数理解析研究所講究録
990巻 1997年 21-30

基本 LUL 分解とその応用

早大理工　石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)
早大理工　室谷義昭　(Yoshiaki Muroya)

最近、SOR法を一般化し実用的にした順序付き改良SOR法を提案し、三重対角行列に対する改良SOR行列のスペクトル半径を0とする n 通りの緩和係数の選び方を与え、これを拡張した UL 分解に対応する改良反復法を提案した ([3] 参照)。

ここでは、[3] の結果を一般化するために基本 LUL 分解を定義し、それに対応する改良反復法を提案する。特に行列が上Hessenberg行列の場合はこの改良反復法は順序付き改良SOR法となり、改良SOR行列のスペクトル半径を0とする n 通りの緩和係数の選び方を与える。一般に正方行列は適当な変換 ([8] の Householder 法参照) により上Hessenberg 行列に変換されるので、これらの結果は実際の計算に有効である。

最後に非線形方程式への応用と得られた収束定理を示す。

1　行列の $1 \leq k \leq n$ となる k に対応する基本 LUL 分解と改良反復法

$n \times n$ 行列 A と $1 \leq k \leq n$ となる k に対し、下三角行列 L_1, L_2 と上三角行列 $\bar{U}$ を次の形に分割する。

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{1,1} & \bar{U}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \bar{U}_{2,2} \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{bmatrix}$$

ここに $L_{1,1}$ と $\bar{U}_{1,1}$ は $k \times k$ 小行列、$L_{2,2}$ と $\bar{U}_{2,2}$ は $(n-k) \times (n-k)$ 小行列で対角成分はすべて1と表され、I_1 は $k \times k$ 単位小行列、I_2 は $(n-k) \times (n-k)$ 単位小行列とする。

対角行列 Φ に対し、$\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ を k に対応する A の基本 LUL 分解とする。

ここで $A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}$, $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2 \end{bmatrix}$ $A_{1,1}$ と Φ_1 は $k \times k$ 小行列で、$A_{2,2}$ と Φ_2 は $(n-k) \times (n-k)$ 小行列である。

特に、$k = n$ のとき $\Phi A = \bar{L}\bar{U}$ を A の基本 LU 分解といい、$k = 1$ のとき $\Phi A = \bar{U}\bar{L}$ を A の基本 UL 分解という。ここに $\bar{L} = L_1 L_2$ である。

定理 1.1　$n \times n$ 行列 A と $1 \leq k \leq n$ に対し、k に対応する A の基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ は唯一通りである。

(証明)

$$\Phi A = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{1,1} & \bar{U}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \bar{U}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1}(\bar{U}_{1,1} + \bar{U}_{1,2}L_{2,1}) & L_{1,1}\bar{U}_{1,2}L_{2,2} \\ \bar{U}_{2,2}L_{2,1} & \bar{U}_{2,2}L_{2,2} \end{bmatrix}$$

これより $\begin{array}{ll} \Phi_1 A_{1,1} = L_{1,1}(\bar{U}_{1,1} + \bar{U}_{1,2}L_{2,1}), & \Phi_1 A_{1,2} = L_{1,1}\bar{U}_{1,2}L_{2,2} \\ \Phi_2 A_{2,1} = \bar{U}_{2,2}L_{2,1}, & \Phi_2 A_{2,2} = \bar{U}_{2,2}L_{2,2} \end{array}$ となる。そこで

$\Phi_2 A_{2,2} = \bar{U}_{2,2}L_{2,2}$ の UL 分解より Φ_2, $\bar{U}_{2,2}$, $L_{2,2}$ が定まり、$\Phi_2 A_{2,1} = \bar{U}_{2,2}L_{2,1}$ より $L_{2,1}$ が定まる。$A_{1,1} - A_{1,2}L_{2,2}^{-1}L_{2,1} = \Phi_1^{-1}L_{1,1}\bar{U}_{1,1}$ の LU 分解より Φ_1, $L_{1,1}$, $\bar{U}_{1,1}$ が定まり、最後に $\bar{U}_{1,2} = L_{1,1}^{-1}\Phi_1 A_{1,2}L_{2,2}^{-1}$ より $\bar{U}_{1,2}$ が定まる。

Φ_2 と Φ_1 は $\bar{U}_{2,2}$, $L_{2,2}$, $L_{1,1}$ と $\bar{U}_{1,1}$ の対角成分がすべて1となるように選ぶ点に注意。ゆえに k に対応する A の基本 LUL 分解は唯一通りである。□

定理 1.2 $n \times n$ 三重対角行列 $A = [-l_i, p_i, -u_i]$ に対する $1 \le k \le n$ についての基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ の各行列と $\Phi = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ の各成分は次の通りである。

$$\begin{cases} \omega_i = \dfrac{1}{p_i - l_i \omega_{i-1} u_{i-1}}, & i = 1, 2, \cdots, k-1 \\ \omega_i = \dfrac{1}{p_i - u_i \omega_{i+1} l_{i+1}}, & i = n, n-1, \cdots, k+1 \\ \omega_k = \dfrac{1}{p_k - l_k \omega_{k-1} u_{k-1} - u_k \omega_{k+1} l_{k+1}}, & \omega_0 = \omega_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega_1 u_1 & & & \\ & 1 & -\omega_2 u_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -\omega_{n-1} u_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$L_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\omega_2 l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\omega_k l_k & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\omega_{k+2} l_{k+2} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\omega_n l_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \begin{pmatrix} & -\omega_{k+1} l_{k+1} \\ \mathbf{0} & \end{pmatrix}, \quad \bar{L} = L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\omega_2 l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\omega_n l_n & 1 \end{pmatrix} = I - \Phi \tilde{L}$$

ここで $\tilde{L} = [l_i, 0, 0]$ は $n \times n$ 狭義下三角行列である。

k に対応する A の基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ に基づく改良反復法は任意の出発ベクトルに対し、次のように表される。ここで $\bar{L} = L_1 L_2$ である。

$$\boldsymbol{x}^{(m+1)} = \boldsymbol{x}^{(m)} - \bar{L}^{-1} \Phi (A \boldsymbol{x}^{(m)} - \boldsymbol{b}), \qquad m = 0, 1, 2, \cdots$$

