

# 成層流体中の孤立波の伝播

九大応力研 辻 英一 (Hidekazu Tsuji)

## 1 序論

密度成層流体中を伝わる波動についての研究の中で、系の特徴に応じた様々なモデル方程式が提出されている。よく知られている物として、鉛直方向の長さスケールは波動の振幅に比べると非常に大きい、水平方向の長さスケール(例えば波長)に比べると非常に小さい、という仮定より導かれる KdV 方程式がある。<sup>1,2)</sup> この方程式の有効性は、その解である孤立波の形状が、実験での結果と定性的さらには定量的にも良く合っていることでも示される。<sup>3)</sup>

一方、振幅に関する制限の代わりに、密度の深さに関する変化が小さくしかもほぼ一様に変化しているという仮定をおいた場合が、Benney と Ko によって調べられ、そこでは KdV 方程式と同じく  $\text{sech}^2$  の関数形で表される孤立波が定常に伝播することが示された。<sup>4)</sup> Grimshaw と Yi は、同様な系で非定常な運動を記述できる微積分方程式(以下 GY 方程式)を導出した。<sup>5)</sup> しかし、彼らは底の地形が作る波動について主に論じており、孤立波の非定常な振る舞いについては言及していない。

本研究では、上下に壁を置く境界条件の基に、外力項を持たない形の GY 方程式を再構成し、それを用いて複数の孤立波の非定常な相互作用を数値的に調べる。特に、KdV 方程式で見られる、相互作用の前後で各々の孤立波が形状などの個性を保って伝播する性質がどの程度あるのかという問題に注目する。

## 2 GY 方程式

GY 方程式の導出の概略を述べる(詳細は Grimshaw と Yi<sup>5)</sup>)。

上下に固定壁のある非粘性かつ非圧縮の流体を考える。波が無い基本状態において流体は静止しており、密度場が  $\rho_1\rho_0(z)$  ( $\rho_1$ : 代表的な密度,  $h$ : 上下の壁の間の距離,  $hz$ : 鉛直上向きに取られる座標) と表される成層を持つとする。成層の変化の程度を表すパラメーター  $\beta = (h/g)N_1^2$  ( $N_1$ : 代表的な Brunt-Väisälä 振動数  $N$ ,  $N^2 = (g/\rho_0)|d\rho_0/dz|$ ,  $g$ : 重力加速度) は小さいとする。

この時、基礎方程式は次のようになる。

$$u_x + w_z = 0, \quad \rho_0(z - \zeta) \frac{du}{dt} + p_x = 0,$$

$$\rho_0(z-\zeta)\frac{dw}{dt} + p_z + \frac{1}{\beta}[\rho_0(z-\zeta) - \rho_0(z)] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} - w = 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z},$$

ここで、 $hx$  は水平方向の座標（運動は一次元的とする）、添字  $x, z$  は偏微分を表す。流体の速度は  $x, z$  方向にそれぞれ  $hN_1u, hN_1w$  と表し、 $\beta\rho_1ghp$  は基準状態からの変動としての圧力、 $h\zeta(x, z, t)$  は基本状態で位置  $(x, y)$  にあつた流体粒子の時刻  $t$  での鉛直方向の移動量を表す。なお、 $\rho_0$  の後ろの  $()$  は、積でなく引数である。境界条件は  $z = 0, 1$  で  $\zeta = 0$  と表せる。

流線関数  $\psi$  ( $u = \psi_z, w = -\psi_x$ ) を用いて方程式を書き換える。微小パラメータ  $\mu$  を導入し、 $\beta = \sigma\mu^2$  ( $\sigma = O(1)$ ),  $N = N_0 + \beta M(z)$  とする。そして座標変換

$$x' = \mu(x - ct), \quad t' = \mu^3 t, \quad (2)$$

を行う ( $c$  は後に定まる)。すると、(1) は次のようになる (以後 ' は取る)。

$$J\left(q + \frac{N_0^2}{c^2}\psi, \phi\right) - N_0^2\left(\zeta - \frac{\psi}{c}\right)_x + \mu^2 F = 0,$$

$$J\left(\zeta - \frac{\psi}{c}, \phi\right) + \mu^2 \zeta_t = 0,$$

$$J(a, b) = a_x b_z - a_z b_x, \quad q = \psi_{zz} + \mu^2 \psi_{xx}, \quad \phi = \psi - cz, \quad (3)$$

$$F = q_t - \sigma M(z - \zeta)\zeta_x + \sigma N_0^2 \left[ \mu^2 \zeta_x \frac{d}{dt} \psi_x - (1 - \zeta_z) \frac{d}{dt} \psi_z \right],$$

$$\frac{d}{dt} = (\psi_z - c) \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \frac{\partial}{\partial z} + \mu^2 \frac{\partial}{\partial t},$$

