数理解析研究所講究録
986 巻 1997 年 136-146

連立代数方程式の近接根の分離と擬局所化の可能性について

鈴木秀男
東京職業能力開発短大・情報処理 [1)]

小林英恒
日本大学理工・数学 [2)]

1. はじめに

筆者らは、これまで数値計算によって連立代数方程式の解の重複度を求めることを研究してきた[1)]。その成果として重複度の数値的な計算法を考案した[2)]。この方法は、連立代数方程式の解の重複度を数値計算により、ある程度分離性を保ちつつ、真の重複度をプラス方向とマイナス方向から挟み込むものである[3)]。しかし、アルゴリズムの性質上、非常に近接した根が現われる可能性があり、もしそのような場合に、近接根を分離できなければもとの根の重複度が求まらない。

そこで、筆者らは一次分数変換を利用し近接根の分離を行なった[4),5)]。さらに、一次分数変換を用いることにより、連立代数方程式の解(重根、近接根も含め)を高精度で計算出来ることを示した[6)]。ここでは、連立代数方程式に一次分数変換を適用し、近接根が分離できること、また、多変数の場合の擬局所化の可能性について数値実験を行なったので報告する。

2. 一次分数変換

斉次座標系 $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ を用いて表現された多項式 $F(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ を次の射影変換を用いて座標の変換を行なう。

$$\begin{aligned} U_0 &= a_{00}X_0 + a_{01}X_1 + \cdots + a_{0n}X_n \\ U_1 &= a_{10}X_0 + a_{11}X_1 + \cdots + a_{1n}X_n \\ &\cdots \\ U_n &= a_{n0}X_0 + a_{n1}X_1 + \cdots + a_{nn}X_n \end{aligned} \tag{1}$$

1) Hideo Suzuki, Tokyo Polytechnic College, 2-32-1 Ogawa-nishi Kodaira Tokyo 187 Japan
2) Hidetsune Kobayashi, Nihon University, 1-8-14 Kanda-surugadai Chiyoda Tokyo 101 Japan

ここで、係数行列は正則であるから、逆変換も同様に定義することができる。

$$\begin{aligned} X_0 &= \tilde{a}_{00}U_0 + \tilde{a}_{01}U_1 + \cdots + \tilde{a}_{0n}U_n \\ X_1 &= \tilde{a}_{10}U_0 + \tilde{a}_{11}U_1 + \cdots + \tilde{a}_{1n}U_n \\ &\cdots \\ X_n &= \tilde{a}_{n0}U_0 + \tilde{a}_{n1}U_1 + \cdots + \tilde{a}_{nn}U_n \end{aligned} \tag{2}$$

このとき、連比にアフィン空間の点

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (X_1/X_0, X_2/X_0, \cdots, X_n/X_0) \tag{3}$$

を対応させることで射影空間の点とアフィン空間の点とが対応付けられる。すなわち、アフィン空間での各座標は一次分数変換の形で与えられる。

(1) 式の係数の取り方により各種の一次分数変換が存在する。

射影変換をうまく選んで超平面 $U_0 = 0$ は、元の方程式の根を含まないようにとって、この超平面 $U_0 = 0$ を新たな無限遠超平面とするとき有限部分での方程式の根が元の方程式の根と重複度も含めて 1 対 1 に対応する。

3. 一次分数変換の型

連立代数方程式

$$\begin{cases} f_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ \qquad \cdots \\ f_n(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

の近接根を分離するための具体的な一次分数変換の型を示す。はじめに、分離したい根の範囲を定める。分離領域を決めるには、実部と虚部をそれぞれ別のパラメータとして取り、個々の領域を矩形領域とすることも出来る。ここでは、実部と虚部を区別せずに 1 つのパラメータとして表すために ϵ 近傍を利用する。

適当な複素数 α と実数 ϵ に対し

$$W(\alpha;\epsilon) = \{z \in C \mid |z - \alpha| < \epsilon\} \tag{5}$$

とするとき、複素数 α_j と実数 $\epsilon_j, j = 1, \cdots, n$ に対し

$$W(\alpha_1, \cdots, \alpha_n; \epsilon_1, \cdots, \epsilon_n) = W(\alpha_1; \epsilon_1) \times \cdots \times W(\alpha_n; \epsilon_n) \tag{6}$$