定理 1.3 $n \times n$ 行列 A に対する $1 \le k \le n$ についての基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ は以下の順序を考慮すると基本 LU 分解または基本 UL 分解とみなせる。

i) $\tilde{A} = \tilde{P}_k A \tilde{P}_k^T$ に対して、

$$\tilde{P}_k = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & 1 \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \hline & & & 1 & & \\ 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{P}_{n-k} \\ I_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

を $n \times n$ 置換行列とすると、$\tilde{A}$ の基本 LU 分解は $\tilde{\Phi} \tilde{A} = \tilde{\tilde{L}} \tilde{\tilde{U}}$ となる。ただし

$$\tilde{\Phi} = \tilde{P}_k \Phi \tilde{P}_k^T, \quad \tilde{\tilde{L}} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{n-k} \bar{U}_{2,2} \bar{P}_{n-k}^T & \mathbf{0} \\ L_{1,1} \bar{U}_{1,2} \bar{P}_{n-k}^T & L_{1,1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\tilde{U}} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{n-k} L_{2,2} \bar{P}_{n-k}^T & \bar{P}_{n-k} L_{2,1} \\ \mathbf{0} & \bar{U}_{1,1} \end{bmatrix}$$

ii) $\tilde{A}=\tilde{Q}_kA\tilde{Q}_k^T$ に対して、

$$\tilde{Q}_k=\left[\begin{array}{ccc:ccc} & & 1 & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ 1 & & & & & \\ \hdashline & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} \bar{Q}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix}$$

を $n\times n$ 置換行列とすると、$\tilde{A}$ の基本 UL 分解は$\tilde{\Phi}\tilde{A}=\tilde{\bar{U}}\tilde{\bar{L}}$ となる。ただし

$$\tilde{\Phi}=\tilde{Q}_k\Phi\tilde{Q}_k^T,\quad \tilde{\bar{U}}=\begin{bmatrix} \bar{Q}_kL_{1,1}\bar{Q}_k^T & \bar{Q}_kL_{1,1}\bar{U}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \bar{U}_{2,2} \end{bmatrix},\quad \tilde{\bar{L}}=\begin{bmatrix} \bar{Q}_k\bar{U}_{1,1}\bar{Q}_k^T & \mathbf{0} \\ L_{2,1}\bar{Q}_k^T & L_{2,2} \end{bmatrix}$$

(証明)

i) $\bar{U}=U_1U_2$、ただし $U_1=\begin{bmatrix} I_1 & \bar{U}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \bar{U}_{2,2} \end{bmatrix}$ かつ $U_2=\begin{bmatrix} \bar{U}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix}$ なので、

$$\Phi A=L_1\bar{U}L_2=(L_1U_1)(U_2L_2)=\begin{bmatrix} L_{1,1} & L_{1,1}\bar{U}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \bar{U}_{2,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{U}_{1,1} & \mathbf{0} \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{bmatrix}$$ となる。従って、

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}\tilde{A}&=\tilde{P}_k\Phi A\tilde{P}_k^T=\{\tilde{P}_k(L_1U_1)\tilde{P}_k^T\}\{\tilde{P}_k(U_2L_2)\tilde{P}_k^T\}\\ &=\begin{bmatrix} \bar{P}_{n-k}U_{2,2}\bar{P}_{n-k}^T & \mathbf{0} \\ L_{1,1}\bar{U}_{1,2}\bar{P}_{n-k}^T & L_{1,1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{P}_{n-k}L_{2,2}\bar{P}_{n-k}^T & \bar{P}_{n-k}L_{2,1} \\ \mathbf{0} & \bar{U}_{1,1} \end{bmatrix}=\tilde{\bar{L}}\,\tilde{\bar{U}}\end{aligned}$$

ii) 同様に

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}\tilde{A}&=\tilde{Q}_k\Phi A\tilde{Q}_k^T=\{\tilde{Q}_k(L_1U_1)\tilde{Q}_k^T\}\{\tilde{Q}_k(U_2L_2)\tilde{Q}_k\}\\ &=\begin{bmatrix} \bar{Q}_kL_{1,1}\bar{Q}_k^T & \bar{Q}_kL_{1,1}\bar{U}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \bar{U}_{2,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{Q}_k\bar{U}_{1,1}\bar{Q}_k^T & \mathbf{0} \\ L_{2,1}\bar{Q}_k^T & L_{2,2} \end{bmatrix}=\tilde{\bar{U}}\tilde{\bar{L}}\end{aligned}$$

□

定理 1. 4　$n\times n$ 行列 A と $1\leq k\leq n$ に対し $H_\Phi=I-\bar{L}^{-1}\Phi A$ を k に対応する A の基本 LUL 分解 $\Phi A=L_1\bar{U}L_2$ に基づく改良反復行列とおくと $\rho(H_\Phi)=0$ である。

(証明)　次式より $\rho(H_\Phi)=0$ となる。

$$\begin{aligned}H_\Phi&=I-\bar{L}^{-1}\Phi A=\bar{L}^{-1}(\bar{L}-\Phi A)=\bar{L}^{-1}(L_1L_2-L_1\bar{U}L_2)\\ &=\bar{L}^{-1}L_1(I-\bar{U})L_2=L_2^{-1}(I-\bar{U})L_2\end{aligned}$$

□

定理 1. 5　$n\times n$ 行列 A と $1\leq k\leq n$ に対し、$H_\Phi=I-\bar{L}^{-1}\Phi A$ を k に対応する A の基本 LUL 分解 $\Phi A=L_1\bar{U}L_2$ に基づく改良反復行列とし、$\mathcal{L}_\Phi=(I-\Phi\tilde{L})^{-1}(I-\Phi+\Phi\tilde{U})$ を A に対する改良SOR行列とする。ここに $A=I-\tilde{L}-\tilde{U}$ と分解され、$\tilde{L}$ が強い意味の下三角行列、$\tilde{U}$ が上三角行列とする。$\bar{L}=I-\Phi\tilde{L}$ となるとき、かつそのときに限り $H_\Phi=\mathcal{L}_\Phi$ となる。