ただし  $M$  の後ろの  $()$  も引数である。ここで  $\phi_z \neq 0$  の条件付きで、 $z$  から  $\phi$  への座標変換を行う。この条件は、 $\psi_z - c \neq 0$ 、つまり水平方向の速度が  $c$  を越えないという仮定である。この時一般に関数  $f(x, \phi)$  について、

$$J(f(x, \phi), \phi) = \frac{\partial f(x, \phi)}{\partial x} \Big|_{\phi=\text{constant}} \phi_z, \quad (4)$$

が成り立つことにより、

$$\zeta - \frac{\psi}{c} = -\mu^2 \int_{-\infty}^x \left( \frac{\zeta_t}{\phi_z} \right)_{\phi=\text{constant}} dx', \quad \psi_{zz} + \frac{N_0^2}{c^2} \psi + \mu^2 G = 0,$$

$$G = \psi_{xx} + \int_{-\infty}^x \frac{1}{\phi_z} \left[ F + N_0^2 \frac{\partial}{\partial x'} \int_{-\infty}^{x'} \left( \frac{\zeta_t}{\phi_z} \right)_{\phi=\text{constant}} dx'' \right]_{\phi=\text{constant}} dx'. \quad (5)$$

上式中で、 $\phi = \text{constant}$  の添え字は、 $\phi$  を一定にしたままで積分を行うという意味である。

そして  $\zeta, \psi$  を次のように展開する.

$$\zeta = \zeta^{(0)} + \mu^2 \zeta^{(1)}, \quad \psi = \psi^{(0)} + \mu^2 \psi^{(1)}. \quad (6)$$

最初のオーダーは,

$$\psi^{(0)} = cA(x, t) \sin\left(\frac{N_0}{c}z\right), \quad \zeta^{(0)} = A(x, t) \sin\left(\frac{N_0}{c}z\right), \quad c = \frac{N_0}{n\pi}, \quad (7)$$

と解ける. 次のオーダーで, 可解条件から  $A$  に関する方程式が得られる. これを簡単にするため,  $\xi = z - A \sin[(N_0/c)z]$  と表し,  $\xi_z \neq 0$  の条件付きで  $z$  から  $\xi$  への座標変換を行う. この条件は,  $|A| < 1/(n\pi) = A_{\max}$  を意味する. この時,

$$\phi = \psi - cz \simeq \psi^{(0)} - cz = cA \sin[(N_0/c)z] - cz = -c\xi,$$

となるので,  $\phi = \text{constant}$  は  $\xi = \text{constant}$  としてよい. すると方程式は簡単になり, 最終的に次のようになる.

$$\begin{aligned} & \frac{N_0^2}{c^2} \int_{-\infty}^x K(A, A') A'_t dx' + \sigma m(A) + \frac{1}{2} c A_{xx} = 0, \\ m(A) &= \frac{1}{c} \int_0^1 M(\xi) \frac{\partial z}{\partial A} (z - \xi) d\xi \\ &+ \frac{1}{2} N_0^3 [1 - (-1)^n] A^2 - N_0^2 c \int_0^1 \frac{\partial z}{\partial A} \int_0^A \frac{N_0}{c} \cos\left(\frac{N_0}{c}z'\right) dA' d\xi, \\ K(A, A') &= \int_0^1 \left[ \frac{\partial z}{\partial A} \frac{\partial z'}{\partial A'} \left(1 + \frac{\partial z'}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial z}{\partial A} (z' - z) \frac{\partial^2 z'}{\partial \xi \partial A'} \right] d\xi, \\ z &= z(\xi, A(x, t)), \quad z' = z'(\xi, A'(x', t)), \end{aligned} \quad (8)$$

ここで座標  $\xi$  の定義から,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \xi} &= \frac{1}{1 - \frac{N_0}{c} A \cos\left(\frac{N_0}{c}z\right)}, \\ \frac{\partial z}{\partial A} &= \frac{\sin\left(\frac{N_0}{c}z\right)}{1 - \frac{N_0}{c} A \cos\left(\frac{N_0}{c}z\right)} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \sin\left(\frac{N_0}{c}z\right), \end{aligned} \quad (9)$$

である.

