

円管内の気体の非平面波モードの共鳴振動

北大工 矢野 猛 (Takeru Yano)

1. はじめに

以下に述べるような円管内の非平面波モードの振動を考える: 半径 R , 長さ L の円管の一端を閉じ, 他端に振動膜をはる. 膜の振動は, 最大振幅 a , 角振動数 ω の正弦振動で, 振幅の r^* 方向への依存性が $J_0(j_1 r^*/R)$ で表され, 軸対称であるとする (r^* は円管の中心軸からの距離, J_n は n 次第一種 Bessel 関数, $j_1 = 3.83\dots$ は J_1 の非負の最小の零点). 膜の静止位置からの距離を x^* とすると, 膜の振動によって励起される気体の線形振動 (音波) は, 無次元の速度ポテンシャル Φ を用いて

$$\Phi = -\frac{M}{\kappa \sin \kappa b} J_0(j_1 r) \cos[\kappa(x - b)] \sin \Omega t \quad (\kappa b \neq n\pi) \quad (1)$$

と表すことができる. ここで, $M \equiv a\omega/c_0$ は音響 Mach 数, c_0 は静止状態の音速, $x \equiv x^*/R$ は軸方向の無次元座標, $b \equiv L/R$ は円管の形状を定めるパラメータ (アスペクト比), $\Omega \equiv R\omega/c_0$ は無次元角振動数であり, κ は

$$\kappa \equiv \sqrt{\Omega^2 - j_1^2} \quad (2)$$

で定義される無次元波数である. $\kappa b = n\pi$ のとき, 共鳴が起こり, M が十分に小さいとしても, 時間が経つと線形理論は適用できなくなる.

容器内の気体の音響共鳴現象に対する非線形理論解析は, 一次元振動,¹ 矩形領域内の二次元振動,² 球殻内の球対称振動³ など少なくない. 文献 1 と 2 では, 音源の振動数が容器の線形固有振動数に近ければ, 衝撃波が形成されることが示されたのに対し, 文献 3 の球殻内の弱非線形球対称振動の場合には, 衝撃波をともしない定在振動の近似解が得られていることは興味深い. この差異に着目して, 文献 4 では, 準一次元流れの仮定のもとで, 音響管の形状を様々に変えて, 容器の形状が衝撃波形成に及ぼす影響を調べた.⁴ (1) で表されるような非平面波モードの振動は, 管軸に対して斜めに進み管壁と軸上で反射される波の重ね合わせとして解釈すべきであるので, 当然のことなが

ら、準一次元流れとはみなし得ない。このような非平面波モードに関して、弱非線形進行波の挙動が調べられ、⁵⁻⁸ 緩やかに変調された正弦波列の複素振幅が遠方場で非線形 Schrödinger 方程式に支配されることが明らかにされている。しかしながら、弱非線形進行波の遠方場に対する結果は、共鳴振動の場合に起こる現象の予測にはあまり役立たない。

本研究は、Euler 方程式系を高解像度風上差分法⁹で数値的に解き、 $\kappa b = \pi$ の場合の非平面波モードの共鳴振動を調べることを目的とする。今回の数値計算の結果によると、共鳴の条件 $\kappa b = \pi$ を満たしながら b を変化させると (b を与えれば κ と Ω が定まる)、 b が小さいほど衝撃波が形成されやすくなり、 b が大きいと衝撃波が形成されなくなる。

2. 定式化

半径 R 、長さ L の理想気体で満たされた円管の一端を閉じ、他端に振動する膜を取り付ける。円管の中心軸を x^* 軸にとり、これに関して軸対称な現象を仮定する。また、衝撃波面を除いて気体の粘性と熱伝導性による散逸効果を見捨てる。よって、境界層は考えない。

u^* と v^* を流速の x^* 方向成分と r^* 方向成分、 ρ^* を密度、 p^* を圧力として、以下のような無次元変数を導入する：

$$\begin{aligned} t &= \frac{c_0 t^*}{R}, & x &= \frac{x^*}{R}, & r &= \frac{r^*}{R}, \\ u &= \frac{u^*}{c_0}, & v &= \frac{v^*}{c_0}, & \rho &= \frac{\rho^*}{\rho_0}, & p &= \frac{p^*}{\rho_0 c_0^2} \end{aligned} \quad (3)$$

