数理解析研究所講究録
986 巻 1997 年 181-184

Lagrange Maltipliers に関する数式処理の3次元グラフィクスについて

笠嶋友美 (Tomomi Kasajima)
t_kasaji@sophia.ac.jp
Hamada-yama 1-28-23 Suginami,Tokyo 168 Japan

Abstract. The method of Lagrange Multipliers is useful to find the extrema of a function $f(x_1, \cdots, x_n)$ subject to conditions $g_i(x_1, \cdots, x_n) = 0$ $(i = 1, \cdots, m)$. In case of $m = 1$ and $n = 2$ the extrema are attained at points (x,y) which satisfy $F_x = 0, F_y = 0, F_\lambda = 0$ where F denotes the function $f(x, y) - \lambda g(x, y)$. For the display of the situation of setting, we plot the surface $z = f(x, y)$ in 3-space and the constrained curve on the surface along with the curve $g(x, y) = 0$ on the plane $z = 0$ and to make the extremal points above the constrained curve quite clearly visible. Many Computer Algebra Systems have been with visualization systems,for example Maple V R.4,Mathematica V 2.23 or 3.0 ,Risa/Asir and Theorist etc. we use Mathematica V.2.3 here.

1. はじめに

エレクトロニクスの急速な発展に伴いグラフィクス機能を伴った数式処理システムは著しい変化を生じてきた。Maple V R.4, Mathematica V.3 or V.2.3, Risa/Asir,Theorist などもその一部である。

例えば2変数の関数 $f(x, y)$ の表す3次元空間の曲面の描画もこれらの グラフィクス機能を活用することができる。従来では3次元の描画は、大型センターを利用する特別な環境であったが、これからは3次元を対象とする 数学的グラフィクスを積極的にとりいれて、さらに深い理解の効率をはかることを試みたい。

さて Lagrange 未定係数法 (Lagrange Multipliers) は条件つき関数 $g = 0$ のもとで ある関数 f の 極値を求めるよく知られた方法である。微分方程式 のみならず、経済学の方面でも(非)線形計画法、最適問題などで 条件つき最大値 最小値 の必要なときに幅広く適用されている。

Lagrange 未定係数法で扱う関数 $f, g = 0$ は実関数で偏微分可能、一般には、$f(x_1, \cdots, x_n)$ と 制約関数 $g_i(x_1, \cdots, x_n) = 0, (i = 1, \cdots, m)$ で表されるが、この条件で求められた f 上の 極値 P と f 自体 の極値とは、明らかに異なる。

$m = 1, n = 2$ すなわち $f(x, y)$, と $g(x, y) = 0$ の場合に、与えられた $f(x, y)$ の表す曲面、制約関数 $g(x, y) = 0$ による空間曲線、その曲線上の最大点等と与えられた曲面の最大最小の関係等を3次元グラフィクスの中で 視覚化して明解にする。

2. Lagrange 未定係数法の例

2.1. 例 1

与えられた関数を $f(x,y)=x^2+4y^3$ とし制約関数は $g(x,y)=x^2+4y^2$ とする。
Lagrangian function :

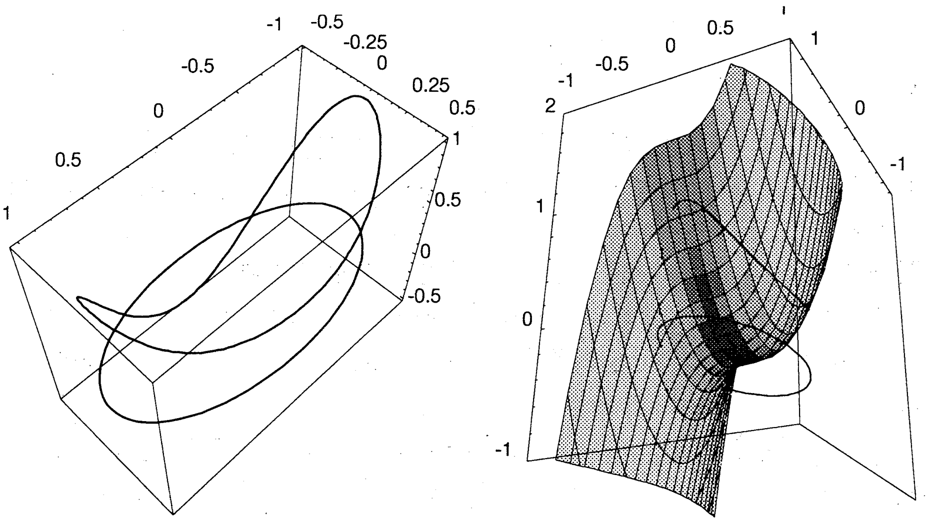
$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

に対して $F_x=0, F_y=0, F_\lambda=0$ を x,y,λ について数式処理で 解くと、同時に 各解 が display に 出現する。Lagrange による 解は、最大値、最小値 の候補であるので 、検討の結果つぎのことが分かる。

$x=0, y=-1/2, (\lambda=-3/4)$ のとき　　最小点 $z=-1/2$
$x=-1, y=0, \lambda=1, x=1, y=0 (\lambda=1)$ のとき　　最大点 $z=1$
$x=0, y=1/2, (\lambda=3/4)$ のとき　　何でもない点 $z=1/2$
あとの 2 つの解は、虚解である。

