数理解析研究所講究録
988巻 1997年 94-97

1次元力学系の族における単調性について

北海道大学理学部　辻井　正人
(Tsujii Masato)

ここでは1次元力学系の1パラメータ族における単調性(Milnor-Thurston 単調性)に関する結果を述べたい。

1次元力学系とは実数から実数への写像(関数)の反復合成のことである。特にここでは単峰写像(unimodal map)、すなわち、連続写像であって、転回点と呼ばれる点 $c \in \mathbb{R}$ について $\{x < c\}$ において狭義単調増加, $\{x > c\}$ において狭義単調減少である写像の反復合成を考える。単峰写像 f に対してそのKneading不変量 $K(f)$ は記号"L","C","R"の無限列であって次のように定義される：　(c は f の転回点)

$$K(f) = X_1 X_2 X_3 \cdots$$

$$X_i = \begin{cases} L & f^i(c) < c, \\ C & f^i(c) = c, \\ R & f^i(c) > c. \end{cases}$$

この $K(f)$ は位相共役についての不変量であって、f の力学系としての性質についての多くの情報を含んでいる。特に後で

述べるS単峰写像というクラスで考えると位相共役類にKneading不変量を対応させる対応は高々2対1である。

さて、我々の主な関心は単峰写像の1パラナータ族$\{f_t\}$について、f_tの力学系としての性質がどのように変化するかということである。これには上で述べたことから対応$t \to K(f_t)$を考えることが有力な方法になる。この対応についてMilnorとThurstonは2次関数の場合に次に述べるような予想を提出した。まず記号列の空間$\{L, C, R\}^{\mathbb{N}}$上に次のような順序を考える：　1つの記号についてはL < C < Rとし，2つの記号列$\underline{X} = X_1 X_2 X_3 \cdots$，$\underline{Y} = Y_1 Y_2 Y_3 \cdots$について$X_i \neq Y_i$となる最小の$i$について

(i) もし$\{X_1, X_2, \cdots, X_{i-1}\}$にRが偶数個含まれるならば

$$\underline{X} < \underline{Y} \Leftrightarrow X_i < Y_i$$

(ii) 〃　Rが奇数個含まれるならば

$$\underline{X} < \underline{Y} \Leftrightarrow X_i > Y_i \quad .$$

予想：$Q_t(x) = t - x^2$とするとき対応$t \mapsto K(Q_t)$は上の順序について広義単調増加。

この予想はSullivan等によって肯定的に解決された。またテント写像の族についての次の事実も知られている。

定理　$T_t(x) = t(1 - |2x - 1|)$について対応$t \mapsto K(T_t)$は広義単

調増加。

そこで次のような問題が考えられる。

問題：単峰写像の族についてどのような条件があれば上のような単調性が成り立つだろうか？

例えば上で述べた2次写像やテント写像の族に十分近い族についても単調性が成り立つかどうかもわかっていない。ここではこの問題に関する結果を述べたい。単峰写像 f について

$$f_t(x) = f(x) + t$$

という族を考える。この族がある記号列 $\underline{X} \in \{L, C, R\}^{\mathbb{N}}$ において単調であるとは、ある t_0 において $K(f_{t_0}) = \underline{X}$ ならば、$t \geq t_0$ について $K(f_t) \geqq \underline{X}$，$t \leq t_0$ について $K(f_t) \leqq \underline{X}$ となることとする。もし全ての記号列において単調であるならば対応 $t \mapsto K(f_t)$ は広義単調である。ある記号列が有限であるとは記号列が記号 C を含むこととする。もし記号列 $\underline{X} = (X_i)_{i=1}^{\infty}$ がある単峰写像の Kneading 列として実現されて、有限であるならば、$\underline{X}$ は $X_i = C$ となる最小の i について

$$\underline{X} = (X_1 X_2 \cdots X_{i-1} C)^{\infty} = X_1 X_2 \cdots X_{i-1} C X_1 X_2 \cdots X_{i-1} C X_1 X_2 \cdots$$

という形になる。このとき i を $\underline{X}$ の長さということにする。簡単な議論によって、f_t が全ての有限な記号列において単調ならば対応 $t \mapsto K(f_t)$ は広義単調になることがわかる。

定理1　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は次の2つの条件をみたすとする。

(a) $f''(x)<0$　　(b) $Sf(x):=\dfrac{f'''(x)}{f'(x)}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2<0$ ($\forall x$)

このとき族 $f_t(x)=f(x)+t$ は simple な記号列において単調である。ただし、記号列 $\underline{X}$ が simple であるとは

$$\underline{X}=(RL^{n_1}R^{m_1}L^{n_2}R^{m_2}\cdots L^{n_p}R^{m_p}C)^\infty$$

$(n_i, m_i \geq 0$ かつ $i \neq p$ のとき $n_i, m_i > 0)$

と書き表すとき m_i $(i<p)$ が全て偶数であることである。

[注意] $\underline{X}$ が Kneading 不変量として実現可能な有限列ならば上のような形に書ける。

定理2　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は次の3つの条件をみたすとする。

(a) $f''(x)<0$　(b) $Sf(x)<0$　(c) 対称 i.e. $f(x)=f(2c-x)$

このとき $f_t(x)=f(x)+t$ は長さ10以下の(Kneading 不変量として実現可能な)有限な記号列において単調である。(そのような列は約100個ある。)

筆者のみるところ定理2の条件の下で単調性が成り立つ有限記号列はかなり多い。しかし、どの範囲の記号列について単調性が成立するかはよくわからない。