とし、この範囲にある根を分離する。ただし、ϵ は、正で 1 より小さい数とする。

すでに述べたことであるが (1) 式の係数の取り方により様々な型の一次分数変換が存在するが、ここでは、一次分数変換の具体的な型として

$$\sum_{j \in I} x_j - \sum_{j \in I} \alpha_j + \sum_{j \in I} \gamma_j = 0 \tag{7}$$

を新たな無限遠超平面に変換するような一次分数変換を考える。ただし、この超平面上に連立代数方程式の解は存在しないものとする。ここで、I は添字の集合であり、$\gamma_j = k_j \epsilon_j\ (k_j \geq 1)$ である。集合 I の選び方により、種々の無限遠超平面を決めることができる。

逆に、もとの無限遠超平面は

$$\sum_{j \in I} u_j - 1 = 0 \tag{8}$$

と変換される。

具体的には係数行列を

$$\begin{pmatrix} \sum_{j \in I}(\gamma_j - \alpha_j) & \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \cdots & \delta_n \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix} \tag{9}$$

逆一次分数変換に対しては

$$\begin{pmatrix} 1 & -\delta_1 & -\delta_2 & -\delta_3 & \cdots & -\delta_n \\ \alpha_1 & \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \delta_j + \sum_{j \in I}(\gamma_j - \alpha_j) & -\alpha_1 \delta_2 & -\alpha_1 \delta_3 & \cdots & -\alpha_1 \delta_n \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \delta_1 & \sum_{j=1, j \neq 2}^{n} \alpha_j \delta_j + \sum_{j \in I}(\gamma_j - \alpha_j) & -\alpha_2 \delta_3 & \cdots & -\alpha_2 \delta_n \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix} \tag{10}$$

と選べばよい。ここに、$\delta_i = 1 (i \in I), \delta_i = 0 (i \notin I)$ である。以下では、全てこの型の一次分数変換を利用する。

2 変数の場合に $I = \{1\}$ とすれば、次のような一次分数変換となる。

$$u = \frac{x - \alpha_1}{x - \alpha_1 + \gamma_1}, v = \frac{y - \alpha_2}{x - \alpha_1 + \gamma_1} \tag{11}$$

であり逆変換は

$$x = \frac{(\gamma_1 - \alpha_1)u + \alpha_1}{1 - u}, y = \frac{\gamma_1 v - \alpha_2 u + \alpha_2}{1 - u} \tag{12}$$

である。また、$I = \{2\}$ のときは

$$u = \frac{x - \alpha_1}{y - \alpha_2 + \gamma_2}, v = \frac{y - \alpha_2}{y - \alpha_2 + \gamma_2}$$

$$x = \frac{\gamma_2 u - \alpha_1 v + \alpha_1}{1 - v}, y = \frac{(\gamma_2 - \alpha_2)v + \alpha_2}{1 - v}$$

となり、$I = \{1, 2\}$ のときは

$$u = \frac{x - \alpha_1}{x - \alpha_1 + \gamma_1 + y - \alpha_2 + \gamma_2}, v = \frac{y - \alpha_2}{x - \alpha_1 + \gamma_1 + y - \alpha_2 + \gamma_2}$$

$$x = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 - \alpha_1)u - \alpha_1 v + \alpha_1}{1 - u - v}, y = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2 - \alpha_2)v - \alpha_2 u + \alpha_2}{1 - u - v}$$

となる。

4. 根の移動

具体的な一次分数変換の型が定まったので、次にこれらの変換により元の空間での根がどのように変換されるかを考察する。

一般の点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ は

$$u_j=\frac{x_j-\alpha_j}{\sum_{l\in I}(x_l-\alpha_l+\gamma_l)} \tag{13}$$

を要素に持つ点 $u=(u_1,\cdots,u_n)$ へ変換される。

領域 $W(\alpha_1,\cdots,\alpha_n;\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n)$ に含まれる点については、その要素が $x_j=\alpha_j+c_j\epsilon_j$ $(|c_j|\leq 1)$ と書けるから

$$u_j=\frac{c_j\epsilon_j}{\sum_{l\in I}(k+c_l)\epsilon_l} \tag{14}$$

となる。$|c_l|\leq 1,\epsilon\ll 1$ であるから k の値をある程度大きくしても、各 u_j は元の空間での値に比べ分離されていることが分かる。とくに $\epsilon_1=\epsilon_2=\cdots=\epsilon$ のときは $u_j=c_j/\sum_{l\in I}(k+c_l)$ となり ϵ に関係しない。