以後簡単のため  $M(\xi) = 0$  とする. Grimshaw と Yi は近似として  $m(A) = pA^2$  ( $p$ : 定数) としているが, 実際これは厳密に解けて (Appendix を参照),

$$\frac{N_0^2}{c^2} \int_{-\infty}^x K(A, A') A'_t dx' + \frac{\sigma}{6} N_0^3 [1 - (-1)^n] A^2 + \frac{1}{2} c A_{xx} = 0, \quad (10)$$

を得る。あるいは  $x$  で微分して,

$$A_t + \int_{-\infty}^x \frac{\partial K(A, A')}{\partial A} \frac{A_x}{K(A, A)} A'_t dx' + \frac{\sigma c^2 N_0}{3K(A, A)} [1 - (-1)^n] AA_x + \frac{c^3}{2N_0^2 K(A, A)} A_{xxx} = 0. \quad (11)$$

式 (10), (11) が GY 方程式である。

次にこの方程式の性質についてまとめておく。

まず  $A$  が小さい場合,

$$K(A, A') \simeq 1 - \frac{1}{4} \frac{N_0^2}{c^2} (3A^2 - 8AA' + 3A'^2) + O(A^4), \quad (12)$$

となる。よって (11) は  $O(A^2)$  までで,

$$A_t + \frac{\sigma c^2 N_0}{3} [1 - (-1)^n] AA_x + \frac{c^3}{2N_0^2} A_{xxx} = 0, \quad (13)$$

と KdV 方程式になる (厳密には非線型項のオーダーが一段低い<sup>6)</sup>)。

次に定常進行波解  $A(x - \bar{V}t) = A(\bar{x})$  についてだが,

$$\int_{-\infty}^x K(A, A') A'_x dx' = A, \quad (14)$$

を使うと, (10) は,

$$\frac{N_0^2}{c^2} \bar{V} A + \frac{\sigma}{6} N_0^3 [1 - (-1)^n] A^2 + \frac{1}{2} c A_{\bar{x}\bar{x}} = 0. \quad (15)$$

解は,

$$A = a \operatorname{sech}^2 k\bar{x}, \quad (16)$$

$$k^2 = \frac{1}{18} N_0^2 n\pi [1 - (-1)^n] \sigma a, \quad \bar{V} = \frac{1}{9} c^3 n\pi [1 - (-1)^n] \sigma a.$$

これは Benney と Ko の得た解と一致する。<sup>4)</sup>

保存量としては,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 \left[ 2z \sin\left(\frac{N_0}{c}\xi\right) - \frac{N_0}{c} z^2 \cos\left(\frac{N_0}{c}\xi\right) + \frac{N_0}{c} \xi z \cos\left(\frac{N_0}{c}\xi\right) \right] d\xi dx, \quad (17)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} dx,$$

を導くことができる。  $A$  が非常に小さい場合を考えると,  $I_1$  は,

$$I_1' = \int_{-\infty}^{\infty} \left( A - \frac{N_0^2}{4c^2} A^3 \right) dx, \quad (18)$$

となり,  $\int_{-\infty}^{\infty} A dx$  (以後  $I_A$  とおく) が保存されないということがわかる。前に述べたように  $A$  には上限があるので, このずれが非常に大きくなることはないが, 結果の解釈には注意が必要である。

### 3 数値計算法

数値計算の方法は Yi と Warn とほぼ同じである。<sup>7)</sup> 式(10)は第1種の積分方程式であり非適切なので、(11)の形を解く。

まず、空間微分を擬スペクトル法で計算する。すると、(11)は  $\partial A/\partial t$  についての積分方程式と見ることが出来る。これを反復法で解いた後、求めた  $\partial A/\partial t$  より Runge-Kutta 法で次の時間の  $A$  を求める。

