'(u) < 0 \quad (\mu_1 < u < \lambda)$$

のどちらかである。しかし、$L(0) = L(\lambda) = 0$ に注意すると、前者にはならない。したがって、$L(u)$ は $0 < u < \mu_1$ において単調増加し、$\mu_1 < u < \lambda$ において単調減少するので、(10) が成り立つ。

Case 2: $\Omega_2(D) < a \le \Omega_3(D)$. このとき、$0 < u < \lambda$ に対して $L'''(u) < 0$ であるから

$$L''(u) < L''(0) = 0 \qquad \text{for } 0 < u < \lambda$$

となる。したがって、Case 1 と同じ議論によって、(10) が成り立つ（条件 $\Omega_2(D) < a$ は形式的であり、使わない）。

Case 3: $\Omega_3(D) < a \le \Omega_4(D)$. このとき、$0 < u < \lambda$ に対して $L^{(4)}(u) < 0$ かつ $L'''(0) > 0$ であるから、$L'''(u)$ は常に正である or ある $\mu_3 > 0$ が存在して

$$L'''(u) > 0 \quad (0 < u < \mu_3); \qquad L'''(\mu_3) = 0; \qquad L'''(u) < 0 \quad (\mu_3 < u < \lambda)$$

のどちらかである。また、$L''(0) = 0$ であるから、$L'''(u)$ がどちらの場合であっても、$L''(u)$ は常に正であるか or ある $\mu_2 > \mu_3$ が存在して

$$L''(u) > 0 \quad (0 < u < \mu_2); \qquad L''(\mu_2) = 0; \qquad L''(u) < 0 \quad (\mu_2 < u < \lambda)$$

のどちらかである。さらに、条件 $a \le \Delta(D)$ より $L'(0) \ge 0$ であるので、$L'(u)$ も常に正である or ある $\mu_1 > \mu_2$ が存在して

$$L'(u) > 0 \quad (0 < u < \mu_1); \qquad L'(\mu_1) = 0; \qquad L'(u) < 0 \quad (\mu_1 < u < \lambda)$$

のどちらかである。ところが、$L(0) = L(\lambda) = 0$ であるので、$L'(u)$ が常に正であることは不可能である。したがって、$L(u)$ は $0 < u < \mu_1$ において単調増加し、$\mu_1 < u < \lambda$ において単調減少する（このことから、μ_2 と μ_3 は存在することになる）。故に、(10) が成り立つ。

Case n: $\Omega_n(D) < a \le \Omega_{n+1}(D)$. このとき、$0 < u < \lambda$ に対して $L^{(n+1)}(u) < 0$ となる。また、$1 < k \le n$ に対して

$$L^{(k)}(0) = 0 \quad (k: \text{偶数}); \qquad L^{(k)}(0) > 0 \quad (k: \text{奇数})$$

となる。さらに、

$$L'(0) \ge 0, \qquad L(0) = L(\lambda) = 0$$

である。したがって、上記の場合と同様の議論によって

$$0 < \mu_n < \cdots < \mu_2 < \mu_1 < \lambda$$

が存在して

$$L^{(k)}(u) > 0 \quad (0 < u < \mu_k); \qquad L^{(k)}(\mu_k) = 0; \qquad L^{(k)}(u) < 0 \quad (\mu_k < u < \lambda)$$

となる。ただし、$k = 1, 2, \ldots, n$ である。故に、(10) が成り立つことがわかる。

Example 2 は limit cycle が存在しない例であった。これは Results 1, 2 では説明できなかったが、Result 3 を適用することができる。実際

$$\Gamma(0.7) \approx 2.876247490, \qquad \Delta(0.7) \approx 3.691460019$$

である。

Results 1 and 3 を合わせると、次の結果が得られる。

RESULT 4. $a \leq \Delta(D)$ ならば、方程式系 (1) は limit cycle をもたない。

Result 4 によって、$a > \Delta(D)$ は方程式系 (1) が limit cycle をもつための必要条件であることがわかった。また逆に、$a > \Delta(D)$ は十分条件でもあることが証明できる。即ち、次の結果が成り立つ。