また領域 W に含まれない点については

$$\sum_{j\in I}u_j=\frac{1}{1+\dfrac{\sum_{l\in I}\gamma_l}{\sum_{j\in I}(x_j-\alpha_j)}} \tag{15}$$

となり、$O(\sum\gamma_l/\sum(x_j-\alpha_j))$ の割合で右辺の値は 1 へ近づくことが分かる。したがって領域 W に含まれない点は、領域から離れるほど、あるいは ϵ が小さくなるほど超平面 $\sum_{j\in I}u_j-1=0$ に近づくことになる。

一方一次分数変換された方程式を解いた数値解を元の方程式の解へ変換するには

$$x_i=\frac{\sum_{j\in I}\gamma_j u_i-(\sum_{j\in I}u_j-1)\alpha_i}{1-\sum_{j\in I}u_j}$$

を利用すればよい。

5. 一次分数変換による誤差と擬局所化

一次分数変換された連立代数方程式 $G(u)=0$ を数値計算で解いた場合の誤差については、次が成り立つ。

命題 1 $G(u)=0$ の近似解の一つを $u=(u_1,\cdots,u_n)$ とし、それに対する厳密解 $\tilde{u}=(\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_n)$ との差を $\Delta u_j=|u_j-\tilde{u}_j|$ とする。また、u をもとの空間へ逆変換したときの誤

差を$\Delta x_j = |x_j - \tilde{x}_j|$とおくとき、次が成り立つ。

$$\Delta x_j \fallingdotseq \sum_{l\in I} \gamma_l \Delta u_j \tag{16}$$

ただし、Iは添字の集合であり、$\gamma_l = k\epsilon_l\ (k > 1)$である。

[証明]　連立代数方程式$F(x) = 0$を一次分数変換した方程式を$G(u) = 0$とおく。$G(u) = 0$の近似解の一つを$u = (u_1, \cdots, u_n)$、それに対する厳密解を$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_n)$とおく。$\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_n)$に対応する$F(x) = 0$の厳密解を$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n)$とおく。

$$\Delta u_j = |u_j - \tilde{u}_j|, \Delta x_j = |x_j - \tilde{x}_j| \tag{17}$$

とおくと次の関係が成り立つ。ただし、一般性を失うことなしに$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$とした。

$$\begin{aligned}\Delta x_j = |x_j - \tilde{x}_j| &= \left|\frac{\sum_{l\in I}\gamma_l u_j}{1 - \sum_{l\in I} u_l} - \frac{\sum_{l\in I}\gamma_l \tilde{u}_j}{1 - \sum_{l\in I} u_l}\right| \\ &= \left|\frac{(1 - \sum_{l\in I} u_l)u_j - (1 - \sum_{l\in I} u_l)\tilde{u}_j}{(1 - \sum_{l\in I} u_l)(1 - \sum_{l\in I} u_l)} \sum_{l\in I}\gamma_l\right| \end{aligned} \tag{18}$$

ここで近接根を考えているので、$|u_1| \ll 1, \cdots, |u_n| \ll 1$である。したがって、上式は

$$\begin{aligned}\Delta x_j &\fallingdotseq \left|(u_j - \tilde{u}_j)\sum_{l\in I}\gamma_l\right| \\ &= \sum_{l\in I}\gamma_l \Delta u_l \end{aligned} \tag{19}$$

のようになる。□

したがって、$\sum \gamma_l \ll 1$となるようにγ_lを選べば、変換された方程式を解いて、その近似解を元の空間へ戻しても精度が保証される。

さらに、領域Wから離れている根は、ある特定の超平面に近づく。この性質を利用すれば、次数を低下させることが出来る。この操作を減次と言う。具体的には

$$G(u_1, \cdots, u_n) = H(u_1, \cdots, u_n)(\sum_{j\in I} u_j - 1) + R(u_1, \cdots, u_{k-1}, u_{k+1}, \cdots, u_n) \qquad k \in I \tag{20}$$