核  $K(A, A')$  に関する量は非常に複雑な形をしており、計算に非常に時間がかかる。そこで、最初に

$|A| < A_{\max}$  及び  $|A'| < A_{\max}$  の間でそれぞれの量についての数表を作り、その後の計算では補間によって値を求める、という方法を取る。これらの量の特徴を示す例として  $K(A, A)$  をグラフを図1に示す。小さい  $A$  については、(12)に従い、 $|A| \simeq A_{\max}$  付近で急激に増加する。この性質のため、 $A$  が大きい所では計算に注意が必要である。<sup>8)</sup> なお後に示すように、今回の計算では極端に大きい  $A$  の場合を取り扱っていないので、特に問題は生じていないと思われる。

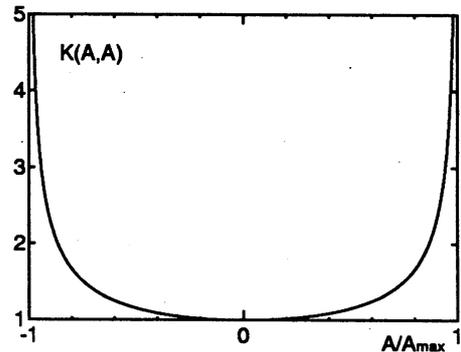


図1:  $K(A, A)$  の関数形.

### 4 数値計算の結果

以下にパラメーターを  $n = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $N_0 = \pi$  と取った場合の数値計算の結果を示す。この時、 $c = 1$ ,  $A_{\max} = 1/\pi \simeq 0.318$  である。初期条件として、それぞれが定常に伝播するような二つの孤立波 (振幅  $A_1 > 0$  と  $A_2 = A_1/2$ ) を、振幅が大きい方を後ろに、重なりがほとんど無いように離して置く。時間が経つと振幅の大きい孤立波が小さい方に追いつき、相互作用を始める。

孤立波の振幅が比較的小さい場合 ( $A_1 = 0.1 \simeq 0.314A_{\max}$ ) を図2に示す。相互作用の過程が (b)~(e) で見られるが、KdV方程式での孤立波の相互作用と同様の変化である。定常とみなせる状態が (f) であるが、二つの孤立波が位置を交換して元の形を取り戻し、それら以外の波の発生はほとんど認められない。比較のために、初期に与えた孤立波を定常解として持つ KdV 方程式に従い同じ初期条件の時間発展を求めている。(f) では GY 方程式での計算結果に加えて、同時刻での KdV 方程式での結果を破線で重ねて書いているのだが、違いは確認できない。この結果は、 $A$  が小さい時に GY 方程式は (13) に従う事で説明できる。

図3は、振幅が比較的大きい場合 ( $A_1 = 0.26 \simeq 0.817A_{\max}$ ) の結果である。計算をする過程で、振幅が大きくなるにつれて計算誤差が大きくなることが分かり、それを防ぐた