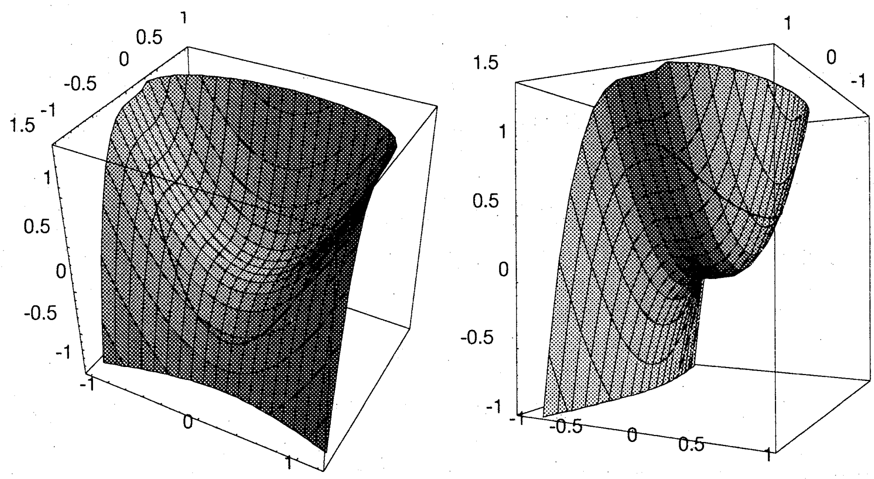
これらの状況を下図に示す。図左 の下側の楕円が制約関数 $g(x,y)=0$ である。$g=0$ 上での $f(x,y)$ の値の曲線が 舟型の曲線である。明らかに y 軸上の $x=1, x=-1$ に $z=1$ をとる 2 つの最大点である。(最小点 $(0,-0.5,-0.5)$ は $z=-0.5$ 平面にあることがわかる。)

図右は $f(x,y)$ の表す曲面上に貼りついている 制約された f の空間曲線 と 平面 $z=0$ 上 にある 制約関数 の楕円 $g(x,y)=0$ が空間上に 浮んでいる。



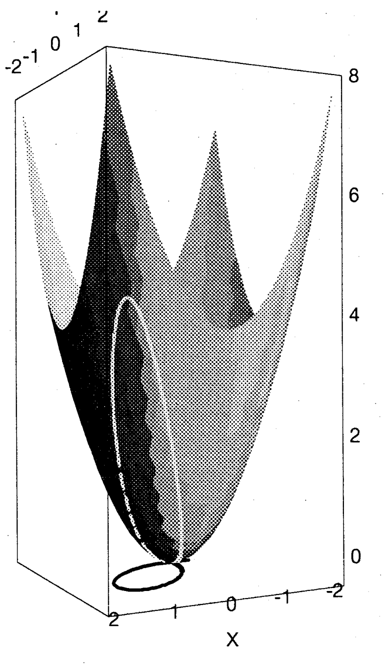
つぎに $f(x,y)$ の表す曲面 と 制約されて生じた 曲線との関係を描く。$z=f(x,y)$ には最大点も最小点も存在しない曲面であるが、この曲面上の閉じた空間曲線には、前述の最大値、最小値の存在もはっきり見える。

ところで同じ条件のもとに描画した曲線であるが、数値誤差 の関係か曲線の半分は曲面の表側に、あとの半分は裏側に出現した。数値の微調整をすればこの場合、おそらく曲面の前面かに統一されて曲線が出現するであろう。



2.2. 例 2

与えられた関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ に対して制約関数が $g(x,y)=x^3-3xy+y^3=0$ の場合を考える。g は $x-y$ 平面ではいわゆるデカルト の正葉線 と呼ばれる 陰関数 で原点でループを描いている。このループ上を定義域とした $f(x,y)$ のとる空間曲線と曲面を描画する。



Lagrangian function としては, 例 1 と同様に

$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ を定義して $F_x=0, F_y=0, F_\lambda=0$ を数式処理で解くと、$x=1.5, y=1.5, \lambda=4/3$ のときに最大値 $z=4.5$ であることがわかる。$g(x,y)=0$ は (g_x,g_y) が零にならないように補っておく。

講演の際の OH フィルムのグラフィクス は 色彩豊かなカラーであった。しかし白黒印刷 になると、曲面とその上の 制約曲線との色彩の区別がつかなくなったので、「白ぬき」とした。

3. おわりに

Lagrange multiplier の λ は ベクトルの見地からは、極値の点における $f(x,y), g(x,y)$ の法線ベクトルの比である。また竹内 [1] には、λ は 条件式 $g=c$ の右辺 c が 変化するときの 条件つき最大値の変化率であると、例を掲げて述べている。条件が微妙に変わったときに、どのような変化が 具体的に現れるのかを次のテーマに選びたいと考えている。一松信東京電機大学教授には λ に関する経済学的な解釈 をお教え下さったことを心より感謝する。

参 考 文 献

[1] 竹内 啓,"社会科学における数理的方法", 岩波講座 応用数学, 岩波. pp. 1-35 (1995).

[2] Thomas L.Saaty and Joseph Bram, "Nonlinear Mathematics", Dover Publications,Inc.pp. 93-174 (1964).

[3] 津野義道他 "微分積分" 共立,pp. 100-103. (1978).