MAIN THEOREM. 方程式系 (1) が唯一つの limit cycle をもつための必要十分条件は

$$a > \Delta(D) = -\frac{2D + (1-D)\log(1-D)}{D + (1-D)\log(1-D)} \log(1-D) \tag{11}$$

である。

十分性を示すために、方程式系 (1) と同値な方程式系 (5) について考える。まず、記号を導入する。任意の点 $P \in \{(u, v) : u > -\lambda \text{ and } v \in \mathbf{R}\}$ を通る方程式系 (5) の positive semitrajectory, negative semitrajectory をそれぞれ $T^+(P)$, $T^-(P)$; y 軸の正の部分を Y^+, 負の部分を Y^- と書く。

方程式系 (5) の解軌道は曲線

$$v = \log \frac{r(u+\lambda)(1-u-\lambda)}{\nu\bigl(1-(1-D)e^{-au}\bigr)} \equiv C(u)$$

に交わるならば、これを垂直に横切る。この曲線は $(-\lambda, 1-\lambda)$ で定義される。条件 (11) の下では、$F(u)$ の性質と同じく、$C(u)$ は $-\lambda < u < \hat{u}$ において単調増加、$\hat{u} < u$ において単調減少する。また、$C(0) = 0$; $\hat{u} > 0$; $\lambda < \frac{1}{2}$; $\frac{r}{a} < \nu$;

$$C(u) \to \log \frac{r}{\nu a} = \log \frac{D}{a\lambda(1-\lambda)} \quad \text{as } u \to -\lambda, \qquad C(u) \to -\infty \quad \text{as } u \to 1-\lambda$$

である。Main Theorem を証明するため、いくつか Lemma が必要である。

LEMMA 6. $a > \Delta(D)$ であるとする。このとき、任意の $P \in Y^+$ に対して、$T^-(P)$ は平面 $\{(u, v) : -\lambda < u \leq 0 \text{ and } v \in \mathbf{R}\}$ において曲線 $v = C(u)$ を横切り、その後 Y^- に交わる。

LEMMA 7. $a > \Delta(D)$ であるとする。このとき、$T^+(P)$ が平面 $\{(u,v) : u \geq 0 \text{ and } v \in \mathbf{R}\}$ において曲線 $v = C(u)$ に交わらないような $P \in Y^+$ が存在する。

LEMMA 8. $P \in Y^+$ を原点近傍内の点とする。このとき、$T^+(P)$ は 第1象現を通って原点に漸近するかまたは原点の周囲を回って P より原点に近い Q で再び Y^+ に交わる。

Main Theorem の証明　Lemma 7 により、原点から十分離れた $P_1 \in Y^+$ に対して、$T^+(P_1)$ は曲線 $v = C(u)$ の上の領域を通って、左から右へ流れ、無限遠点へ向かう。また、Lemma 6 から、$T^-(P_1)$ は平面 $\{(u,v) : -\lambda < u \leq 0 \text{ and } v \in \mathbf{R}\}$ を通って、Y^- に交わる。方程式系 (5) のベクトル場より、$T^-(P_1)$ はその後再び Y^+ に交わる。その交点を P_2 とする。解の初期値に関する一意性から、$T^-(P_1)$ は $T^+(P_1)$ に交わらないので、P_2 は P_1 より下に位置することがわかる。$T^-(P_1)$ の弧 P_1P_2 と線分 P_1P_2 によって囲まれる領域を R_1 とする。

$P_3 \in Y^+$ を原点に十分近い点とするとき、Lemma 8 より、$T^+(P_3)$ は第1象現を通って原点に漸近するかまたはP_3 よりさらに原点に近い点 P_4 に交わる。前者の場合、$T^-(P_3)$ は Lemma 6 と初期値に関する解の一意性より、P_3 より上に位置する P_5 で再び Y^+ に交わる。$T^-(P_3)$ の弧 P_3P_5 と線分 P_3P_5 によって囲まれる領域を R_2 とする。後者の場合、$T^+(P_3)$ の弧 P_3P_4 と線分 P_3P_4 によって囲まれる領域を R_2 とする。