特に A が上$Hessenberg$行列のとき $H_\Phi=\mathcal{L}_\Phi$ かつ $\rho(\mathcal{L}_\Phi)=0$ となる。

(証明) $1 \le k \le n$ となる k に対し、行列 A の基本 LUL 分解は定理1.1により唯一通り定まる。[3] の Theorem 4 の証明と同様にして $\bar{L} = I - \Phi\tilde{L}$ となるとき、かつそのときに限り $H_\Phi = \mathcal{L}_\Phi$ が示せる。

$A = I - \tilde{L} - \tilde{U}$ に対し、$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \tilde{L}_{2,1} & \tilde{L}_{2,2} \end{bmatrix}$ は狭義下三角行列、$\tilde{L}_{1,1}$ は $k \times k$ 小行列で $\tilde{L}_{2,2}$ は $(n-k) \times (n-k)$ 小行列、$\tilde{U}$ は上三角行列とすると、A の k に対応する基本 LUL 分解は $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ である。このとき、A が上Hessenberg行列ならば、

$$L_{1,1} = I_1 - \Phi_1 \tilde{L}_{1,1}, \quad L_{2,1} = \bar{U}_{2,2} L_{2,1} = \Phi_2 A_{2,1} = -\Phi_2 \tilde{L}_{2,1}, \quad L_{2,2} = I_2 - \Phi_2 \tilde{L}_{2,2}$$

となる。ここに、$I = \mathrm{diag}(I_1, I_2)$ で I_1 は $k \times k$ 単位行列かつ I_2 は $(n-k) \times (n-k)$ 単位行列である。従って $\bar{L} = I - \Phi\tilde{L}$ となるので、$H_\Phi = \mathcal{L}_\Phi$ かつ $\rho(\mathcal{L}_\Phi) = 0$ となる。 □

注意 1.1 [3] で述べた順序付き改良反復法は $n \times n$ 行列 A と置換行列 P, Q に対する $\tilde{A} = PAQ^T$ の基本 UL 分解に対応する改良反復法である。このとき、A が三重対角行列であっても [3] で定義される置換行列 P_k に対し、 $P = Q = P_k,\ \ 2 \le k \le n-1$ の場合には $\tilde{A}$ は上 *Hessenberg* 行列でない。しかしながら、対応する改良反復行列 $H_{\tilde{\Phi}}$ と改良 *SOR* 行列 $\tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{\Phi}}$ に対し、$H_{\tilde{\Phi}} = \tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{\Phi}}$ かつ $\rho(\tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{\Phi}}) = 0$ となっている ([3] 参照)。

2 Hessenberg 行列を係数行列とする連立方程式に対する順序付き改良SOR法

次に $n \times n$ 上Hessenberg行列 A を $A = I - \tilde{L} - \tilde{U}$ と分解し、$\tilde{U}$ は上三角行列、$\tilde{L}$ は狭義下三角行列とし、A に対する改良SOR行列 $\mathcal{L}_\Phi = (I - \Phi\tilde{L})^{-1}\{(I - \Phi) + \Phi\tilde{U}\}$ に対し、$\rho(\mathcal{L}_\Phi) = 0$ となる緩和係数行列 $\Phi = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ の選び方を調べよう。

$\tilde{U} = [u_{i,j}]$ を

$$\tilde{U} = (I - D) + \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \cdots + \tilde{U}_{n-1}$$

と分解する。ここで $D = \mathrm{diag}(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ は A の対角成分をその成分とする対角行列、

$$\tilde{U}_l = [u^l_{i,j}], \quad u^l_{i,j} = \begin{cases} 0, & j \ne i + l \\ u_{i,j}, & j = i + l \end{cases} \quad 1 \le l \le n-1, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & & & \mathbf{0} \\ l_2 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & l_n & 0 \end{pmatrix}$$

とする。簡単のため、$p_1, p_2, \cdots, p_n \ne 0,\ l_{i+1} u_{i,i-1} \ne 0,\ i = 1, 2, \cdots, n-1$ と仮定し、以下に表れる式の分母は0でないと仮定する。

1) 定理1.3において $k = n$ の場合

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\Phi &= (I - \Phi\tilde{L})^{-1}\{(I - \Phi) + \Phi\tilde{U}\} \\
&= \Phi\tilde{U}_1 + (I + \Phi\tilde{L})\Phi\tilde{U}_2 + \{I + \Phi\tilde{L} + (\Phi\tilde{L})^2\}\Phi\tilde{U}_3 + \cdots \\
&\quad + \{I + \Phi\tilde{L} + (\Phi\tilde{L})^2 + \cdots + (\Phi\tilde{L})^{n-2}\}\Phi\tilde{U}_{n-1} \\
&\quad + (I - \Phi\tilde{L})^{-1}\{(I - \Phi D) + \Phi\tilde{L}\Phi\tilde{U}_1 + (\Phi\tilde{L})^2\Phi\tilde{U}_2 + \cdots + (\Phi\tilde{L})^{n-1}\Phi\tilde{U}_{n-1}\}
\end{aligned}$$

ここで $(I-\Phi D)+\Phi\tilde{L}\Phi\tilde{U}_1+(\Phi\tilde{L})^2\Phi\tilde{U}_2+\cdots+(\Phi\tilde{L})^{n-1}\Phi\tilde{U}_{n-1}=\mathbf{0}$ ならば、$\mathcal{L}_\Phi=I-\bar{U}$ となる。ここに

$$\bar{U}=I-[\Phi\tilde{U}_1+(I+\Phi\tilde{L})\Phi\tilde{U}_2+\cdots+\{I+\Phi\tilde{L}+(\Phi\tilde{L})^2+\cdots+(\Phi\tilde{L})^{n-2}\}\Phi\tilde{U}_{n-1}]$$

は対角成分が1の上三角行列で、次式から緩和係数が具体的に定められる。

$$\begin{aligned}&(1-\omega_i p_i)+\omega_i l_i\omega_{i-1}u_{i-1,i}+\omega_i l_i\omega_{i-1}l_{i-1}\omega_{i-2}u_{i-2,i}+\cdots\\&+\omega_i l_i\omega_{i-1}l_{i-1}\cdots\omega_2 l_2\omega_1 u_{1,i}=0,\qquad i=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

