数理解析研究所講究録
990巻 1997年 111-114

Low－Discrepancy Sequencesに関する最近の話題

日本アイビーエム 東京基礎研究所　　手塚 集　（Shu Tezuka）

1。はじめに

近年、計算機の普及とその処理速度の大幅な向上に伴い、さまざまの（科学計算、ビジネス）分野において、数値計算手法としてのモンテカルロ法が使われるようになっている。この手法の問題点は、特にその（収束の）スピードが遅いことであるが、インプリメンテーションが容易なため広く利用されている。実際アプリケーションによって、特にその処理スピードが問題とならなければ十分利用する価値はあるが、高精度の解をこのモンテカルロ法で得ようとするようなアプリケーションでは、現存する高速のスーパーコンピューターをもってしても、まだ満足な状況とは言えないようである。因みに、スピードに関してよく言われる説明は次のようなものである。モンテカルロ法で必要となるサンプルの数をNとすると、得られる解の持つ誤差はおよそ$\sqrt{N}$に比例することが知られている。つまり、一桁精度をあげるにはさらに１００倍のサンプルが必要になる。言い換えれば、１００倍の時間が必要になるので非常に時間がかかる。

そのような事情から、モンテカルロ法をいかに高速化するかは長年にわたる重要な研究テーマの１つであった。実際このテーマは６０年代のまだ計算機のスピードが遅かった時代には現在よりはるかに切実な問題であり、特に物理のモンテカルロ法利用者により盛んに研究され様々な方法が多く提案された。そのような手法のなかに準モンテカルロ法（Quasi－Monte Carlo Methods）と呼ばれるものがある。この方法の基本的な考え方は乱数の代わりにあらかじめ決められた特殊な数列(low-discrepancy sequences と呼ばれる)を用いることにより高速化を図ろうというものである。この場合の計算誤差に関しては、Koksma-Hlawka の定理がよく知られている。これは、誤差に関して確定的な上界を与えるもので、モンテカルロ法の計算誤差が確率的なのに比べると大きな違いがある。また、準モンテカルロ法では、次元があまり高くなければ、誤差はほぼサンプル数に反比例する事が知られているので、一桁精度をあげるにはさらに１０倍のサンプルですむことになり、モンテカルロ法と比べて大幅なスピードアップが得られる。

最近、ファイナンスの実務特にデリバティブの取り引きにおいてモンテカルロ法が利用されるようになってきている。この分野では、金利や株価の変動を確率過程に基づく数学モデルとして表現し、それを使ってデリバティブの価格づけがおこなわれている。

モデルの複雑なものでは、解析解を求めることが困難なために計算機を用いた数値計算が使われており、モンテカルロ法もその一つである。このような寸秒を争うトレーディングの世界では、より高速に計算することが必要不可欠となるため、モンテカルロ法の高速化は必須である。１つの解決方法はハードウェアーで高速化することであり、実際、ウォールストリートの多くの投資銀行ではスーパーコンピューターを使って計算のスピードアップをはかっている。がそれでも、複雑なデリバティブではまだ十分速いとはいえず、モンテカルロ法の高速化は依然重要な課題である。そこで出てくるのがアルゴリズムで高速化するという考えであり、この考えにしたがって準モンテカルロ法をこの分野に応用した最初の研究は、コロンビア大学のグループ（Traub 教授 と当時その学生であった Paskov 博士,現在ＵＢＳ）によるもので、１９９３年のことであった。そこでは、MBS(Mortgage Backed Securities)と呼ばれる複雑なデリバティブの価格づけ問題がとりあげられ, low-discrepancy sequences による高速化が報告された。

本稿では、はじめに low-discrepancy sequences について概説し、そのあと、コロンビア大学のグループの仕事を中心に紹介する。

２。Low-Discrepancy Sequences

Low-discrepancy sequences とここで呼んでいるものは、歴史的には、quasirandom sequences (準乱数)と呼ばれた時代もあった。これは実に紛らわしく不正確な呼び名であるために極力使用しないように心がけたい。１つの理由は、pseudorandom sequences(擬似乱数) と殆ど言葉として（英語としても日本語としても）区別がつかないことである。low-discrepancy sequences は、いっさいランダム性を仮定していないので、すくなくとも random(乱数)という用語は当たらない。