このとき、環状領域 $R_1 \backslash R_2$ は Bendixson sack になっている（即ち、如何なる解軌道も領域 $R_1 \backslash R_2$ に留まれない）。したがって、Poincaré Bendixson の定理より、領域 $R_1 \backslash R_2$ 内に limit cycle が少なくとも一つ存在することがわかる。方程式系 (5) と方程式系 (1) は同値であるから、方程式系 (1) も少なくとも一つ limit cycle をもつ。

ところで、条件 (11) が成り立てば、$a > 2$ が満たされる（Figure 9 を見よ）。したがって、Theorem 1 (i) より、limit cycle は高々一つである。故に、方程式系 (1) の limit cycle は唯一つ存在する（これは stable limit cycle である）。

Kuang and Freedman [4] は Gause 型生態モデル

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\rho(x) - y\phi(x) \\ \dot{y} &= y\big(-\nu + \psi(x)\big) \end{aligned} \tag{12}$$

が limit cycle を唯一つもつための十分条件を与えた。

THEOREM 4. $0 < x^* < m$ である定数 x^* と m が存在して

$$\phi(0) = \psi(0) = 0 \quad \text{and} \quad \phi'(x) > 0,\ \psi'(x) > 0 \quad \text{for } x > 0; \tag{13}$$

$$\psi(x^*) = \nu \quad \text{and} \quad (x-m)\rho(x) < 0 \quad \text{for } x \neq m; \tag{14}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\rho(x)}{\phi(x)}\right)\bigg|_{x=x^*} > 0 \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\rho'(x) + \rho(x) - x\rho(x)\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}}{-\nu + \psi(x)}\right) \leq 0 \quad \text{for } x \neq x^* \tag{16}$$

であるならば、方程式系 (12) は唯一つの limit cycle をもつ。

この結果を方程式系 (1) にも適用できるか試してみる。この場合

$$\rho(x) = r(1-x); \qquad \phi(x) = \psi(x) = 1 - e^{-ax}; \qquad \nu = D$$

であるから、$\phi(0) = \psi(0) = 0$;

$$\phi'(x) = \psi'(x) = ae^{-ax} > 0 \qquad \text{for } x > 0$$

となり、(13) は成り立つ。また、(14) を満たすためには、$m = 1$; $x^* = -\frac{1}{a}\log(1-D) = \lambda$ でなければならない。さらに、

$$\frac{x\rho(x)}{\phi(x)} = \frac{rx(1-x)}{1-e^{-ax}}$$

であるから

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\rho(x)}{\phi(x)}\right) = \frac{r}{(1-e^{-ax})^2}\{(1-2x)(1-e^{-ax}) - ax(1-x)e^{-ax}\}$$

となり、条件 $a > \Delta(D)$ より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{x\rho(x)}{\phi(x)}\right)\bigg|_{x=\lambda} &= \frac{r}{D^2}\{(1-2\lambda)D - a\lambda(1-\lambda)(1-D)\}\\ &= \frac{r}{aD^2}\Big[\{a+\log(1-D)\}\{D+(1-D)\log(1-D)\} + D\log(1-D)\Big]\\ &> 0.\end{aligned}$$

したがって、(15) も満たされる。

しかし、条件 $a > \Delta(D)$ だけでは、(16) は成立しない。実際、計算すると

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x\rho'(x)+\rho(x)-x\rho(x)\frac{\phi'(x)}{\phi(x)}}{-D+\psi(x)}\right) = -\frac{re^{ax}p(x)}{\left(1-(1-D)e^{ax}\right)^2};$$

となる。ただし

$$\begin{aligned}p(x) = {}&\{2(1-a)+a(4-a)x+a^2x^2\} - 2(1-a+2ax)e^{ax}\\ &-(1-D)(2-a+2ax)e^{ax} + (1-D)(2-a+2ax)e^{2ax}\end{aligned}$$