Case II$_n$)

$$\begin{cases}\omega_1=\dfrac{1}{p_1},\quad \omega_i=\dfrac{1}{p_i-l_i\omega_{i-1}u_{i-1,i}-l_i\omega_{i-1}l_{i-1}\omega_{i-2}u_{i-2,i}-\cdots-l_i\omega_{i-1}l_{i-1}\cdots\omega_2 l_2\omega_1 u_{1,i}},\\ \qquad\qquad i=2,3,\cdots,n\end{cases}$$

2) 定理1.3において $k=1$ の場合

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Phi&=(I-\Phi\tilde{L})^{-1}\{(I-\Phi)+\Phi\tilde{U}\}\\&=(I-\Phi\tilde{L})^{-1}[\Phi\tilde{U}_1+\Phi\tilde{U}_2(I+\Phi\tilde{L})+\Phi\tilde{U}_3\{I+\Phi\tilde{L}+(\Phi\tilde{L})^2\}+\cdots\\&\quad+\Phi\tilde{U}_{n-1}\{I+\Phi\tilde{L}+(\Phi\tilde{L})^2+\cdots+(\Phi\tilde{L})^{n-2}](I-\Phi\tilde{L})\\&\quad+(I-\Phi\tilde{L})^{-1}\{(I-\Phi D)+\Phi\tilde{U}_1\Phi\tilde{L}+\Phi\tilde{U}_2(\Phi\tilde{L})^2+\cdots+\Phi\tilde{U}_{n-1}(\Phi\tilde{L})^{n-1}\}(I-\Phi\tilde{L})\end{aligned}$$

ここで $(I-\Phi D)+\Phi\tilde{U}_1\Phi\tilde{L}+\Phi\tilde{U}_2(\Phi\tilde{L})^2+\cdots+\Phi\tilde{U}_{n-1}(\Phi\tilde{L})^{n-1}=\mathbf{0}$ とおくと、$\mathcal{L}_\Phi=(I-\Phi\tilde{L})^{-1}(I-\bar{U})(I-\Phi\tilde{L})$ となる。ここに、

$$\bar{U}=I-[\Phi\tilde{U}_1+\Phi\tilde{U}_2(I+\Phi\tilde{L})+\cdots+\Phi\tilde{U}_{n-1}\{I+\Phi\tilde{L}+(\Phi\tilde{L})^2+\cdots+(\Phi\tilde{L})^{n-2}\}]$$

は対角成分が1の上三角行列となる。これより緩和係数が次のように定められる。

Case II$_1$)

$$\begin{cases}\omega_n=\dfrac{1}{p_n},\quad \omega_i=\dfrac{1}{p_i-u_{i,i+1}\omega_{i+1}l_{i+1}-u_{i,i+2}\omega_{i+2}l_{i+2}\omega_{i+1}l_{i+1}-\cdots-u_{i,n}\omega_n l_n\cdots\omega_{i+1}l_{i+1}},\\ \qquad\qquad i=n-1,n-2,\cdots,1\end{cases}$$

3) 定理 1.3において $1\le k\le n$ の場合

Case II$_k$)

$$\begin{cases}\omega_1=\dfrac{1}{p_1},\quad \omega_i=\dfrac{1}{p_i-l_i\omega_{i-1}u_{i-1,i}-l_i\omega_{i-1}l_{i-1}\omega_{i-2}u_{i-2,i}-\cdots-l_i\omega_{i-1}l_{i-1}\cdots\omega_2 l_2\omega_1 u_{1,i}},\\ \qquad\qquad i=2,3,\cdots,k-1\\ \omega_n=\dfrac{1}{p_n},\quad \omega_i=\dfrac{1}{p_i-u_{i,i+1}\omega_{i+1}l_{i+1}-u_{i,i+2}\omega_{i+2}l_{i+2}\omega_{i+1}l_{i+1}-\cdots-u_{i,n}\omega_n l_n\cdots\omega_{i+1}l_{i+1}},\\ \qquad\qquad i=n-1,n-2,\cdots,k+1\end{cases}\tag{1}$$

残る ω_k は $\Phi_1 A_{1,1} = L_{1,1}\bar{U}_{1,1} + \Phi_1 A_{1,2} L_{2,2}^{-1} L_{2,1}$ の両辺の第 (k,k) 成分より

$$\omega_k p_k = (1 + \omega_k l_k \omega_{k-1} u_{k-1,k} + \cdots + \omega_k l_k \omega_{k-1} l_{k-1} \cdots \omega_2 l_2 \omega_1 u_{1,k}) + \omega_k u_{k,k+1} \omega_{k+1} l_{k+1}$$
$$+ \omega_k u_{k,k+2} \omega_{k+2} l_{k+2} \omega_{k+1} l_{k+1} + \cdots + \omega_k u_{k,n} \omega_n l_n \omega_{n-1} l_{n-1} \cdots \omega_{k+1} l_{k+1}$$

から

$$\omega_k = \frac{1}{p_k - \bar{P}_{k-1} - P_{k+1} - P_{k+2} - \cdots - P_n} \tag{2}$$

ここで
$$\begin{cases} \bar{P}_{k-1} = l_k \omega_{k-1} u_{k-1,k} + \cdots + l_k \omega_{k-1} l_{k-1} \cdots \omega_2 l_2 \omega_1 u_{1,k} \\ P_{k+1} = u_{k,k+1} \omega_{k+1} l_{k+1} \\ P_{k+2} = u_{k,k+2} \omega_{k+2} l_{k+2} \omega_{k+1} l_{k+1} \\ \quad \vdots \\ P_n = u_{k,n} \omega_n l_n \omega_{n-1} l_{n-1} \cdots \omega_{k+1} l_{k+1} \end{cases}$$

このとき、定理1.1及び定理1.4の証明により、k に対応する A の基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ に対し、

$$\mathcal{L}_\Phi = L_2^{-1}(I - \bar{U})L_2, \qquad L_2 = \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ -\Phi_2 \tilde{L}_{2,1} & I_2 - \Phi_2 \tilde{L}_{2,2} \end{bmatrix}$$