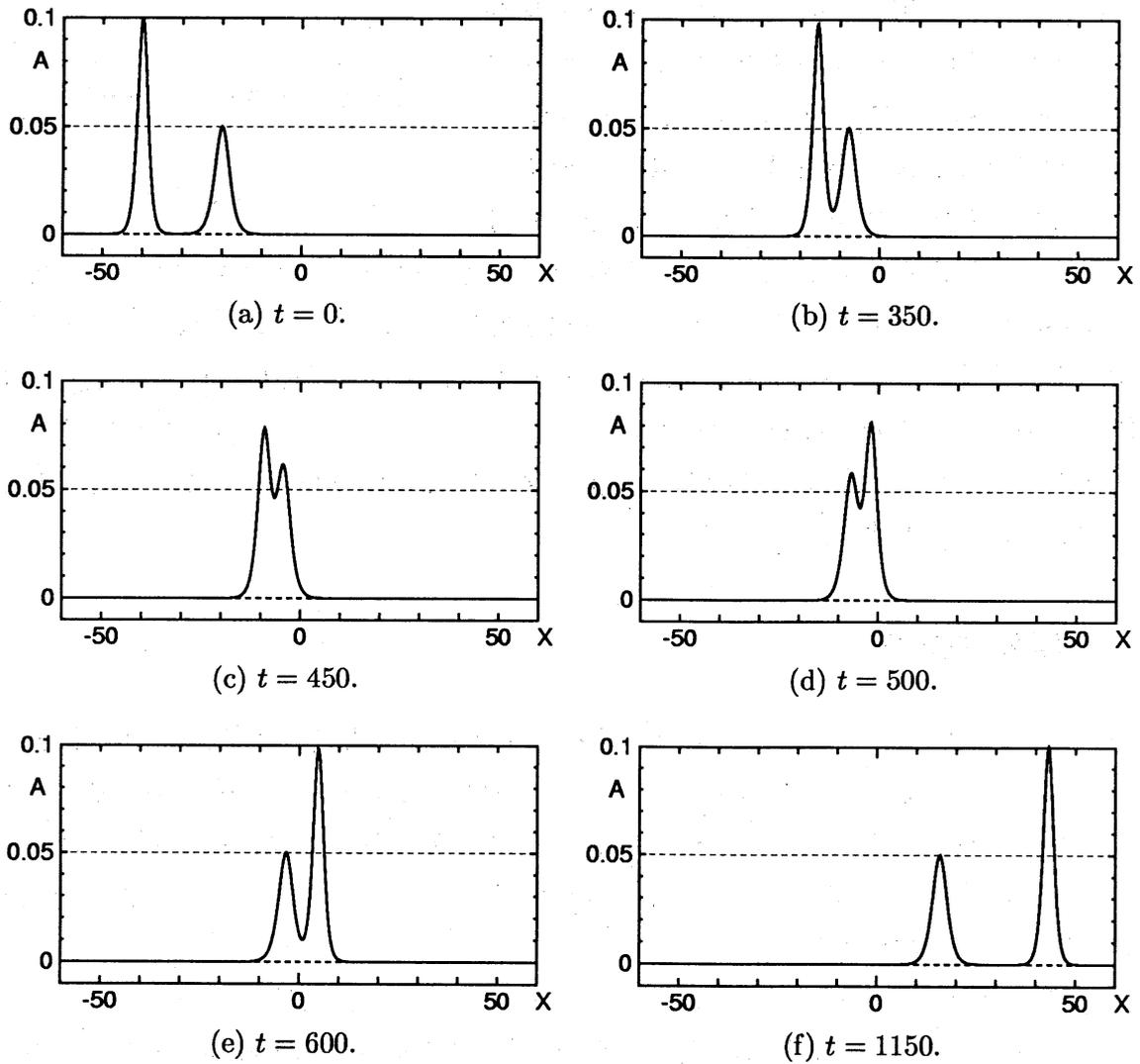


図 2: GY 方程式に従う二つの孤立波の相互作用.  $A_1 = 0.1$ .