さて、low-discrepancy sequences とは何かであるが、まず、discrepancy の定義が必要となる。詳細は文献１、２にゆずるとしてここでは定性的には説明にとどめることにする。多次元単位立方体内に分布する有限点列を考え、その一様性の程度、より正確には(理想的な)一様分布からの隔たり（ずれ）を定量的に定義したものが discrepancy である。したがって、 low-discrepancy sequences は一様分布からの隔たりが小さいような点列ということになる。さらにいえば、一様分布からの隔たりがある意味で最小となっている点列のことである。

１次元の low-discrepancy sequences としてよく知られているのが van der Corpt sequence ϕ_i, $i=0,1,2,\ldots$, である。これは次のように定義される。

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{m} i_j 2^{-j}、$$

ここで、整数 i の２進表現を i ＝（$i_m,\ldots,i_1$）、i_m ＝１、とする。また、２次元の low-discrepancy sequences としては、Sobol sequences (ϕ_i, ψ_i), i =0,1,2,...,が知られている。ここで、

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{m} e_j 2^{-j}、$$

であり、また $e_j = \sum_{k=j}^{m} \binom{k-1}{j-1} i_k \pmod 2$ とする。

一般の k 次元における low-discrepancy sequences の構成方法については、Halton, Sobol, Faure, Niederreiter などの方法が知られている。詳細は、文献１、２を参照されたい。

３。ファイナンスへの応用

コロンビア大学のグループは、当時取り引き量も多くかつ複雑なデリバティブとして知られていた MBS(Mortgage Backed Securities)と呼ばれるものの価格づけ問題をとりあげ、low-discrepancy sequences を用いることにより従来のモンテカルロ法と比べ数十倍もの高速化が得られることを報告し、ウォールストリートで大きな話題となった（文献３、４）。さらにこの研究を進めた最近の研究成果ないし話題としては、文献５、６、７、８などがあげられる。以下、簡単に紹介すると、

文献５では、low-discrepancy sequences として、最近提案された generalized Niederreiter sequences をとりあげ、従来の Sobol, Halton, Faure と呼ばれる low-discrepancy sequences とのパフォーマンスの比較実験がされ、より高速の収束性が報告されている。

また文献６では、コロンビア大学のグループにより指摘されていた Numerical Recipe の乱数生成サブルーチン ran1()の問題点---- MBS のモンテカルロシミュレーションにおいて、誤った値に収束するという現象 ---- が取り上げられ、何がその原因であったかが解明されている。また、ran1()をどういう風に使えば正しい値に収束するかも述べられている。

文献７はコロンビア大学のグループによる最新の報告である。 generalized Niederreiter sequences の特殊な部分集合である generalized Faure sequences が、彼らのそれまで用いていた「改良 Sobol sequences」よりもつねに速く収束することが実験的に確認できたことが報告されている。

いずれにしても、このあたりの研究は実験（ビジネス？）が先行しており、理論（学問？）はこれからという感じである。 ここで注意すべきことは準モンテカルロ法（即ち、

low-discrepancy sequences）による高速化はどのようなモンテカルロ法でも実現できるとは限らないという点である。むしろ、ファイナンスの問題は特殊であり、たまたま相性がよかったと考えるべきであろう。すくなくとも金利派生証券に関しては、殆どの代表的な金利モデルのうえでのさまざまな商品について、“良い”low-discrepancy sequencesを使う限り、大幅な高速化が得られることは実験事実として認められており、現在その理論的な裏付けが待たれている。

それにしてもこのような現実の問題で準モンテカルロ法が非常に有効であった例が一つでも見つかったことはこの分野の研究者を大いに喜ばせた。これからの課題は、このような応用分野をさらに広げることであろう。

参考文献

1. H. Niederreiter, Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, SIAM, Philadelphia, Penn., 1992.
2. S. Tezuka, Uniform Random Numbers : Theory and Practice, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995.
3. Is Monte Carlo bust?, Economist, (August 12-th, 1995), 63.
4. S. H. Paskov and J. F. Traub, Faster Valuation of Financial Derivatives—A promising alternative to Monte Carlo, The Journal of Portfolio Management, (Fall 1995), 113-120.
5. S. Ninomiya and S. Tezuka, Toward Real Time Pricing of Complex Financial Derivatives, Applied Mathematical Finance , 3 (1996), 1-20.
6. A. Tajima, S. Ninomiya, and S. Tezuka, On the Anomaly of ran1() in Monte Carlo Pricing of Financial Derivatives, to be presented at Winter Simulation Conference, San Diego (1996).
7. A. Papageorgiou and J. F. Traub, Beating Monte Carlo, RISK (June, 1996), 63-65.
8. P. Truel, From I.B.M., Help in Intricate Trading, The New York Times, September 25 (1995).