である。したがって、(16) が満たされるためには、$p(x) > 0$ for $x \neq \lambda$ でなければならない。ところが、例えば、$a = 3$, $D = 0.1$ の場合は

$$\lambda = -\frac{1}{3}\log(0.9) \approx 0.03512017189;$$

$$p(x) = -4 + 3x + 9x^2 + (4.9 - 17.4x)e^{3x} - (0.9 - 5.4x)e^{6x}$$

となり

$$p(0.1) \approx -0.0004089362004$$

である（この場合は、$a > \Delta(D)$ となり、方程式系 (1) は limit cycle を唯一つもつ）。

故に、方程式系 (1) が limit cycle を唯一つもつための（必要）十分条件は

$$a > \Delta(D)$$

であることを示すために、Theorem 4 は役に立たないことがわかる。

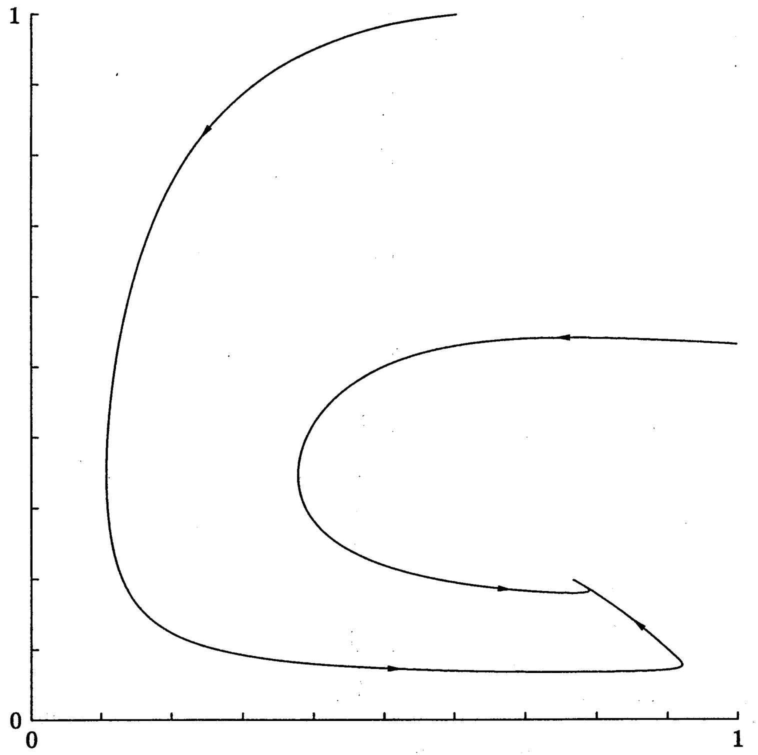

Fig. 1. $\dot{x} = x(1-x) - (1-e^{-3x})y, \quad \dot{y} = y(\frac{1}{10} - e^{-3x})$.