支配方程式には、以下に示す軸対称流れに対する Euler 方程式系 (質量, 運動量, およびエネルギーの保存則) を用いる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial r} + \frac{\rho u v}{r} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial r} + \frac{\rho v^2}{r} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial[(e+p)u]}{\partial x} + \frac{\partial[(e+p)v]}{\partial r} + \frac{(e+p)v}{r} = 0 \quad (7)$$

ここで, e は, 単位体積当たりの理想気体の全エネルギーである:

$$e = \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) + \frac{p}{\gamma - 1}$$

振動膜上における運動学的境界条件は次のように書ける.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial r} = 0 \quad (h = 0 \text{ において}) \quad (8)$$

$$h(x, r, t) = x - \frac{M}{\Omega} J_0(j_1 r) [\cos \Omega t - 1] \quad (9)$$

他の境界 (管壁) 上では, 流速の境界の法線方向成分がゼロであることを課す. 境界条件 (8)(9) は, $\kappa b \neq n\pi$ のときの線形 ($M \rightarrow 0$) の極限の解が (1) となるように設定されている. また, 管内の気体が初期時刻に静止一様状態にあったとして, 次のような初期条件を課す.

$$u = v = 0, \quad p = \frac{1}{\gamma}, \quad \rho = 1 \quad (t = 0 \text{ において}) \quad (10)$$

3. 予備的な考察

共鳴条件 $\kappa = \pi/b$ を満たす線形問題では, 振動面と管壁での境界条件を満足する速度ポテンシャルは, 線形波動方程式を解くことによって

$$\Phi = \frac{M}{b} J_0(j_1 r) \left[-\frac{t}{\Omega} \cos \kappa x \cos \Omega t + \frac{x-b}{\kappa} \sin \kappa x \sin \Omega t \right] \quad (11)$$

と得られる. 明らかに (11) は初期条件 (10) を満たさない. (10) を満たすためには, (11) に同次境界条件を満たす線形波動方程式の特解を加えねばならない. しかし, そのような特解は t が大きくなっても $O(M)$ にとどまる. ゆえに, t が大きくなるにつれて卓越する振動成分は, (11) から, 次式で与えられると予想される:

$$J_0(j_1 r) \cos \kappa x \cos \Omega t \quad (12)$$

4. 数値計算結果

以下に示す計算例では, (i) 音響 Mach 数 M を $M = 0.01$ に固定し, (ii) 線形問題の共鳴条件

$$\kappa = \sqrt{\Omega^2 - j_1^2} = \frac{\pi}{b} \quad (13)$$

を課し, さらに (iii) $\Omega > \Omega_c = j_1$ とする. ここで, $\Omega_c = j_1 = 3.8317\dots$ は無次元化された線形音波の遮断周波数であり, これより小さい Ω に対しては, 線形解は evanescent モードとなる.

図 1 に衝撃波をともなう代表的な振動波形を示す. これは, $\Omega = 7.36$ ($b = 1/2$ すなわち $R = 2L$), $\Omega t = 41.4\pi$ の密度波形である. 図中には, 平行四辺形を形作る四つの衝撃波面と中心軸近傍の軸に垂直な波面をもつ 5 番目の衝撃波面が示されている. 5 番目の衝撃波面と平行四辺形の接点は衝撃波三重点となり, そこを通過して軸にほぼ平行な弱い接触不連続面 (渦層) が発生している. この時刻の最大密度は 1.5 に達しており, 強非線形現象であるといえる. 平行四辺形をなす四つの衝撃波面は, 矩形領域内の二次元振動の場合²に形成される衝撃波面と極似しているが, 5 番目の衝撃波面と渦層は本問題に特有の現象である. 時間が経過すると, 渦層は不安定性により巻き上がりこわれていく.