となる。よって、次の定理を得る。

定理 2.1 $n \times n$ 上 *Hessenberg* 行列 A と $1 \le k \le n$ となる k に対応する A の基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ に基づく改良 *SOR* 行列を $\mathcal{L}_\Phi$ とおく。このとき $\rho(\mathcal{L}_\Phi) = 0$ である。ここに、$\Phi = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ は (1), (2) で定まる。

注意 2.1 $1 \le k \le n$ に対するこれらの場合、$(I - \bar{U})^m = \mathbf{0},\ \ m \ge n$ であるが、一般に $(I - \bar{U})^m \ne \mathbf{0},\ \ 1 \le m \le n-1$ となる。これは三重対角行列の場合に[6] の定理4.2で取り扱われた順序付き改良 *SOR* 法の反復行列の性質についての結果と異なる。

Case II$_k$) の $\omega_i p_i,\ 1 \le i \le n$ が実際に定義でき、しかも有界となる条件として次の定理を得る。([3] の3節と [4] の Theorem 3.1参照)

定理 2.2 Case II$_k$), $1 \le k \le n$ を考える。$2 \le i \le n,\ \ i \ne k$ に対し、

$$\bar{l}_i = \begin{cases} \left|\dfrac{l_i}{p_i}\right|, & 2 \le i \le k-1 \\ \left|\dfrac{l_{i+1}}{p_{i+1}}\right|, & k+1 \le i \le n-1 \end{cases} \qquad \bar{u}_i = \begin{cases} \displaystyle\max_{1 \le j \le i-1} \left|\frac{u_{j,i}}{p_j}\right|, & 2 \le i \le k-1 \\ \dfrac{\displaystyle\max_{i+1 \le j \le n} |u_{i,j}|}{|p_i|}, & k+1 \le i \le n-1 \end{cases}$$

かつ $\bar{l} = \displaystyle\max_{\substack{2 \le i \le n-1 \\ i \ne k}} \bar{l}_i$ とする。ただし $u_{i,j} = 0,\ i+2 \le j \le n,\ 1 \le i \le n-2$ のときは $\bar{l} = 0$ とする。このとき、$\bar{l} < 1$ かつ $0 < 4 \displaystyle\max_{\substack{2 \le i \le n-1 \\ i \ne k}} (\bar{l}_i \bar{u}_i) \le (1 - \bar{l})^2$ ならば、

$$0 < \omega_i p_i \le \frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega} \bar{l}_i \bar{u}_i}{1 - \bar{\omega} \bar{l}}} < \bar{\omega}, \qquad i = 1, 2, \cdots, k-1, k+1, k+2, \cdots, n$$

となる。ここに $1 < \bar{\omega} = \frac{2}{(1+\bar{l})+\sqrt{(1-\bar{l})^2-4\max\limits_{\substack{2\le i\le n-1\\ i\ne k}}(\bar{l}_i\bar{u}_i)}} < 2$ である。

さらに $\bar{l}_k = |\frac{l_k}{p_k}|\max\limits_{1\le j\le k-1}|\frac{u_{j,k}}{p_j}| + |\frac{l_{k+1}}{p_{k+1}}|\frac{\max\limits_{k+1\le j\le n}|u_{k,j}|}{|p_k|}$ に対し、$\bar{\omega}(\bar{l}+\bar{l}_k) < 1$ のとき

$$0 < \omega_k p_k \le \frac{1-\bar{\omega}\bar{l}}{1-\bar{\omega}(\bar{l}+\bar{l}_k)}$$

(証明)　まず、Case II_n) の場合を考える。$\bar{\omega}$ は $\{\bar{l}+\max\limits_{2\le i\le n-1}(\bar{l}_i\bar{u}_i)\}\bar{\omega}^2-(1+\bar{l})\bar{\omega}+1=0$ の小さい方の実根となる。しかも $1<\bar{\omega}<2$ かつ

$$\bar{\omega} \le \frac{2}{1+\bar{l}} = \frac{2(1+\bar{l})}{(1+\bar{l})^2} < \frac{4}{(1+\bar{l})^2} \le \frac{1}{\bar{l}+\max\limits_{2\le i\le n-1}(\bar{l}_i\bar{u}_i)}$$

より $\bar{\omega}\bar{l} \le 2-\bar{\omega} < 1$ となる。明らかに $0 < \omega_1 p_1 = 1 < \bar{\omega}$ が成り立つ。いま、$0 < \omega_1p_1, \omega_2p_2, \cdots, \omega_{i-1}p_{i-1} < \bar{\omega}$, $2 \le i \le n-1$ と仮定すると $\omega_i p_i = \frac{1}{q_i}$、ただし

$$\begin{aligned} q_i &= 1 - \tfrac{l_i}{p_i}(\omega_{i-1}p_{i-1})\tfrac{u_{i-1,i}}{p_{i-1}} - \tfrac{l_i}{p_i}(\omega_{i-1}p_{i-1})\tfrac{l_{i-1}}{p_{i-1}}(\omega_{i-2}p_{i-2})\tfrac{u_{i-2,i}}{p_{i-2}} - \cdots \\ &\quad - \tfrac{l_i}{p_i}(\omega_{i-1}p_{i-1})\tfrac{l_{i-1}}{p_{i-1}}(\omega_{i-2}p_{i-2})\cdots\tfrac{l_2}{p_2}(\omega_1p_1)\tfrac{u_{1,i}}{p_1} \end{aligned}$$

より、$0 < \omega_i p_i \le \frac{1}{1-\frac{\bar{\omega}\bar{l}_i\bar{u}_i}{1-\bar{\omega}\bar{l}}} = \frac{1-\bar{\omega}\bar{l}}{1-\bar{\omega}(\bar{l}+\bar{l}_i\bar{u}_i)} \le \frac{1-\bar{\omega}\bar{l}}{1-\bar{\omega}\{\bar{l}+\max\limits_{2\le j\le n-1}(\bar{l}_j\bar{u}_j)\}} = \bar{\omega}$ を得る。