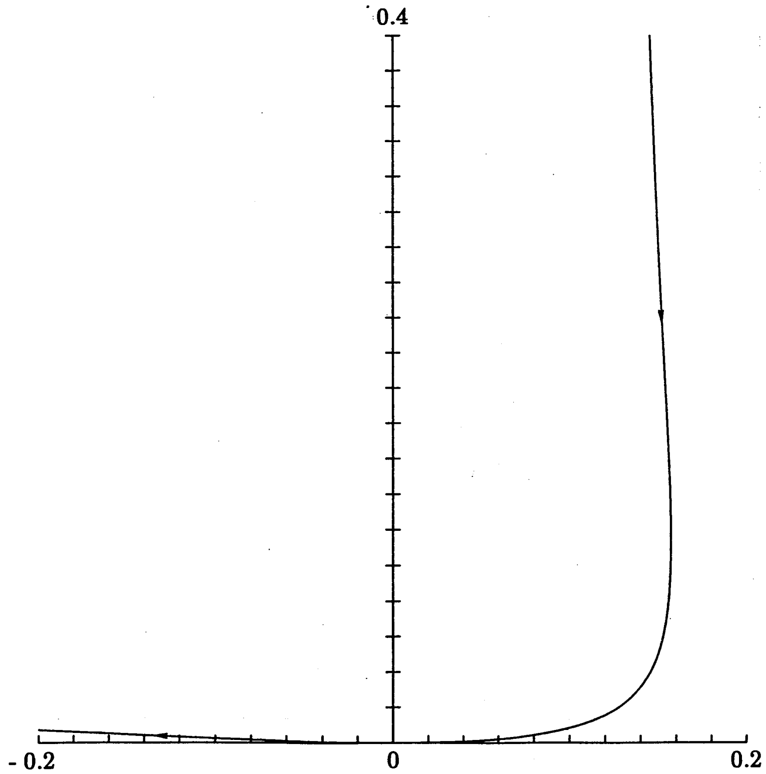

Fig. 2. ; $a = 3,\ r = 1,\ D = \frac{9}{10}$.