実際の現象では, 巻き上がった渦層と境界層の相互作用が境界層の剥離や乱流化を導くだろう. 境界層を考慮しないことが前提となっている本研究では, 渦層の巻き上がりが著しくなる時刻以降の現象についてこれ以上言及できない.

Ω を小さくしていくと, 衝撃波三重点は軸に近づき, それにともない, 5 番目の衝撃波面の面積は小さくなっていく. $\Omega \sim 4.57$ で三重点は現れなくなり, 5 番目の衝撃波もなくなる. この場合, 時間が経つと ($\Omega t \gtrsim 120\pi$) 衝撃波が消滅してしまう.

さらに Ω を小さくしていくと, 発生する衝撃波の最大強度は小さくなり, $\Omega \sim 4.14$ ($b = 2$ すなわち $L = 2R$) の場合には, 少なくとも今回の数値計算の計算時間内 ($\Omega t < 240\pi$) では, 衝撃波は形成されない. この場合の密度分布を図 2 に示す. おおよそ, (12) に示した関数形に近いことがわかる.

5. まとめ

これまでの数値計算結果を以下に要約する:

- (i) 円管内の気体の非平面波モードの共鳴振動は衝撃波に発展し得る. 弱非線形進行波の遠方場が非線形 Schrödinger 方程式によって記述されることと対比すると興味深い.
- (ii) Ω が大きいほど ($5 \lesssim \Omega \lesssim 8$), すなわち, 円管の半径 R が長さ L に比べて大きいほど ($L \lesssim R \lesssim 2L$), 早い時間に強い衝撃波が形成される.
- (iii) Ω が大きいとき ($\Omega \gtrsim 5$), 中心軸近傍に衝撃波三重点が形成される. 三重点は接触不連続面 (渦層) を生じさせる. Ω を小さくするにつれて, 三重点は中心軸に近づく.
- (iv) $\Omega \sim 4.57$ のとき, 三重点は現れない. つまり, 衝撃波がほぼ軸上で交差する. この場合, $\Omega t \sim 120\pi$ をこえると衝撃波が消滅する. 以後, 少なくとも $\Omega t \sim 180\pi$ まで衝撃波は現れない.
- (v) $\Omega \sim 4.14$ の場合 ($L \sim 2R$), 少なくとも $\Omega t \sim 240\pi$ まで, 衝撃波は発生しない.
- (vi) Ω が大きい場合に衝撃波三重点から生じる渦層は, 不安定性のために, 時間が経つにつれて巻き上がりこわれていく.

参考文献

1. Chester, W. 1964 *J. Fluid Mech.* **18**, 44.
2. Keller, J. J. 1978 *J. Fluid Mech.* **87**, 299.
3. Chester, W. 1991 *Proc. R. Soc. Lond. A* **434** 459.
4. Ockendon, H., Ockendon, J. R., Peake, M. R. & Chester, W. 1993 *J. Fluid Mech.* **257** 201.
5. Nayfeh, A. H. 1975 *J. Acoust. Soc. Am.* **57** 803.
6. Aranha, J. A., Yue, D. K. P. & Mei, C. C. 1982 *J. Fluid. Mech.* **121** 465.
7. Nozaki, K. & Taniuti, T. 1986 *Physica* **18D** 127.
8. Larraza, A. & Coleman, W. F. 1996 *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 139.
9. Chakravarthy, S. R. 1987 NASA CR 4043.