ここで $\omega_i p_i = \bar{\omega}$ と仮定すると $\bar{l}_i\bar{u}_i = \max\limits_{2\le j\le n-1}(\bar{l}_j\bar{u}_j) > 0$ となるので $\omega_i p_i = \frac{1}{q_i} < \frac{1}{1-\frac{\bar{\omega}\bar{l}_i\bar{u}_i}{1-\bar{\omega}\bar{l}}} = \bar{\omega}$ となり矛盾する。ゆえに $0 < \omega_i p_i < \bar{\omega}$ である。

よって数学的帰納法により $0 < \omega_i p_i < \bar{\omega}$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$ となる。さらに、$\bar{\omega}(\bar{l}+\bar{l}_n) < 1$ のとき $0 < \omega_n p_n \le \frac{1}{1-\frac{\bar{\omega}\bar{l}_n}{1-\bar{\omega}\bar{l}}} = \frac{1-\bar{\omega}\bar{l}}{1-\bar{\omega}(\bar{l}+\bar{l}_n)}$ となり、同様にして他の Case II_k), $1 \le k \le n-1$ の場合も証明できる。 □

系 2.1　Case II_k), $1 \le k \le n$ において $\frac{l_i}{p_i} > 0$, $2 \le i \le n$ とするとき

i) 定理2.2の条件の下で $\frac{u_{i,j}}{p_i} \ge 0$, $i+1 \le j \le n$, $1 \le i \le n-1$ ならば、
$1 \le \omega_i p_i < 2$, $i = 1, 2, \cdots, k-1, k+1, k+2, \cdots, n$ である。

ii) $\frac{u_{i,j}}{p_i} \le 0$, $i+1 \le j \le n$, $1 \le i \le n-1$ ならば $0 < \omega_i p_i \le 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$ である。

$\rho(\mathcal{L}_\Phi) < 1$ となる緩和係数行列 $\Phi = \mathrm{diag}(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$ の選び方としては例えば [4] の定理 2.4 を参照せよ。

3　非線形方程式に対する応用

次の非線形方程式

$$F(\boldsymbol{z}) = A\boldsymbol{z} + \varphi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$$

について、以下のことを仮定する。

A は $n\times n$ 実行列で $\boldsymbol{z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)^T$, $\varphi(\boldsymbol{z})=(\varphi_1(z_1),\varphi_2(z_2),\cdots,\varphi_n(z_n))^T$ とする。$t\in(-\infty,\infty)$ に対して、$\varphi_i(t)$ は実でかつ連続的に微分可能で、ある定数 $M_i\geq 0$, $1\leq i\leq n$ に対し $-M_i\leq\varphi_i'(t)\leq M_i$ とする。$\bar{D}=\mathrm{diag}(M_1,M_2,\cdots,M_n)$ としたとき、行列 $A'=A-\bar{D}$ は正定値行列であり、$F(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{0}$ の解 $\hat{\boldsymbol{z}}$ が存在する。

まず、$1\leq k\leq n$ についての基本 LUL 分解 $\Phi A=L_1\bar{U}L_2$ に対する n 回の反復を伴う改良反復法は、任意の出発ベクトル $\boldsymbol{z}^{(0)}$ に対して、

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}_{p+1}^{(m)}=\boldsymbol{z}_p^{(m)}-\bar{L}^{-1}\Phi\{A\boldsymbol{z}_p^{(m)}+\varphi(\boldsymbol{z}^{(m)})\}, & p=0,1,\cdots,n-1 \\ \boldsymbol{z}_0^{(m)}=\boldsymbol{z}^{(m)},\quad \boldsymbol{z}^{(m+1)}=\boldsymbol{z}_n^{(m)}, & m=0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{3}$$

と表される。反復法 (3) に対する収束定理は次の通りである。(cf. Theorem 4.2 in [7])

定理 3.1　上の仮定の下で、反復法 (3) は任意の出発ベクトル $\boldsymbol{z}^{(0)}\in\boldsymbol{R}^n$ に対して、解 $\hat{\boldsymbol{z}}$ に収束する。

(証明)　定理 1.4 によって、$A\boldsymbol{z}^{(m+1)}+\varphi(\boldsymbol{z}^{(m)})=\boldsymbol{0}$ となる。そこで、解 $\hat{\boldsymbol{z}}=[\hat{z}_i]$ と $\boldsymbol{z}^{(m)}=[z_i^{(m)}]$, $\boldsymbol{e}^{(m)}=\boldsymbol{z}^{(m)}-\hat{\boldsymbol{z}}$ に対して、 $A\boldsymbol{e}^{(m+1)}=\tilde{\boldsymbol{D}}^{(m)}\boldsymbol{e}^{(m)}$ を得る。ここで $\tilde{\boldsymbol{D}}^{(m)}=\mathrm{diag}(\tilde{d}_1^{(m)},\tilde{d}_2^{(m)},\cdots,\tilde{d}_n^{(m)})$, $\tilde{d}_i^{(m)}=-\int_0^1\varphi_i'((1-\theta)\hat{z}_i+\theta z_i^{(m)})d\theta$ である。 □

次に行列 A の基本 LUL 分解に対する改良反復法は任意の出発ベクトル $\boldsymbol{z}^{(0)}$ に対し、次のように表される。

$$\boldsymbol{z}^{(m+1)}=\boldsymbol{z}^{(m)}-\bar{L}^{-1}\Phi F(\boldsymbol{z}^{(m)}),\qquad m=0,1,2,\cdots \tag{4}$$

解 $\hat{\boldsymbol{z}}$ と $\boldsymbol{e}^{(m)}=\boldsymbol{z}^{(m)}-\hat{\boldsymbol{z}}$ に対して、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^{(m+1)} &= \boldsymbol{e}^{(m)}-\bar{L}^{-1}\Phi(F(\boldsymbol{z}^{(m)})-F(\hat{\boldsymbol{z}})) \\ &= \{(I-\bar{L}^{-1}\Phi A)-\bar{L}^{-1}\Phi\int_0^1\varphi'((1-\theta)\hat{\boldsymbol{z}}+\theta\boldsymbol{z}^{(m)})d\theta\}\boldsymbol{e}^{(m)} \\ &= (H_\Phi+R_\Phi^{(m)})\boldsymbol{e}^{(m)}=\tilde{H}_\Phi^{(m)}\boldsymbol{e}^{(m)} \end{aligned}$$