で減次を行なう。このような減次を繰り返し行なえばより低次の多項式が得られる。減次した多項式を元の空間へ戻せば擬局所化を行なったことになるので以下では減次を中心に考える。

先に示した2変数で$I = \{1\}, I = \{2\}, I = \{1, 2\}$の場合には、それぞれ

$$g_1(u, v) = h_1(u, v)(u - 1) + r_1(v) \tag{21}$$
$$g_1(u, v) = h_1(u, v)(v - 1) + r_1(v) \tag{22}$$
$$g_1(u, v) = h_1(u, v)(v + u - 1) + r_1(v) \tag{23}$$

を用いて次数を減らすことが出来る。

しかし、多変数の場合は１変数の場合と違い、その解析的評価をするのは難しい。

筆者らは主に次のことを現在行なっている。

1. 減次可能であるための評価

   [方法１]

   ２変数連立代数方程式を一次分数変換したものを

$$
\begin{aligned}
g_1(u,v) &= a_0(u)v^n + a_1(u)v^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(u)v + a_n(u) = 0 \\
g_2(u,v) &= b_0(u)v^m + b_1(u)v^{m-1} + \cdots + b_{m-1}(u)v + b_m(u) = 0
\end{aligned}
$$

   とする。これらの方程式が共通根を持つための必要十分条件は終結式(Resultant) $R(g_1, g_2)$ が０になることである。

   $R(g_1, g_2)$ は、u についての１変数多項式となり、実は近接根以外の根が存在すれば、それらは$\sum u - 1 = 0$へ近づく。したがって、$R(g_1, g_2) = 0$ の根で$\sum u - 1 = 0$ の近くにあるものの個数を数えればよい。今、この個数が s であるとするとき

   (a) $(n-1)m \geq nm - s \quad \cdots \quad g_1$を減次

   (b) $n(m-1) \geq nm - s \quad \cdots \quad g_2$を減次

   (c) $(n-1)(m-1) \geq nm - s \quad \cdots \quad g_1, g_2$を減次

   により減次が可能である。

   [方法２]

   $r(v)$ の係数と他の項の係数の大きさを比較

   [方法３]

   $r(v)$ の零点の存在領域を利用

2. 減次の際の解析的な誤差評価

   各種数値実験の結果からϵのべき乗のオーダーで評価可能

3. 最適な一次分数変換の型

   一次分数変換や減次にともなう誤差、変換しやすさなどを考慮

6. 数値例

連立代数方程式の近接根の分離と、減次したときの数値実験の結果を示す。

例 1. 次の２変数連立代数方程式を考える。

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) = x^5 &- \frac{1000000001}{50000}x^4 - 10x^3y^2 - \frac{7999999996000000001}{10000000000}x^3 + \frac{3000000003}{25000}x^2y^2 \\
&+ \frac{8000000001000000001}{500000000000000}x^2 + 5xy^4 + \frac{2399999998800000003}{10000000000}xy^2 + \frac{1999999999}{2500000000}x \\
&- \frac{1000000001}{50000}y^4 - \frac{8000000001000000001}{500000000000000}y^2 - \frac{1}{625000} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_2(x,y) = y(x^4 &- \frac{1000000001}{62500}x^3 - 2x^2y^2 - \frac{2399999998800000003}{50000000000}x^2 + \frac{1000000001}{62500}xy^2 \\
&+ \frac{8000000001000000001}{1250000000000000}x + \frac{1}{5}y^4 + \frac{7999999996000000001}{50000000000}y^2 + \frac{1999999999}{12500000000}) = 0
\end{aligned}
$$

表 1 分数変換による数値解

No.	$g_1=0, g_2=0$	$h_1=0, g_2=0$
1	-0.1111111111111111 $0.282419641936\times10^{-16}$	-0.1111111111111113 $0.1935549369800\times10^{-16}$
2	0.04761904761904762 $0.1428571428571428i$	0.04761904761904721 $0.1428571428571428i$
3	0.1304347826086956 $0.04347826086956520i$	0.1304347826086958 $0.04347826086956431i$
パスの数	25	20
計算時間	5.2450 秒	3.4599 秒