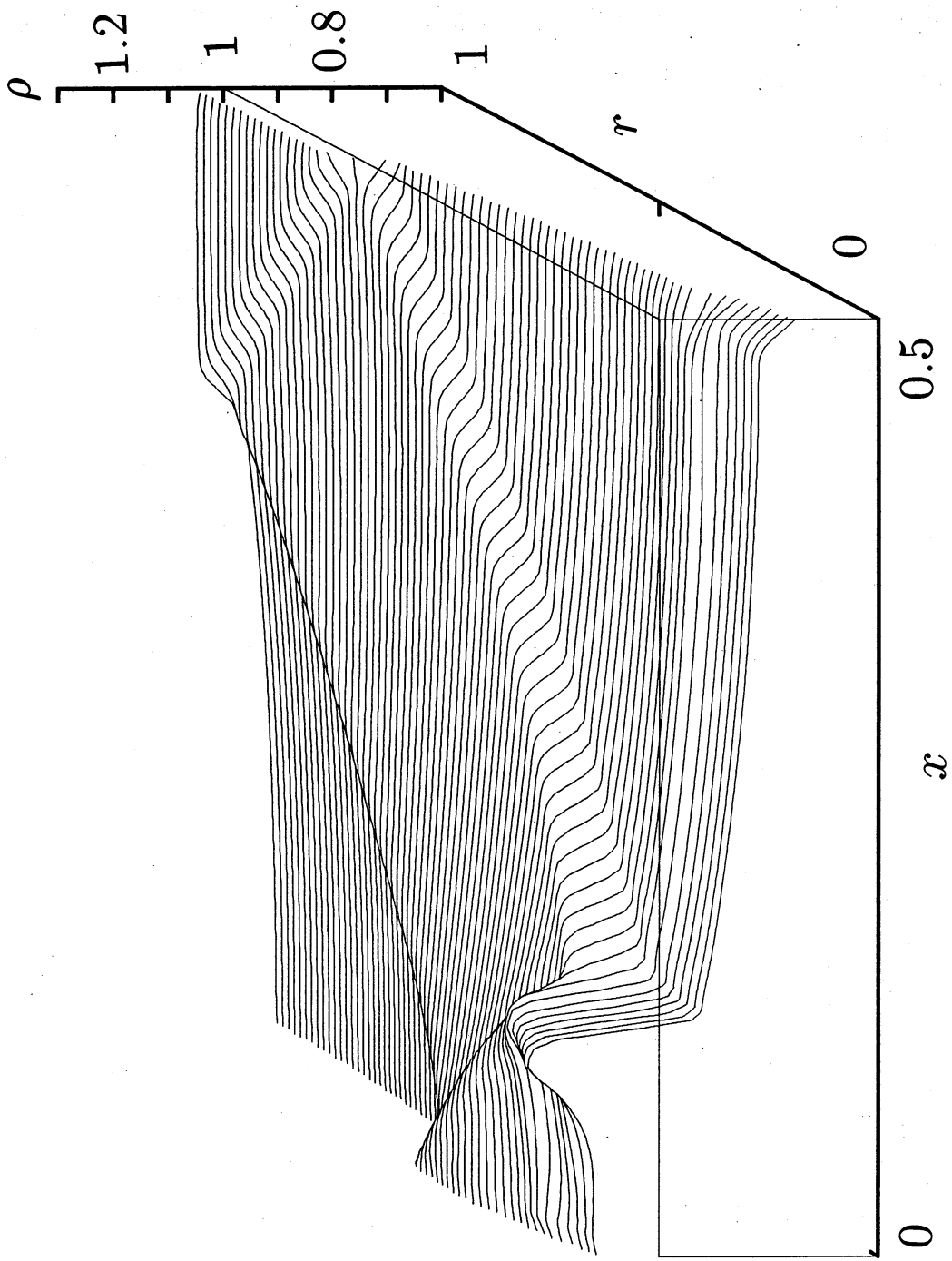


図 1. 密度波形. $\Omega = 7.36$ ($R = 2L$), $\Omega t = 41.4\pi$. 衝撃波面, および, 衝撃波三重点を通る接触不連続面が形成されている.