とする。ここで定理 1.4 より、

$$H_\Phi=I-\bar{L}^{-1}\Phi A=L_2^{-1}(I-\bar{U})L_2,\qquad R_\Phi^{(m)}=-\bar{L}^{-1}\Phi\int_0^1\varphi'((1-\theta)\hat{\boldsymbol{z}}+\theta\boldsymbol{z}^{(m)})d\theta$$

である。そこで、 $\boldsymbol{e}^{(m)}=\tilde{H}_\Phi^{(m-1)}\tilde{H}_\Phi^{(m-2)}\cdots\tilde{H}_\Phi^{(0)}\boldsymbol{e}^{(0)}$, $m=1,2,\cdots$ となる。

補題 3.1　$H_\Phi^{m_0}=\boldsymbol{0}$ ならば、

$$\|\tilde{H}_\Phi^{(m-1)}\tilde{H}_\Phi^{(m-2)}\cdots\tilde{H}_\Phi^{(0)}\|_{L_2}\leq\begin{pmatrix} m \\ \bar{l}\end{pmatrix}(\bar{a}+\bar{\varepsilon})^{m-\bar{l}}\bar{\varepsilon}^{\bar{l}},\qquad m\geq 1\qquad \text{かつ}$$
$$\|\tilde{H}_\Phi^{(m-1)}\tilde{H}_\Phi^{(m-2)}\cdots\tilde{H}_\Phi^{(m-m_0)}\|_{L_2}\leq m_0(\bar{a}+\bar{\varepsilon})^{m_0-1}\bar{\varepsilon}$$

である。ここで $[x]$ は x を越えない最大の整数、

$$\bar{l}=[\frac{m}{m_0}]\geq 1,\qquad \begin{pmatrix} m \\ \bar{l}\end{pmatrix}=\begin{cases}\frac{m(m-1)\cdots(m-\bar{l}+1)}{\bar{l}!}, & \bar{l}>0 \\ 1, & \bar{l}=0\end{cases}$$

であり、さらに、任意の $n\times n$ 行列 Q とノルム $\|\cdot\|$ に対して、$\|Q\|_{L_2}\equiv\|L_2QL_2^{-1}\|$ とおくと、 $\bar{a}=\|H_\Phi\|_{L_2}$ かつ $\bar{\varepsilon}\geq\|R_\Phi^{(m)}\|_{L_2}$ である。

(証明)　$\bar{l} \leq r \leq m$ に対して、

$$\begin{aligned}
\binom{m}{r} &= \frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{r!} \\
&= \frac{m(m-1)\cdots(m-\bar{l}+1)}{r(r-1)\cdots(r-\bar{l}+1)} \frac{(m-\bar{l})(m-\bar{l}-1)\cdots\{(m-\bar{l})-(r-\bar{l})+1\}}{(r-\bar{l})!} \\
&\leq \frac{m(m-1)\cdots(m-\bar{l}+1)}{\bar{l}!} \binom{m-\bar{l}}{r-\bar{l}} = \binom{m}{\bar{l}} \binom{m-\bar{l}}{r-\bar{l}}
\end{aligned}$$

仮定より $0 \leq l \leq \bar{l}-1$ に対して、$m-l \geq m_0 l + m_0$ かつ $m-\bar{l} < m_0\bar{l}+m_0$ となるので

$$\begin{aligned}
\|\tilde{H}_\Phi^{(m-1)}\tilde{H}_\Phi^{(m-2)}\cdots\tilde{H}_\Phi^{(0)}\|_{L_2} &\leq (\bar{a}+\bar{\varepsilon})^m - \left\{\bar{a}^m + \binom{m}{1}\bar{a}^{m-1}\bar{\varepsilon} + \cdots + \binom{m}{\bar{l}-1}\bar{a}^{m-\bar{l}+1}\bar{\varepsilon}^{\bar{l}-1}\right\} \\
&= \binom{m}{\bar{l}}\bar{a}^{m-\bar{l}}\bar{\varepsilon}^{\bar{l}} + \binom{m}{\bar{l}+1}\bar{a}^{m-\bar{l}-1}\bar{\varepsilon}^{\bar{l}+1} + \cdots + \binom{m}{m}\bar{\varepsilon}^m \\
&\leq \binom{m}{\bar{l}}\left\{\binom{m-\bar{l}}{0}\bar{a}^{m-\bar{l}} + \binom{m-\bar{l}}{1}\bar{a}^{m-\bar{l}-1}\bar{\varepsilon} + \cdots \right. \\
&\qquad \left. + \binom{m-\bar{l}}{m-\bar{l}}\bar{\varepsilon}^{m-\bar{l}}\right\}\cdot\bar{\varepsilon}^{\bar{l}} \\
&= \binom{m}{\bar{l}}(\bar{a}+\bar{\varepsilon})^{m-\bar{l}}\bar{\varepsilon}^{\bar{l}}
\end{aligned}$$

これより結果を得る。　□

注意 3.1　ノルム $\|\cdot\|$ は $\|I-\bar{U}\|$ をできるだけ小さくするようにとることに注意する。

定理 3.2　補題 3.1 で $\bar{\varepsilon}_1 = m_0(\bar{a}+\bar{\varepsilon})^{m_0-1}\bar{\varepsilon} < 1$ と仮定する。このとき、反復法(4)は任意の出発ベクトル $\boldsymbol{z}^{(0)}$ に対して、解 $\hat{\boldsymbol{z}}$ に収束する。

(証明)　補題 3.1 より、$\|\boldsymbol{e}^{(m)}\|_{L_2} \leq K\bar{\varepsilon}_1^{[\frac{m}{m_0}]}$ を得る。ここで、K は次の通りである。

$$K = \max(1, \|\tilde{H}_\Phi^{(0)}\|_{L_2}, \|\tilde{H}_\Phi^{(1)}\tilde{H}_\Phi^{(0)}\|_{L_2}, \cdots, \|\tilde{H}_\Phi^{(m_0-1)}\tilde{H}_\Phi^{(m_0-2)}\cdots\tilde{H}_\Phi^{(0)}\|_{L_2})$$