No.	$g_1=0, h_2=0$	$h_1=0, h_2=0$
1	0.1111111111111111 $0.400755167384\times10^{-16}$	-0.1111111111111113 $0.2973610986233\times10^{-16}$
2	0.04761904761904751 $0.885321662790\times10^{-16}$	0.04761904761904712 $0.1428571428571425i$
3	0.1304347826086955 $0.04347826086956519i$	0.1304347826086956 $0.04347826086956436i$
パスの数	20	16
計算時間	2.5200 秒	2.2097 秒

各段は、上段が u の値で、下段が v の値である。

f_1, f_2を分数変換した式を g_1, g_2とし、g_1, g_2を減次したものを、それぞれ h_1, h_2とする。

方程式を一次分数変換し数値計算で解いたときの解と、減次したときの解のいくつかを表 1 にまとめた。

表 1 から減次をしても精度良く計算されていることが分かる。また、一番下に計算時間を示したが、減次にともない計算時間が短縮されているのが分かる。

例 2. 次の 2 変数連立代数方程式を考える。

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y) = {} & x^5 - 1/25000x^4 - 10x^3y^2 - 1/2000000000x^3 + 3/12500x^2y^2 \\
& +1/50000000000000x^2 + 5xy^4 + 3/2000000000xy^2 \\
& +1/2500000000000000000x - 1/25000y^4 - 1/50000000000000y^2 \\
& -1/6250000000000000000000000 \\
f_2(x,y) = {} & 5y(x^4 - 1/31250x^3 - 2x^2y^2 - 3/10000000000x^2 + 1/31250xy^2 \\
& +1/125000000000000x + 1/5y^4 + 1/10000000000y^2 \\
& +1/1250000000000000000000)
\end{aligned}
$$

一次分数変換を適用すると

$$
g_1(u,v) = x^5 - 505/2772x^4 - 152875/16632x^3y^2 - 1325/16632x^3
$$

$$
\begin{aligned}
&+2125/1386x^2y^2+5/396x^2+625/154xy^4+125/792xy^2\\
&+5/5544x-625/2079y^4-125/8316y^2-1/8316\\
g_2(u,v)=&\ y(x^4-1477/8013x^3-9625/5342x^2y^2-223/5342x^2\\
&+625/2671xy^2+16/2671x+1250/8013y^4+125/16026y^2\\
&+1/16026)
\end{aligned}
$$

となり、これより終結式は

$$
\begin{aligned}
R(u)=u^4(&u^{21}-1.38431u^{20}+0.690170u^{19}-0.0883529u^{18}-0.0499670u^{17}\\
&+0.0221795u^{16}-0.00219049u^{15}-0.000639936u^{14}\\
&+0.000200914u^{13}-0.0000128159u^{12}-0.00000299033u^{11}\\
&+0.000000626895u^{10}-0.0000000280770u^9-0.00000000424112u^8\\
&+0.000000000623005u^7-0.0000000000213689u^6-1.49112\times10^{-12}u^5\\
&+1.51416\times10^{-13}u^4-3.00281\times10^{-15}u^3-1.56609\times10^{-16}u^2\\
&+8.57027\times10^{-18}u-1.19864\times10^{-19})
\end{aligned}
$$

となる。したがって

$$res(1)=-1.25\times10^{40}$$

であるから減次は不可である。

例 3. 次の 2 変数連立代数方程式を考える。

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y)=&\ x^5-1000000003/100000x^4-10x^3y^2\\
&-49999999998499999999/5000000000x^3+3000000009/50000x^2y^2\\
&-3999999985000000001/500000x^2+5xy^4\\
&+14999999995499999997/5000000000xy^2+1199999999/5x\\
&-1000000003/100000y^4+3999999985000000001/500000y^2-1600\\
f_2(x,y)=&\ 5y(x^4-1000000003/125000x^3-2x^2y^2\\
&-14999999995499999997/25000000000x^2+1000000003/125000xy^2\\
&-3999999985000000001/1250000x+1/5y^4\\
&+49999999998499999999/25000000000y^2+1199999999/25)
\end{aligned}
$$