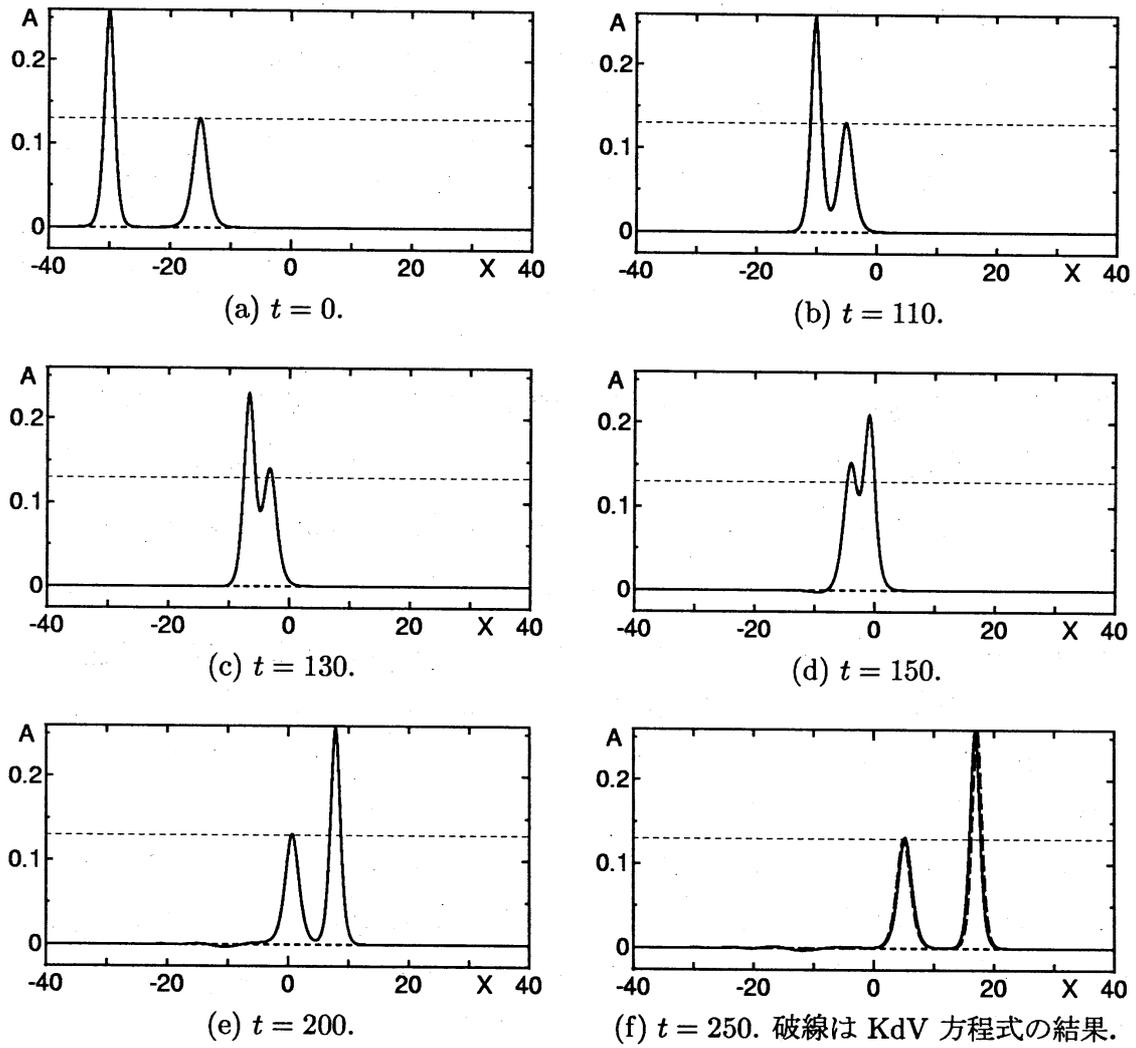


図 3: GY 方程式に従う二つの孤立波の相互作用.  $A_1 = 0.26.$

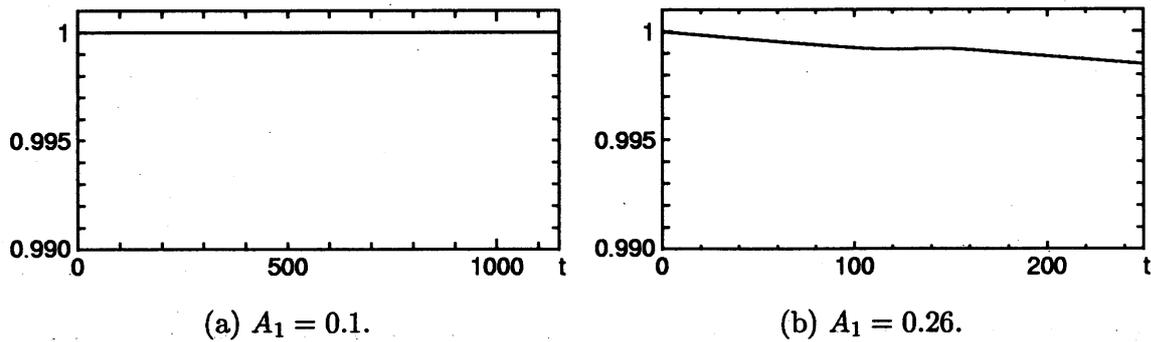


図 4: 孤立波が相互作用している間の  $I_2$  の値.