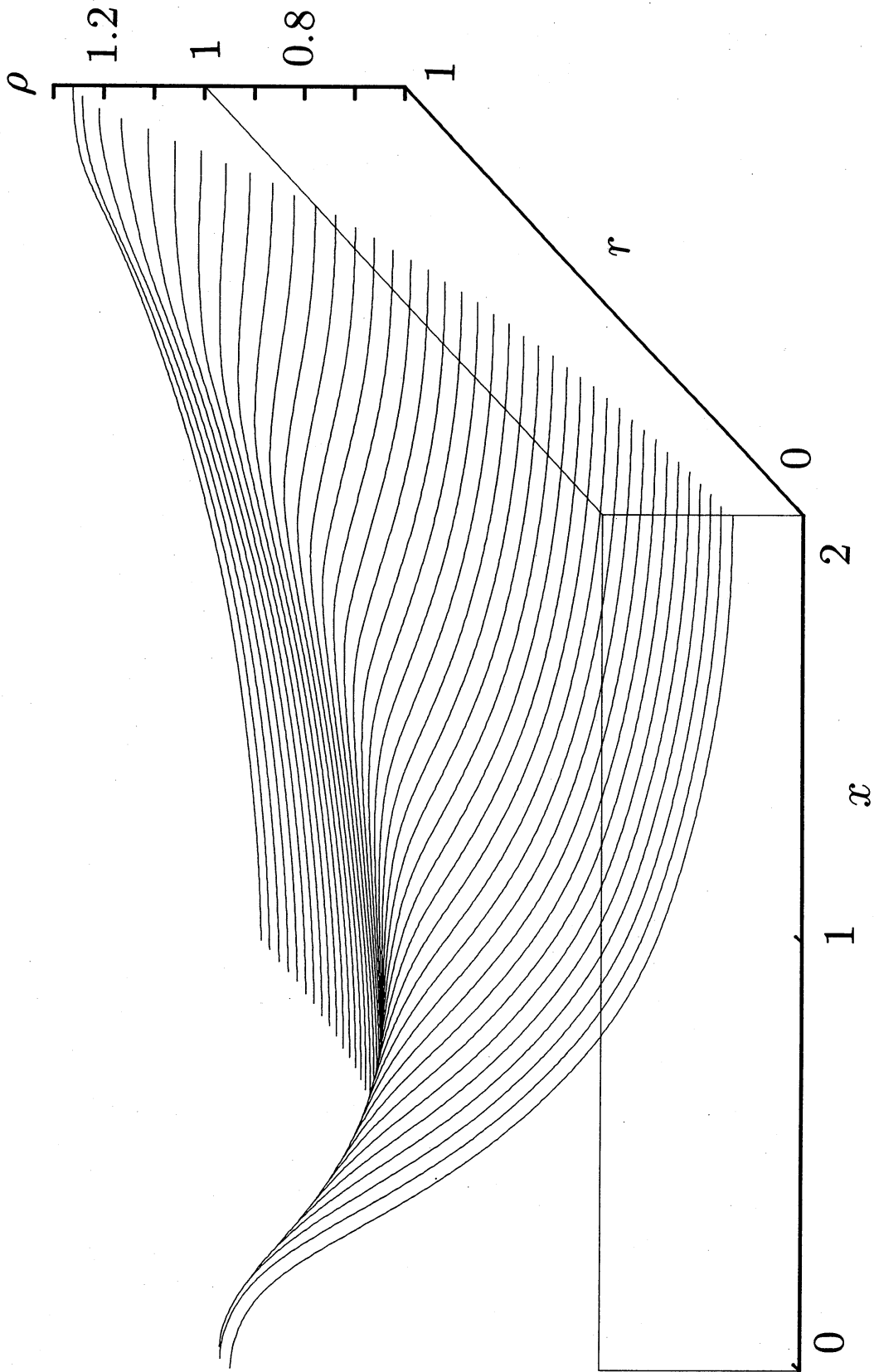


図2. 密度波形. $\Omega = 4.14$ ($L = 2R$), $\Omega t = 133\pi$. 衝撃波面は形成されない.