一次分数変換を適用したものを $g_1^{(0)}(u,v), g_2^{(0)}(u,v)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
g_1^{(0)}(u,v)=&\ u^5-3.25758u^4-0.757576u^3v^2+3.78788u^3+2.27273u^2v^2\\
&-1.81818u^2+9.4697e-18uv^4-2.27273uv^2+0.30303u\\
&-9.4697e-18v^4+0.757576v^2-0.0151515\\
g_2^{(0)}(u,v)=&\ v(u^4-3.13043u^3+0.00000000543478u^2v^2+3.3913u^2
\end{aligned}
$$

表 2 分数変換による数値解

No.	$g_1^{(0)} = 0, g_2^{(0)} = 0$
1	(0.1666666667e+00, 0.4541327701e-16) (0.2710935298e-16, 0.8540000598e-17)
2	(0.9090909091e-01, 0.4116051894e-16) (-0.1076769366e-16,-0.8227650988e-17)
3	(0.1304347826e+00,-0.9099747652e-17) (-0.5830217699e-16, 0.4347826087e-01)
4	(0.1304347826e+00,-0.5867430828e-17) (-0.1020479756e-16,-0.4347826087e-01)

$$
\begin{aligned}
&-0.0000000108696uv^2 - 1.3913u + 5.43478e - 26v^4 \\
&+0.00000000543478v^2 + 0.130435)
\end{aligned}
$$

となる。$g_1^{(0)}(u,v), g_2^{(0)}(u,v)$ の数値解を表 2 に示した。また終結式 $R(u)$ は

$$
\begin{aligned}
R(u) = &-u^{25} + 21.5184u^{24} - 220.987u^{23} + 1440.97u^{22} - 6695.57u^{21} + 23585.8u^{20} \\
&-65419.6u^{19} + 146485.0u^{18} - 269338.0u^{17} + 411439.0u^{16} - 526304.0u^{15} \\
&+566510.0u^{14} - 514342.0u^{13} + 393938.0u^{12} - 254014.0u^{11} + 137308.0u^{10} \\
&-61807.1u^9 + 22948.1u^8 - 6936.99u^7 + 1677.78u^6 - 317.149u^5 \\
&+45.3807u^4 - 4.69812u^3 + 0.328522u^2 - 0.0137481u + 0.000257776
\end{aligned}
$$

である。したがって

$$
res(1) = -3.88105 \times 10^{-15}
$$

であり、$s = 21$ であるから減次は可能である。

$g_1^{(0)}(u,v), g_2^{(0)}(u,v)$ を 1 度減次したものを $g_1^{(1)}(u,v), g_2^{(1)}(u,v)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
g_1^{(1)}(u,v) &= u^4 - 2.25758u^3 - 0.757576u^2v^2 + 1.5303u^2 + 1.51515uv^2 \\
&\quad -0.287879u + 9.4697e - 18v^4 - 0.757576v^2 + 0.0151515 \\
g_2^{(1)}(u,v) &= v(u^3 - 2.13043u^2 + 0.00000000543478uv^2 + 1.26087u \\
&\quad -0.00000000543478v^2 - 0.130435)
\end{aligned}
$$

である。

もう 1 度減次したものを $g_1^{(2)}(u,v), g_2^{(2)}(u,v)$ とすれば

$$
\begin{aligned}
g_1^{(2)}(u,v) &= 1.0u^3 - 1.25758u^2 - 0.757576uv^2 + 0.272727x + 0.757576v^2 - 0.0151515 \\
g_2^{(2)}(u,v) &= y\left(1.0u^2 - 1.13043u + 0.00000000543478v^2 + 0.130435\right)
\end{aligned}
$$

となる。さらにもう1度減次したものを $g_1^{(3)}(u,v), g_2^{(3)}(u,v)$ とすれば

$$g_1^{(3)}(u,v) = u^2 - 0.257576u - 0.757576v^2 + 0.0151515$$
$$g_2^{(3)}(u,v) = v\,(u - 0.130435)$$

である。これら減次をした方程式を解いたときの数値解を表3に示す。

7. おわりに

連立代数方程式の近接根が通常の計算で分離できない場合には、ここで報告したような一次分変換を適用すれば確実に分離できる。さらに、近接の度合いが強かったり、近接根以外の根の数が大きければ、減次が可能である。数値例からも分かるように、追跡するパスの本数が大幅に減少し、したがって計算時間が短縮されていることが分かる。

参 考 文 献

[1] H. Kobayashi & H. Suzuki. : *The multiplicity of a solution of a system of algebraic equations*, Proc. of the 1992 International Workshop on Mathematics Mechanization, pp.53-64.