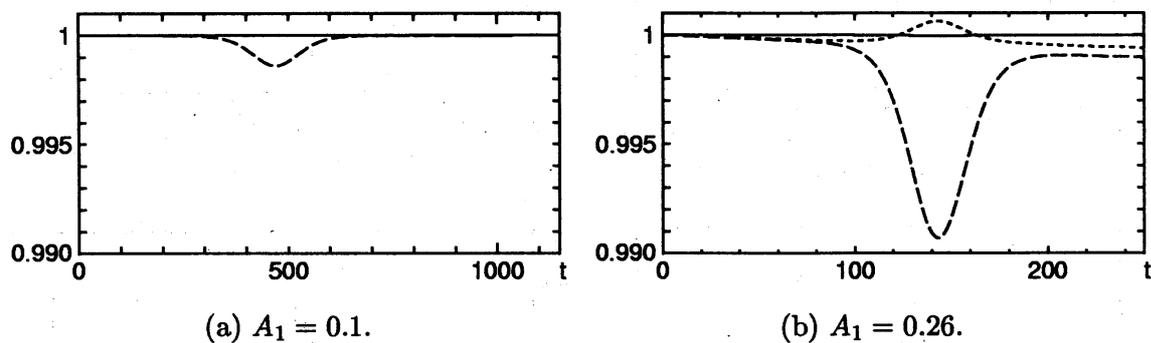


図 5: 孤立波が相互作用している間の  $I_1$  (実線),  $I_1'$  (点線),  $I_A$  (破線) の値.

めに領域の分割を狭く取って対応したが、これ以上の振幅の計算は実際には難しい。

この場合の振幅  $A$  の大きさは、図 1 などから見て KdV 方程式とのずれを調べるには十分であると考えられるが、結果は全体として、振幅が小さい場合と非常に良く似ている。違いとして、僅かではあるが、相互作用の過程の中で (d) の時点から、後方に孤立波とは明らかに違う性質の波が見え、相互作用が終わったとみなせる状態 (f) でも存在している。その時の振幅は大きい所で  $A_1$  の 1% 程度である。(f) では前と同様に KdV 方程式での結果を重ねて示している。僅かな違いが、例えば振幅の大きい孤立波の位置に見られるが、孤立波の振幅に差を見つけることはできない。

次に積分量の時間変化を示す。全ての量は初期値で規格化しており、また縦軸のスケールからわかるように、全ての量の変化は最大でも約 1% と小さい。

図 4 に 保存量  $I_2$  を示す。両方の場合についてほぼ保存している。振幅の大きい場合では 0.1% 程度の減少が見られるが、これは計算の分点を増やすことにより改善される性質があるので数値的な誤差と言える。

次に  $I_1$  などの量を図 5 に示す。 $I_1$  は非常に良く保存している。先に述べたように、 $I_A$  は保存しないが、相互作用がない間は保存していると言ってよく、相互作用が始まると減少するが、再び増加し、(b) では数値誤差の影響が見られるものの、結局は元に戻る。こ

の過渡的な変化の大きさは相互作用する孤立波の振幅の大小に対応している。また  $I_A$  の  $I_1$  との差は、 $A$  が小さい場合には  $O(A^3)$  であることは先に示したが、ここで  $I_1'$  との比較を行っても解る。

## 5 結論

前節の計算結果で示したように、GY方程式での孤立波の相互作用は、ほぼKdV方程式でのそれと似ているという結果が出た。さらに振幅が大きいたが問題となるが、仮に精度良く計算が行えたとしても、 $I_A$  の相互作用中の変化はかなり大きくなると考えられ、果たして方程式がその間有効であるかが問題となる。この点を克服するため、最終的には方程式を改良することが必要だと思われる。

GY方程式では、鉛直モード  $n$  が偶数の場合、方程式の中の非線型項が消えてしまう。この場合の Benney と Ko らの定常状態の解析では、座標変換のスケールを代えると、(15) で2次と3次の非線形項を持つ式が得られ、定常進行波解として違う性質の孤立波が存在できる。<sup>4)</sup> 同様のスケールリングを使って非定常の解析を行った。しかし、より高次の展開が必要とされるために、非定常な場合の方程式を導くことは難しく、今後の課題として残されている。

また、実験との比較についても考えたが、著者が知る報告は、いずれも密度場が二層かそれに近い分布で、密度が急激に変化する場所を持つため、ここでの結果を比較するのは難しい。

## Appendix (10)の導出

式(8)で  $m(A)$  の中の項

$$-N_0^2 c \int_0^1 \frac{\partial z}{\partial A} \int_0^A \frac{N_0}{c} \cos\left(\frac{N_0}{c} z'\right) dA' d\xi, \quad (\text{A1})$$