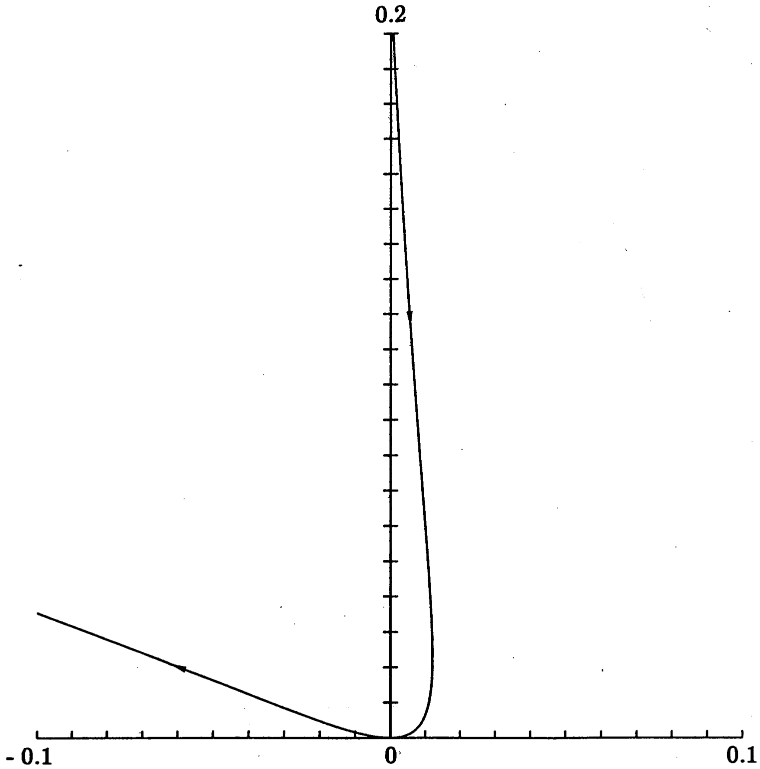

Fig. 3. $a = 3, \quad r = 1, \quad D = \frac{7}{10}.$

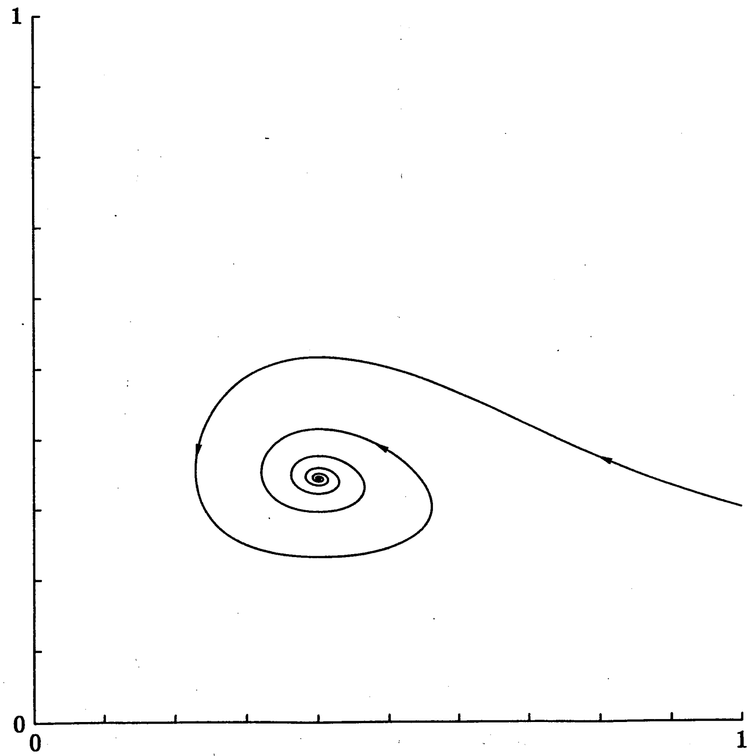

Fig. 4. $\dot{x} = x(1-x) - (1 - e^{-3x})y, \quad \dot{y} = y(\frac{3}{10} - e^{-3x}).$

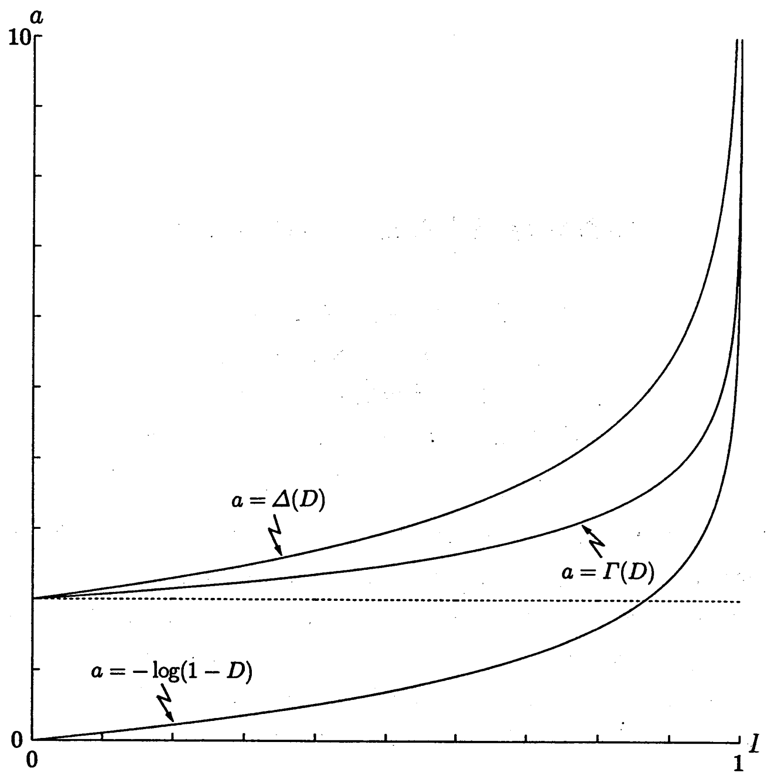

Fig. 5.　方程式系 (1) が limit cycle をもたない範囲 (a–D 平面)

REFERENCES

1. A. Gasull and A. Guillamon, Non-existence of limit cycles for some predator-prey systems, *in* "Proceedings of Equadiff' 91," pp. 538–543, World Scientific, Singapore, 1993.
2. V. S. Ivlev, "Experimental Ecology of the Feeding of Fishes," Yale Univ. Press, New Haven, CT, 1961.
3. R. E. Kooij and A. Zegeling, A predator-prey model with Ivlev's functional response, *J. Math. Anal. Appl.* **198** (1996), 473–489.
4. Y. Kuang and H. I. Freedman, Uniqueness of limit cycles in Gause-type models of predator-prey systems, *Math. Biosci.* **88** (1988), 67–84.
5. R. May, "Stability and Complexity in Model Ecosystems," 2nd ed., Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.
6. M. L. Rosenzweig, Paradox of enrichment: Destabilization of exploitation ecosystems in ecological time, *Science* **171** (1971), 385–387.
7. J. Sugie, K. Kohno and R. Miyazaki, On a predator-prey system of Holling type, *Proc. Amer. Math. Soc.* (in press)
8. J. Sugie, K. Miyamoto and K. Morino, Absence of limit cycles of a predator-prey system with a sigmoid functional response, *Appl. Math. Lett.* **9** (1996), 85–90.