[2] H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : *Numerical calculation of the multiplicity of a solution to algebraic equations.* Mathematics of Computation (掲載予定)

[3] H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : *The multiplicity of a solution of a system of algebraic equations II*, Proc. of the 1994 Winter Workshop on Computer Algebra , pp.11-15.

[4] 小林, 鈴木, 酒井 : 分数変換による近接根の分離について, 数式処理 vol.2 no.2 pp.2-7 (1993)

[5] H. Kobayashi , H. Suzuki. & Y. Sakai. : *Separation of close roots by linear fraction transformation*, Proc. of ASIAN symposium on computer mathematics, pp.1-10 (1995)

[6] 鈴木, 小林 : 一次分数変換を利用した連立代数方程式の高精度計算法, 第53回情報処理学会全国大会 講演論文集1巻 pp.63-64 (1996)

表3 減次による数値解

No.	$g_1^{(1)}=0, g_2^{(1)}=0$	誤差
1	(0.1666666667e+00,-0.1311810518e-16)	2.0839674e-16
	(0.7285175850e-17,-0.4868412426e-16)	4.4301606e-17
2	(0.9090909091e-01, 0.3773328121e-16)	1.6002429e-16
	(0.4479575766e-16, 0.4409472212e-16)	7.6321215e-17
3	(0.1304347826e+00,-0.1414901426e-16)	5.0492666e-18
	(-0.7949309502e-17, 0.4347826087e-01)	2.5501717e-16
4	(0.1304347826e+00, 0.3684193294e-16)	1.0872994e-16
	(-0.1360207869e-16,-0.4347826087e-01)	1.1005154e-16
No.	$g_1^{(2)}=0, g_2^{(2)}=0$	誤差
1	(0.1666666667e+00, 0.1961774858e-16)	2.0166479e-16
	(0.3428448105e-17,-0.3650073640e-16)	3.1636969e-17
2	(0.9090909091e-01,-0.3168669257e-16)	7.3530616e-17
	(-0.2763148645e-16,-0.1109188389e-16)	1.7105301e-17
3	(0.1304347826e+00,-0.5030126096e-16)	1.0814654e-16
	(-0.7777736885e-16, 0.4347826087e-01)	1.5125837e-16
4	(0.1304347826e+00, 0.1608765300e-16)	1.0237253e-16
	(0.3394756492e-16,-0.4347826087e-01)	1.7563631e-16
No.	$g_1^{(3)}=0, g_2^{(3)}=0$	誤差
1	(0.16666681666e+00, 0.1525493806e-16)	1.4999333e-07
	(0.3635575799e-17,-0.2105119720e-16)	1.9284644e-17
2	(0.9090895341e-01, 0.3845342819e-16)	1.3749973e-07
	(-0.1421129375e-16,-0.2856992465e-16)	2.0631686e-17
3	(0.1304348014e+00, 0.5723048272e-16)	1.8761815e-08
	(0.1324418817e-16, 0.4347842618e-01)	1.6531160e-07
4	(0.1304348014e+00, 0.4877879608e-17)	1.8761815e-08
	(0.3413944408e-16,-0.4347842618e-01)	1.6531160e-07

表4 計算時間(秒)

方程式	$g_1^{(0)}=0, g_2^{(0)}=0$	$g_1^{(1)}=0, g_2^{(1)}=0$	$g_1^{(2)}=0, g_2^{(2)}=0$	$g_1^{(3)}=0, g_2^{(3)}=0$
計算時間	7.2683	3.3672	1.4006	0.25278
パスの数	25	16	9	4