□

次の半線形２点境界値問題を考える。

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) - a(x)u'(x) + f(x,u) = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = \gamma_0, \quad u(1) = \gamma_1 \end{cases}$$

ここで ε は (0,1] 内のパラメーターで関数 a と f は C^1 級で ε に独立である。さらに $0 \leq \underline{c}(x) \leq f_u(x,u) \leq \bar{c}(x)$ とする。

正数 n について分割幅を $h = 1/(n+1)$ とし、[0,1] 内の点は $x_i = ih,\ i = 0,1,2,\cdots,n+1$ とする。そこで、次の非線形差分方程式を得る。

$$\begin{cases} -l_i z_{i-1} + p_i z_i - u_i z_{i+1} + \varphi_i(z_i) = 0, & 1 \leq i \leq n \\ z_0 = \gamma_0, \quad z_{n+1} = \gamma_1 \end{cases}$$

ここで $a_i = a(ih)$, $f_i(z_i) = f(ih, z_i)$, $\underline{c}_i = \underline{c}(ih)$ と $\bar{c}_i = \bar{c}(ih)$ に対して

$$\begin{cases} l_i = \varepsilon + \frac{h}{2}(|a_i| - a_i), & p_i = 2\varepsilon + h|a_i| + \frac{h^2}{2}(\underline{c}_i + \bar{c}_i), \\ u_i = \varepsilon + \frac{h}{2}(|a_i| + a_i), & \varphi_i(z_i) = h^2 f_i(z_i) - \frac{h^2}{2}(\underline{c}_i + \bar{c}_i)z_i \end{cases}$$

自然な順序をとるとき、上の方程式は $F(\boldsymbol{z}) \equiv A\boldsymbol{z} + \varphi(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$ となる。ここで $A = [-l_i, p_i, -u_i]$ と $A' = [-l_i, p_i - \frac{h^2}{2}(\underline{c}_i + \bar{c}_i), -u_i]$ は $n \times n$ 正定値三重対角行列であり、それぞれ $l_i, u_i \geq 0$, $l_i + u_i = p_i - \frac{h^2}{2}(\underline{c}_i + \bar{c}_i) \leq p_i$ である 。また $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^T$ に対し、$\varphi(\boldsymbol{z}) = (\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2), \cdots, \varphi_n(z_n))^T$, $F(\boldsymbol{z}) = (F_1(\boldsymbol{z}), F_2(\boldsymbol{z}), \cdots, F_n(\boldsymbol{z}))^T$ である。

$t \in (-\infty, \infty)$ に対して $\varphi_i(t)$ は実かつ連続的に微分可能で、$-\frac{h^2}{2}(\bar{c}_i - \underline{c}_i) \leq \varphi_i'(t) \leq \frac{h^2}{2}(\bar{c}_i - \underline{c}_i)$ である。

最後に、行列 A の LUL 分解に対する反復法 (4) の収束定理を得る。

定理 3.3 上の仮定から、もし $\frac{l_{i+1}}{p_{i+1}}, \frac{u_i}{p_i} \leq \frac{1}{2}$, $1 \leq i \leq n-1$ かつ $ce^c < 1$、ただし $c = 2\max_{1\leq i\leq n}\{(\bar{c}_i - \underline{c}_i)/p_i\}$ ならば、反復法 (4) は任意の出発ベクトル $\boldsymbol{z}^{(0)} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して、解 $\hat{\boldsymbol{z}}$ に収束する。

(証明) 仮定と 定理 1.2 と 定理 2.2 より $0 < \omega_i p_i < \bar{\omega} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-4\max\limits_{1\leq j\leq n-1}\frac{l_{j+1}}{p_{j+1}}\frac{u_j}{p_j}}} \leq 2$。

$$\|H_\Phi\|_{L_2} = \|I - \bar{U}\| \leq \max_{1\leq i\leq n-1} |(\omega_i p_i)\frac{u_i}{p_i}| \leq 1, \quad R_\Phi^{(m)} = -\bar{L}^{-1}\Phi\int_0^1 \varphi'((1-\theta)\hat{\boldsymbol{z}} + \theta\boldsymbol{z}^{(m)})d\theta$$

$$\|R_\Phi^{(m)}\|_{L_2} \leq \|L_1^{-1}\Phi\int_0^1 \varphi'((1-\theta)\hat{\boldsymbol{z}} + \theta\boldsymbol{z}^{(m)})d\theta L_2^{-1}\| \leq \frac{c}{n}$$

ここで、ノルム $\|\cdot\|$ はスペクトルノルムで Euclid vector norm から導かれる。

$$\bar{a} \leq 1, \ \bar{\varepsilon} \leq \frac{c}{n} \quad \text{かつ} \quad \bar{\varepsilon}_1 \leq (1+\frac{c}{n})^{m_0-1}\frac{m_0}{n}c < e^{\frac{m_0}{n}c}\frac{m_0}{n}c \leq e^c c < 1$$

となり、定理 3.2 の仮定は満たされる。 □

参考文献

[1] J. J. Buoni and R. S. Varga, Theorems of Stein-Rosenberg type, in Numerical Mathematics (R.Ansorge, K.Glashoff, and B.Werner,eds) Birkhauser, Basel, (1979), 65-75.

[2] I. Duff, A. M. Erisman, and J. K. Reid, Direct Methods for Sparse Matrices, Clarendon Press, Oxford, (1986).

[3] E. Ishiwata and Y. Muroya, Improved SOR method with orderings and direct methods, Tech. Report 95-34, Waseda University (1995).

[4] E. Ishiwata and Y. Muroya, Main convergeince theorems for the improved SOR method with orderings, Tech. Report 95-42, Waseda University (1995).

[5] E. Ishiwata and Y. Muroya, Precise error estimates of the improved SOR method with orderings for tridiagonal matrices, Tech. Report 95-43, Waseda University (1995).

[6] E. Ishiwata, Y. Muroya and K. Isogai, Adaptive improved SOR method with orderings, Tech. Report 96-7, Waseda University (1996).

[7] E. Ishiwata and Y. Muroya, Improved SSOR method with orderings and its applications, Tech. Report 96-25, Waseda University (1996).

[8] Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press (1965).