数理解析研究所講究録
991 巻 1997 年 44-46

Sylow numbers of finite groups

熊本大学自然科学 千吉良直紀 (Naoki Chigira)

G を有限群とする. 素数 p に対して G が p べき零であるとは シロー p 部分群 P に対して $G=NP$, $N\cap P=1$ となる正規部分群 N が存在するときをいう. この性質は有限群の構造を調べる上で極めて基本的な概念である.

ここでは G が p べき零であることの必要十分条件となる条件ついて述べる. この話題は Zhang [3] に基づいている.

$\pi(G)$ で G の位数を割る素数全体の集合とする. $r\in\pi(G)$ に対して

$$n_r(G)=|Syl_r(G)|$$

とおきこれを シロー r 数という。シローの定理から $R\in Syl_r(G)$ を用いて $n_r(G)=|G:N_G(R)|$ とあらわせる.

このシロー数と群の p べき零性について次のことが成り立つことが容易にわかる.

補題. 有限群 G が p べき零ならば 任意の素数 r に対して $(p,\ n_r(G))=1$ が成り立つ.

これに関して Huppert [2] は次のような予想をしている.

Huppert 予想. 有限群 G が p べき零であるための必要十分条件は任意の素数 r に対して $(p,\ n_r(G))=1$ が成り立ち, かつ任意の素数 r に対して $R\in Syl_r(G)$ とするとき $N_G(R)$ が p べき零であることである.

この予想に対して Zhang [3] は有限単純群の分類定理を用いて次のことを主張している.

主張. 有限群 G が p べき零であるための必要十分条件は任意の素数 r に対して $(p,\ n_r(G))=1$ が成り立つことである.

しかしながらこの主張には反例がある.

反例. $G=U_3(4)$ とすると $|G|=62400=2^6\cdot 3\cdot 5^2\cdot 13$ である. $Q_r\in Syl_r(G)$ とする. Atlas より

$$\begin{aligned} N_G(Q_2) &\simeq 2^{2+4}:15 \\ N_G(Q_3) &\simeq 5\times S_3 \\ N_G(Q_5) &\simeq 5^2:S_3 \\ N_G(Q_{13}) &\simeq 13:3 \end{aligned}$$

これよりどのシロー群の正規化群の位数も 3 で割れる. G の位数は 3 で一回しか割れない. したがって どの $r \in \pi(G)$ に対しても $(3,\ n_r(G)) = 1$ である. 一方 G は 位数が 3 で割れる単純群であるからもちろん 3 べき零ではない. したがって $U_3(4)$ は Zhang の主張の反例になっている.

反例は他にもある.

定理 1. $G = U_3(q)$ とする. $p \in \pi(G)$ がすべての $r \in \pi(G)$ に対して $(p,\ n_r(G)) = 1$ を満たすならば $p = 3$ であり, かつ $q = 2^m$ で m は偶数かつ 3 で割れない整数である.

これよりさらにいろいろな反例がつくれる.

$\mathcal{U} = \{U_3(q) | q = 2^m, m$ は偶数で 3 で割れない $\}$, $\mathcal{P}$ で 3 べき零群全体の集合とする.

系. $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_t$, ここで $G_1 \in \mathcal{U}$, $G_i \in \mathcal{U} \cup \mathcal{P}$ $(2 \le i \le t)$ とする. このときすべての $r \in \pi(G)$ に対して $(3,\ n_r(G)) = 1$ が成り立ちかつ G は 3 べき零ではない.

このように Zhang の主張は成り立たない. しかしながら次のことが成り立つ. (証明には有限単純群の分類定理を必要とする.)

定理 2. G を有限群, p を 3 と異なる素数とする. G が p べき零であるための必要十分条件は任意の素数 r に対して $(p,\ n_r(G)) = 1$ が成り立つことである.

さらにこれを用いて次のことが成り立つことがわかる.

定理 3. Huppert 予想は正しい.

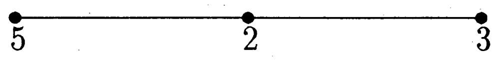
次にシロー数を使ったグラフを考える. シローグラフ $\Gamma_s(G)$ は次のように定義される:

頂点集合 $V(\Gamma_s(G)) = \{p \in \pi(G) | p$ はある素数 r に対して $n_r(G)$ を割る $\}$ とし, $p, q \in V(\Gamma_s(G))$ は pq が $n_r(G)$ を割るような $r \in \pi(G)$ が存在するときに辺で結ばれるとする.

例. (1) $G = A_5$ とする. 素数 r に対して Q_r をシロー r 群とする.

$$\begin{array}{rcll} N_G(Q_2) & \simeq & A_4, & n_2(G) = 5 \\ N_G(Q_3) & \simeq & S_3, & n_3(G) = 2 \cdot 5 \\ N_G(Q_5) & \simeq & D_{10}, & n_5(G) = 2 \cdot 3 \end{array}$$

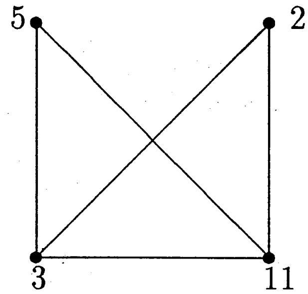
であるからシローグラフ $\Gamma_s(A_5)$ は次のようになる.

$\Gamma_s(A_5) =$ 

(2) $G = M_{11}$ とする. 同様に素数 r に対して Q_r をシロー r 群とする.

$$\begin{array}{rcll} N_G(Q_2) & \simeq & 8:2, & n_2(G) = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \\ N_G(Q_3) & \simeq & M_9:2, & n_3(G) = 5 \cdot 11 \\ N_G(Q_5) & \simeq & 5:4, & n_5(G) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11 \\ N_G(Q_{11}) & \simeq & 11:5, & n_5(G) = 2^4 \cdot 3^2 \end{array}$$

であるからシローグラフ $\Gamma_s(M_{11})$ は次のようになる.

$\Gamma_s(M_{11}) =$ 

単純群の分類定理を用いて次のことがわかる.

定理 4. G が単純群ならば $\Gamma_s(G)$ は連結である.

注意. Theorem 4 も Zhang [3] に書かれているがその証明は正しくない.

これとシロー数の簡単な性質を用いて次のことがわかる.

系. G を任意の $r \in \pi(G)$ に対して $n_r(G)$ が素数べきとなるような有限群とする. このとき G は可解群である.

References

1. N. Chigira, Number of Sylow subgroups and p-nilpotence of finite groups, preprint.
2. B. Huppert, Subnormale Untergruppen und p-Sylowgruppen, *Acta Sci. Math.* **22** (1961) 46–61.
3. J. Zhang, Sylow numbers of finite groups, *J. Algebra* **176** (1995) 111–123.