を計算する。内側の積分は、

$$\begin{aligned} & \frac{N_0}{c} \int_0^A \cos\left(\frac{N_0}{c} z'\right) dA' \\ &= \frac{N_0}{c} \left[ A' \cos\left(\frac{N_0}{c} z'\right) \right]_0^A - \frac{N_0}{c} \int_0^A A' \frac{N_0}{c} \left[ -\sin\left(\frac{N_0}{c} z'\right) \right] \frac{\partial z'}{\partial A'} dA' \\ &= \frac{N_0}{c} A \cos\left(\frac{N_0}{c} z\right) + \left(\frac{N_0}{c}\right)^2 \int_0^A (z' - \xi) \frac{\partial z'}{\partial A'} dA' \\ &= \frac{N_0}{c} A \cos\left(\frac{N_0}{c} z\right) + \left(\frac{N_0}{c}\right)^2 \int_0^A \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial A'} [(z' - \xi)^2] dA' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N_0}{c} A \cos\left(\frac{N_0}{c} z\right) + \left(\frac{N_0}{c}\right)^2 \frac{1}{2} (z - \xi)^2 \\
&= \frac{N_0}{c} A \cos\left(\frac{N_0}{c} z\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{N_0}{c}\right)^2 A^2 \sin^2\left(\frac{N_0}{c} z\right).
\end{aligned} \tag{A2}$$

これを (A1) に入れ, 整理して,

$$\begin{aligned}
&-N_0^2 c \int_0^1 \frac{\partial z}{\partial A} \int_0^A \frac{N_0}{c} \cos\left(\frac{N_0}{c} z'\right) dA' d\xi \\
&= -N_0^3 \int_0^1 \frac{\partial z}{\partial A} A \cos\left(\frac{N_0}{c} z\right) d\xi - \frac{N_0^4}{2c} \int_0^1 \frac{\partial z}{\partial A} A^2 \sin^2\left(\frac{N_0}{c} z\right) d\xi.
\end{aligned} \tag{A3}$$

(9) を使うと,

$$\begin{aligned}
&-N_0^2 c \int_0^1 \frac{\partial z}{\partial A} \int_0^A \frac{N_0}{c} \cos\left(\frac{N_0}{c} z'\right) dA' d\xi \\
&= -N_0^3 A \int_0^1 \frac{\partial z}{\partial \xi} \sin\left(\frac{N_0}{c} z\right) \cos\left(\frac{N_0}{c} z\right) d\xi - \frac{N_0^4}{2c} A^2 \int_0^1 \frac{\partial z}{\partial \xi} \sin^3\left(\frac{N_0}{c} z\right) d\xi \\
&= -N_0^3 A \int_0^1 \frac{c}{2N_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sin^2\left(\frac{N_0}{c} z\right) \right] \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \\
&\quad - \frac{N_0^4}{2c} A^2 \int_0^1 \frac{c}{N_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{12} \cos\left(\frac{N_0}{c} z\right) - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{N_0}{c} z\right) \right] \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \\
&= -N_0^2 c A \left[ \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{N_0}{c} z\right) \right]_0^1 - \frac{N_0^3}{2} A^2 \left[ \frac{1}{12} \cos\left(\frac{N_0}{c} z\right) - \frac{3}{4} \cos\left(\frac{N_0}{c} z\right) \right]_0^1 \\
&= -\frac{N_0^3}{2} A^2 [(-1)^n - 1] \left( \frac{1}{12} - \frac{3}{4} \right) \\
&= \frac{1}{3} N_0^3 A^2 [(-1)^n - 1].
\end{aligned} \tag{A4}$$

よって,

$$m(A) = \frac{1}{2} N_0^3 A^2 [1 - (-1)^n] + \frac{1}{3} N_0^3 A^2 [(-1)^n - 1] = \frac{1}{6} N_0^3 A^2 [1 - (-1)^n], \tag{A5}$$

となり, (10) が導かれる.

## 参考文献

- 1) T.B.Benjamin: J. Fluid Mech. **25** (1966) 241.
- 2) D.J.Benney: J. Math. Phys. **45** (1966) 52.
- 3) C.G.Koop and G.Butler: J. Fluid Mech. **112** (1981) 225.
- 4) D.J.Benney and D.R.S.Ko: Stud. Appl. Math. **59** (1978) 187.

- 5) R.Grimshaw and Yi Zenghin: *J. Fluid Mech.* **229** (1991) 603.
- 6) S.A.Maslowe and L.G.Redekopp: *J. Fluid Mech.* **101** (1980) 321.
- 7) Yi Zenghin and T.Warn: *Adv. Atmos. Sci.* **4** (1987) 43.
- 8) J.W.Rottman, D.Broutman and R.Grimshaw: *J. Fluid Mech.* **306** (1996) 1.